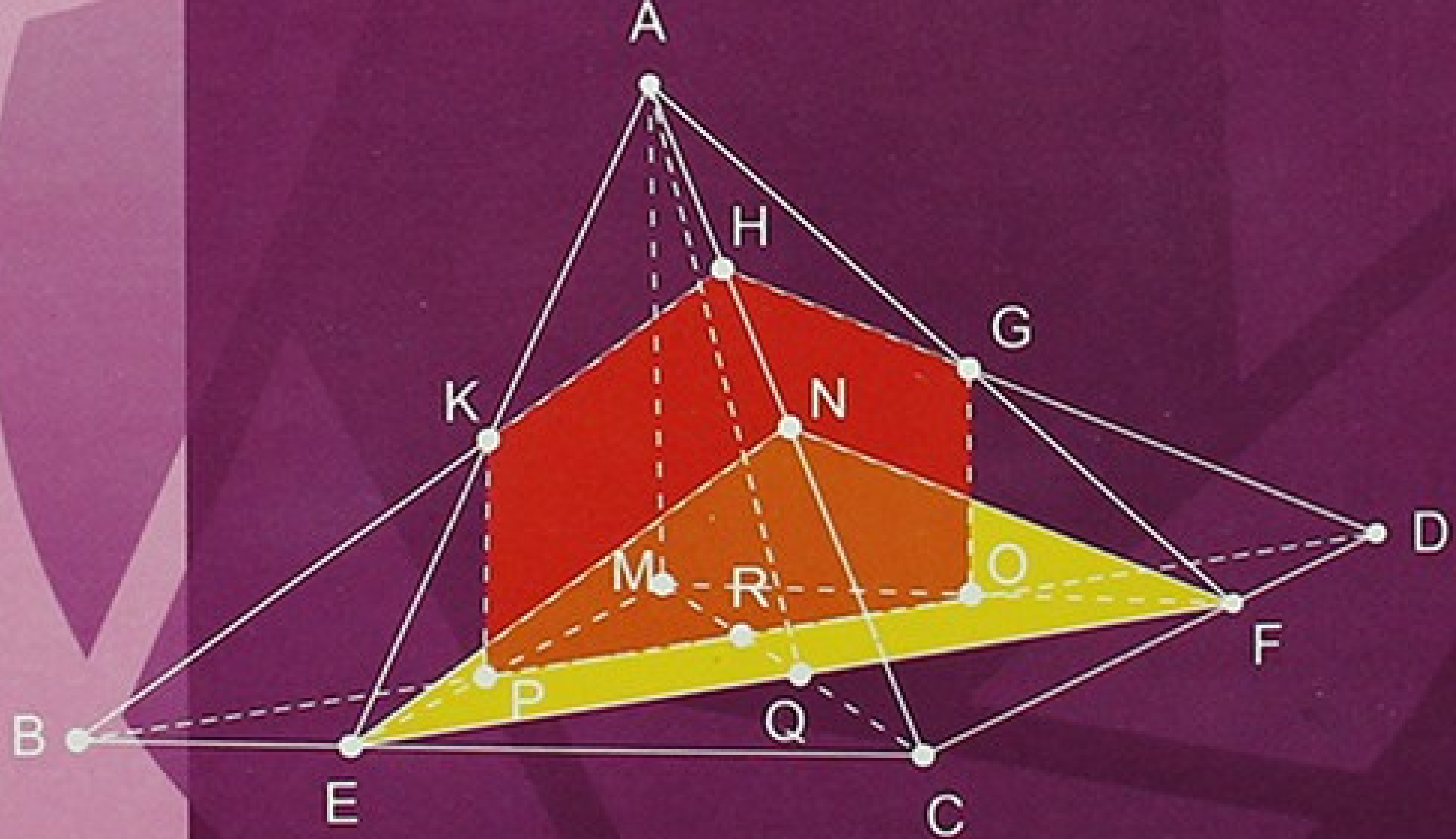
NGUYỄN BÁ ĐÔ

Những câu chuyện lý thú về HÌNH HỌC



NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này kể *Những câu chuyện lý thú về hình học*. Tuy vậy chúng tôi không có ý định và cũng không thể mô tả một cách hoàn chỉnh, liền mạch từng vấn đề của hình học. Đó là nhiệm vụ của sách giáo khoa.

Trong quá trình từ dạy đến học, từ học đến hiểu, từ hiểu đến áp dụng, từ áp dụng đến sáng tạo đòi hỏi mỗi người phải tìm tòi, năng động. Sách giáo khoa chỉ cung cấp những điều cốt yếu, cho nên muốn hiểu đầy đủ và sâu sắc hơn từng vấn đề cần đọc các sách bổ khuyết. Và đây là cuốn sách bổ khuyết như vậy về hình học.

Sách phục vụ học sinh, giáo viên phổ thông và những người yêu thích toán.

Nguyễn Bá Đô

Cùng một tác giả

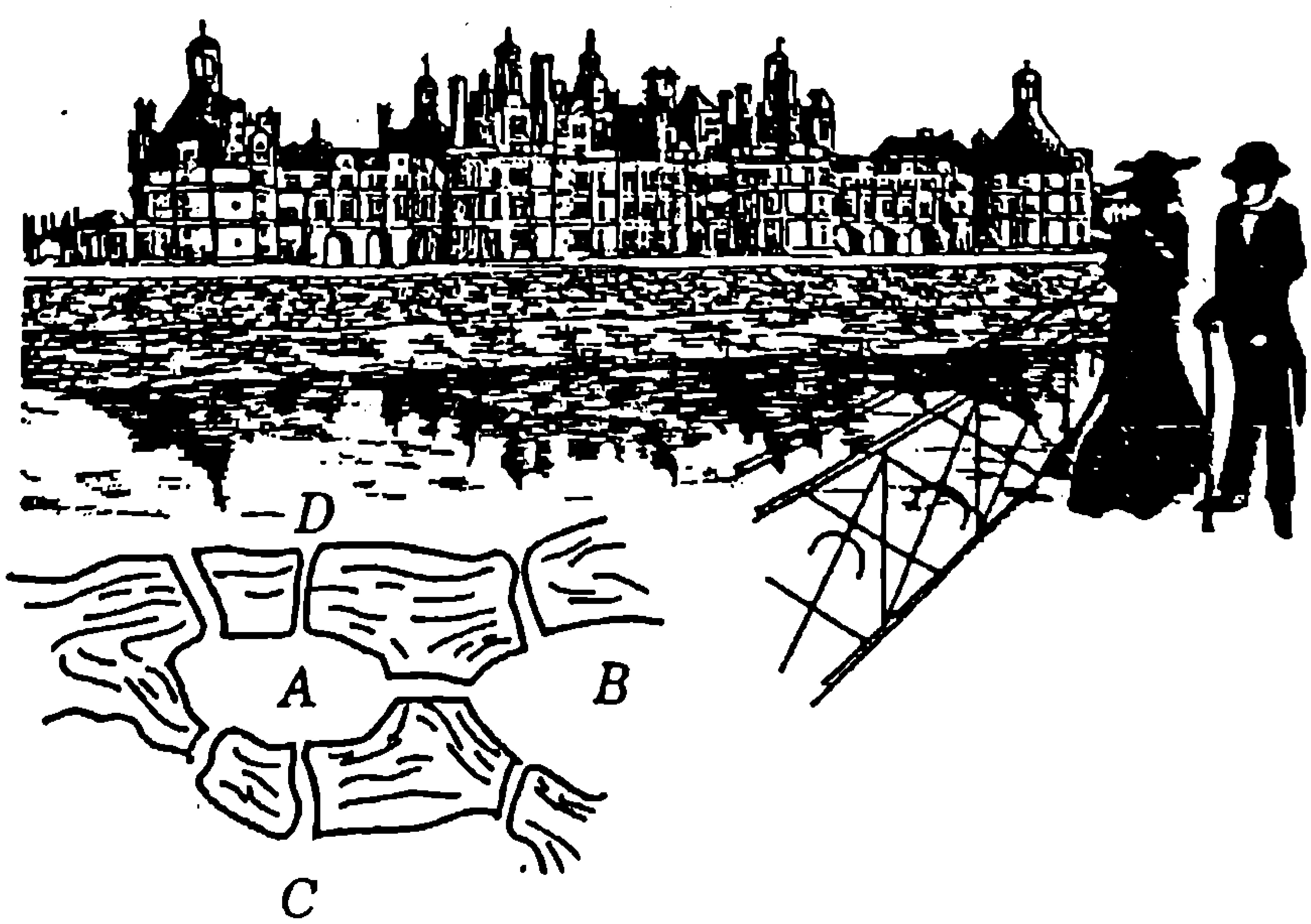
NGUYỄN BÁ ĐÔ

1. Những câu chuyện lý thú về xác suất
2. Những câu chuyện lý thú về phương trình
3. Những câu chuyện lý thú về logic
4. Những câu chuyện lý thú về giới hạn
5. Những câu chuyện lý thú về hàm số
6. Những câu chuyện lý thú về hình học
7. Một số vấn đề toán học chưa giải quyết được

1. NGỌN NGUỒN CỦA "BÀI TOÁN KÖNIGSBERG"

D.Hilbert

Königsberg là tên cũ của một thành phố nổi tiếng trong lịch sử, ngày nay gọi là Kaleningrad thuộc Cộng hoà Liên bang Nga. Trong hai thế kỷ XVIII và XIX Königsberg là thủ phủ của Đông Phổ (Prusse). Thành phố này đã sinh ra rất nhiều nhân vật vĩ đại. Nhà triết học nổi tiếng, người sáng lập ra chủ nghĩa duy tâm cổ điển Emmanuel Kant (12/2/1724 - 22/4/1804) suốt đời không rời xa Königsberg. Một trong những nhà toán học vĩ đại nhất thế kỷ XX, David Hilbert (23/1/1862 - 14/2/1943) người Đức cũng sinh ra ở đây.



Hình 1-1

Phong cảnh thành Königsberg cuốn hút con người. Sông Prégel trong xanh. Giữa sông này có hòn đảo nhỏ xinh đẹp. Trường đại học Königsberg nổi tiếng nằm sát ngã ba sông. Sông Prégel tạo thành bốn khu vực (hình 1-1): khu đảo (A), khu đảo (B), khu Nam (C) và khu Bắc (D). Có bảy chiếc cầu nối bốn khu vực, trong đó năm chiếc cầu nối với đảo A.

Nhóm cầu khác thường này xưa nay đã hấp dẫn rất nhiều cư dân và du khách. Nhiều người nhận thấy rằng, muốn đi qua hết cả bảy chiếc cầu này thì bao giờ cũng phải đi qua một chiếc cầu nào đó hơn một lần. Do vậy trước thế kỷ XVIII nhiều người đã say sưa với bài toán lý thú sau đây:

Liệu có thể đi qua mỗi chiếc cầu chỉ một lần và không bỏ sót cầu nào được không?

Đây là "Bài toán Königsberg" nổi tiếng. Về sau bài toán này có thay đổi như sau: Do yêu cầu về chiến lược quân sự, một đội công binh được lệnh đánh sập bảy chiếc cầu với điều kiện là sau khi các xe tải chở thuốc nổ chạy qua mỗi chiếc cầu thì phải đánh sập ngay chiếc cầu đó và không được để sót chiếc cầu nào.

Bạn đọc hoàn toàn có thể vẽ bản sơ đồ theo hình 1-1 để thử xem. Nhưng cũng cần báo trước với bạn đọc là: tuy nhìn sơ đồ thấy có vẻ đơn giản nhưng người ta đã cho biết rằng muốn tìm được lời giải thật không đơn giản, bởi vì có tới hơn năm nghìn khả năng xảy ra! Do vậy, có người sau nhiều lần thất bại đã ngả về phủ định sự tồn tại của các giải pháp thoả mãn các điều kiện nêu trên. Một số khác thì cho rằng, đáp án tài tình là có, chỉ vì chưa ai tìm ra mà thôi, điều này thường gặp ở các lĩnh vực mà trí tuệ của nhân loại còn chưa vươn tới được.

Ma lực của bài toán đã hấp dẫn nhà toán học thiên tài Léonhard Euler (15/4/1707 - 18/9/1783) người Pháp gốc Thụy Sĩ nhưng 31 năm làm việc ở Nga, 25 năm ở Đức và năm 1733 trở thành viện sĩ Viện Hàn lâm khoa học Peterbur. Bằng con mắt tinh đời, ông đã nhìn ra ý nghĩa tiềm ẩn của bài toán hình học thú vị này và đã chứng minh rằng với điều kiện bài toán đưa ra thì không thể thực hiện được.

L.Euler

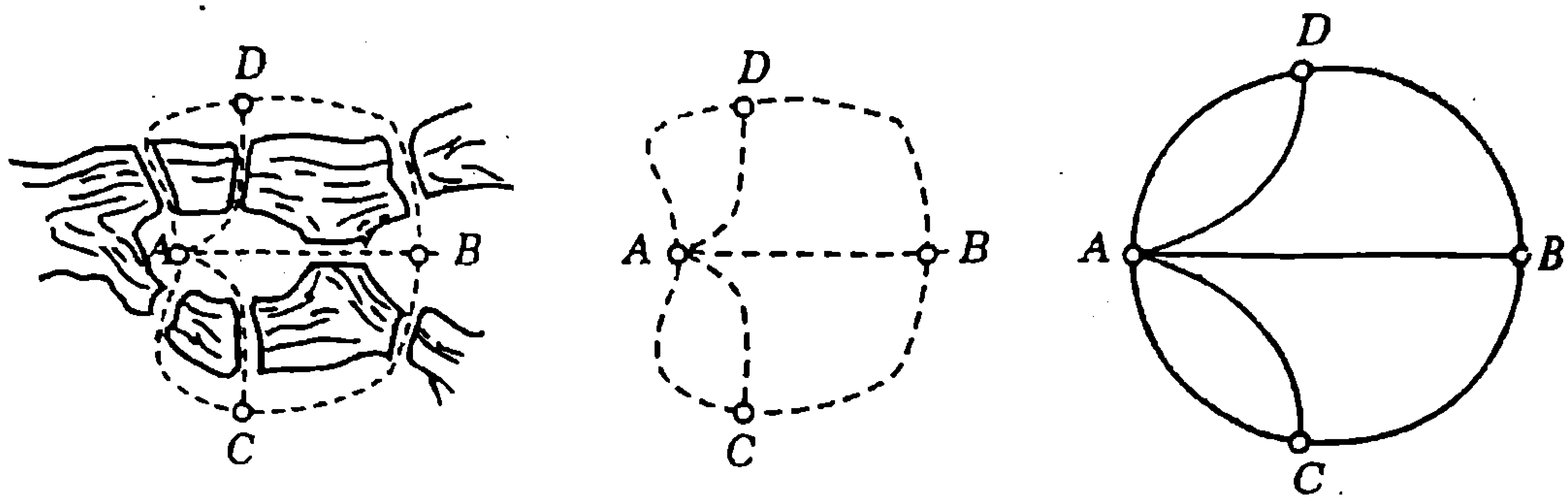
Năm 1736, L.Euler (lúc đó 29 tuổi) đã gửi cho Viện Hàn lâm khoa học Peterbur một bản luận văn nhan đề "Bảy chiếc cầu ở Konigsberg". Mở đầu bài luận văn, ông viết:

"Nhánh hình học bàn về dài - ngắn, lớn - bé, luôn được mọi người nhiệt tình nghiên cứu. Nhưng vẫn còn một nhánh mà cho đến nay hầu như chưa ai mò mẫm tới; nhà số học Gottfried Wilhelm von Leibniz (1/7/1646 - 14/11/1716) người Đức đã đề cập tới nó trước tiên, gọi nó là nhánh "hình học vị trí". Nhánh hình học này chỉ bàn quan hệ có liên quan tới vị trí, nghiên cứu tính chất của vị trí, không xét tới dài - ngắn, lớn - bé, cũng không dính dáng tới tính toán. Đến nay chưa có một định nghĩa nào vừa ý mọi người để khắc hoạ nội dung và phương pháp của nhánh "hình học vị trí" này,...".

G.W.von Leibniz

Về sau người ta chính xác hoá bài toán này và nó trở thành "Bài toán bảy chiếc cầu": Liệu có thể xuất phát từ một điểm, không bỏ sót cũng không đi qua cầu nào quá một lần và trở về chỗ cũ.

L.Euler đã vẽ sơ đồ bài toán này như hình 1 - 2: bốn khu vực biểu diễn bằng bốn điểm A, B, C và D; bảy chiếc cầu biểu diễn bằng bảy đường (bảy đường viền). Nếu bài toán này bỏ điều kiện "trở về chỗ cũ" thì trở thành "Bài toán vẽ một nét". Như vậy, muốn giải "Bài toán bảy chiếc cầu", ta hãy xét "Bài toán vẽ một nét" đã.



Hình 1-2

Bài toán này ngày nay được xem là một trong những cội nguồn của topo và lý thuyết graph. Không gian topo do Hausdorff đưa ra năm 1914. Theo thuật ngữ của lý thuyết graph thì vấn đề chung quy là chứng minh rằng graph phẳng liên kết với sơ đồ ở hình 1-2 không có một đường nào đi qua một và chỉ một lần mỗi cạnh của nó (graph Euler).

2. "BÀI TOÁN VẼ MỘT NÉT"

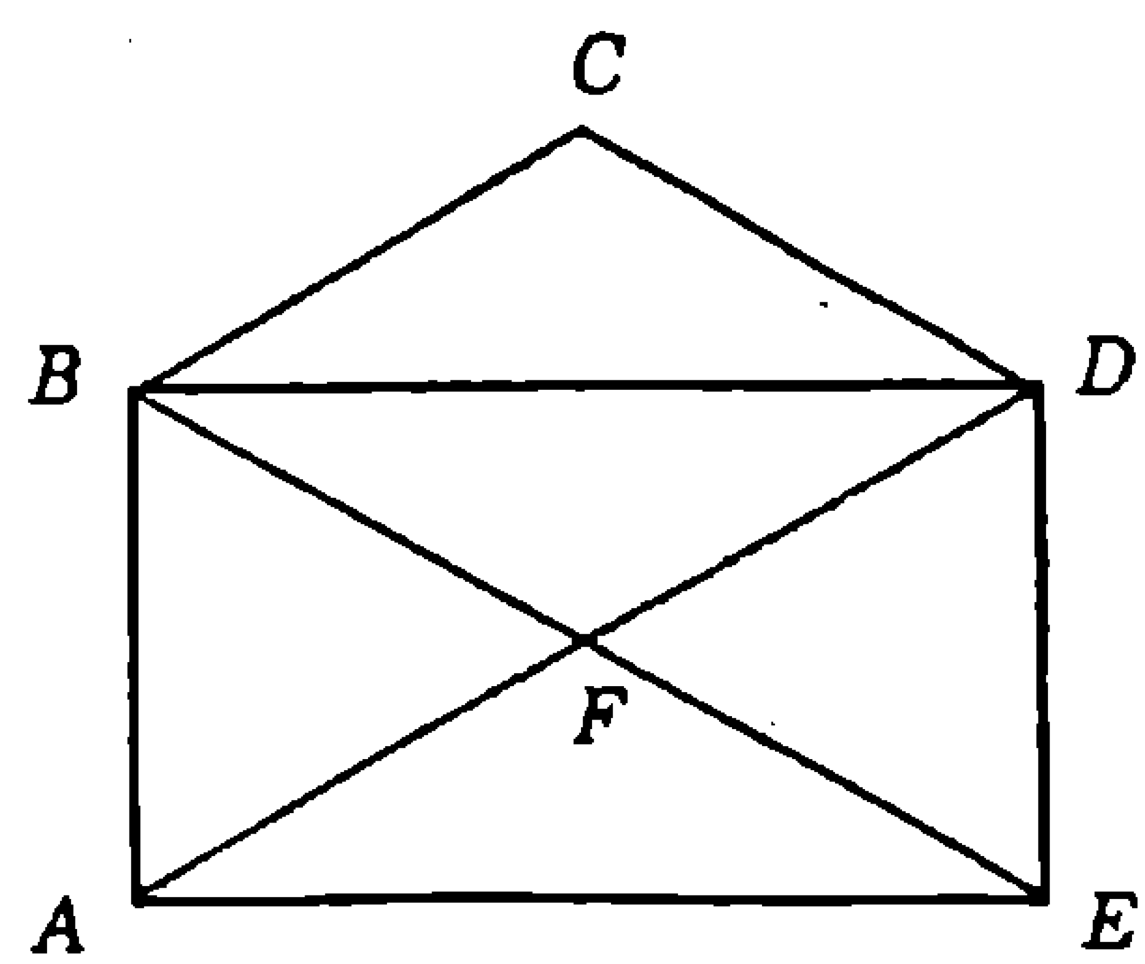
"Bài toán vẽ một nét" phát biểu như sau: Cho một mạng lưới (sơ đồ) phẳng, liệu có thể giữ cho bút không rời mặt phẳng để khi xuất phát từ một điểm (đỉnh) thì các đường chỉ được vẽ một lần mà hoàn thành được mạng lưới không?

Nếu thêm điều kiện "trở về chỗ cũ" thì đó là "Bài toán vẽ một nét đi và về".

"Bài toán vẽ một nét" không có gì khó khăn, nếu mạng lưới chỉ có một số ít đường. Thông thường, qua kinh nghiệm do đi lại nhiều lần cũng có thể tìm ra hành trình hợp lý (ngắn nhất). Tuy vậy, nếu mạng lưới tương đối phức tạp thì việc giải bài toán này không phải đơn giản.

Năm 1736, L.Euler đã giải quyết trọn vẹn "Bài toán vẽ một nét", do vậy người ta còn gọi bài toán này là "Bài toán Euler".

Lấy ví dụ mạng lưới biểu diễn các mép gấp của chiếc phong bì (hình 2-1). Trước tiên, cần để mạng lưới vẽ được một nét là mạng lưới đó phải *liên thông*. Đó là mạng lưới mà từ bất cứ một đỉnh nào cũng có thể đi tới tất cả các đỉnh khác.



Hình 2-1

Bây giờ ta gọi một đỉnh là "đỉnh bậc lẻ" nếu từ đó có một số lẻ đoạn nối tới nó, chẳng hạn đỉnh A và đỉnh E ở hình 2-1. Một đỉnh là "đỉnh bậc chẵn" nếu từ đó có một số chẵn đoạn nối tới nó, chẳng hạn bốn đỉnh B, C, D và F.

L.Euler đã chứng minh rằng một mạng lưới liên thông có bốn tính chất sau đây:

1. Trong bất cứ mạng lưới liên thông nào thì số lượng "đỉnh bậc lẻ" cũng chẵn.

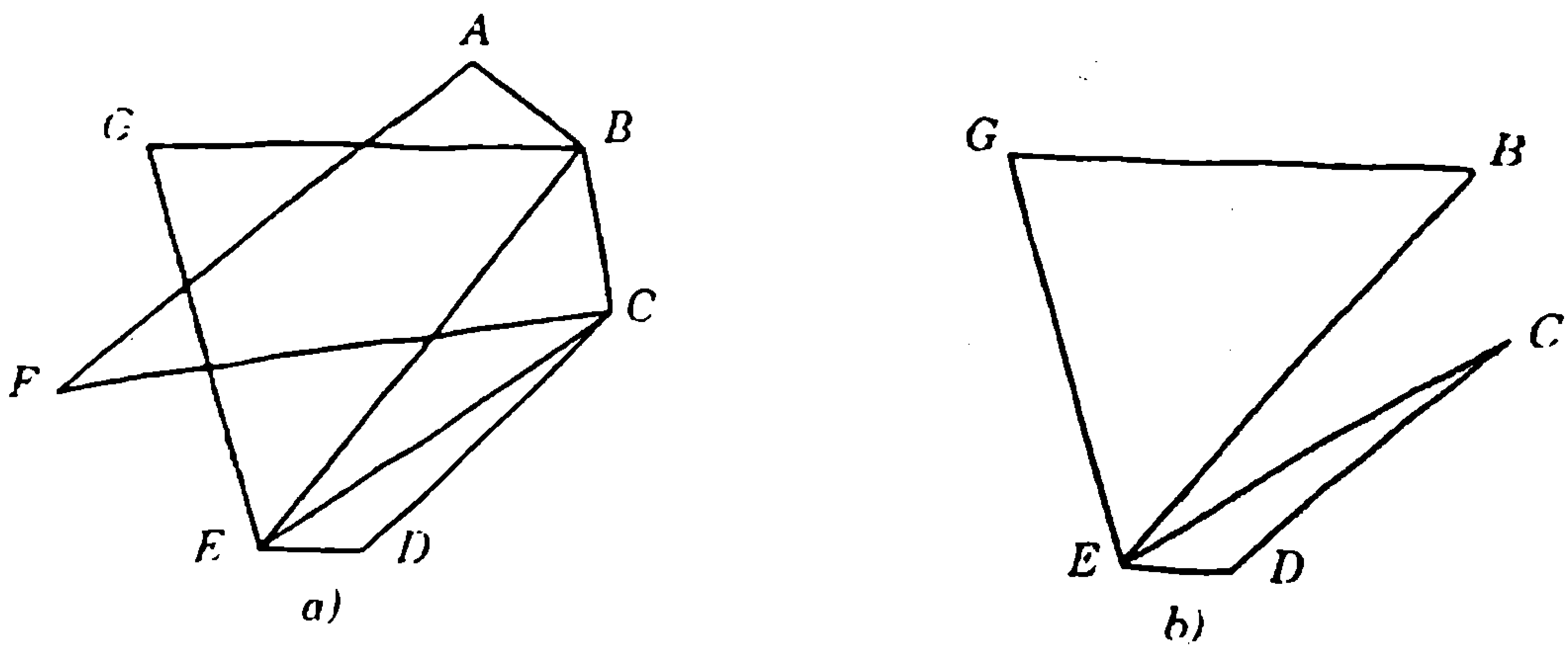
2. Mạng lưới chỉ có "đỉnh bậc chẵn" (không có "đỉnh bậc lẻ") thì bao giờ cũng vẽ được bằng một nét khép kín (điểm đầu và điểm cuối của nét vẽ trùng nhau), gọi tắt là "trở về chỗ cũ".

3. Mạng lưới chỉ có hai "đỉnh bậc lẻ" thì bao giờ cũng vẽ được bằng một nét (phải vẽ xuất phát từ một "đỉnh bậc lẻ" và kết thúc ở "đỉnh bậc lẻ" kia).

4. Mạng lưới có số "đỉnh bậc lẻ" nhiều hơn hai thì không thể vẽ bằng một nét mà không lặp lại. Nếu số "đỉnh bậc lẻ" là 2n thì không thể vẽ được với ít hơn n nét và những đường vẽ hai nét bao giờ cũng nối liền từng cặp "đỉnh bậc lẻ". (Tính chất này còn được gọi là hệ quả Listing).

Bây giờ ta xem hai tính chất 2 và 3.

Đầu tiên là tính chất 2: Mạng lưới liên thông chỉ có "đỉnh bậc chẵn", như hình 2-2a.

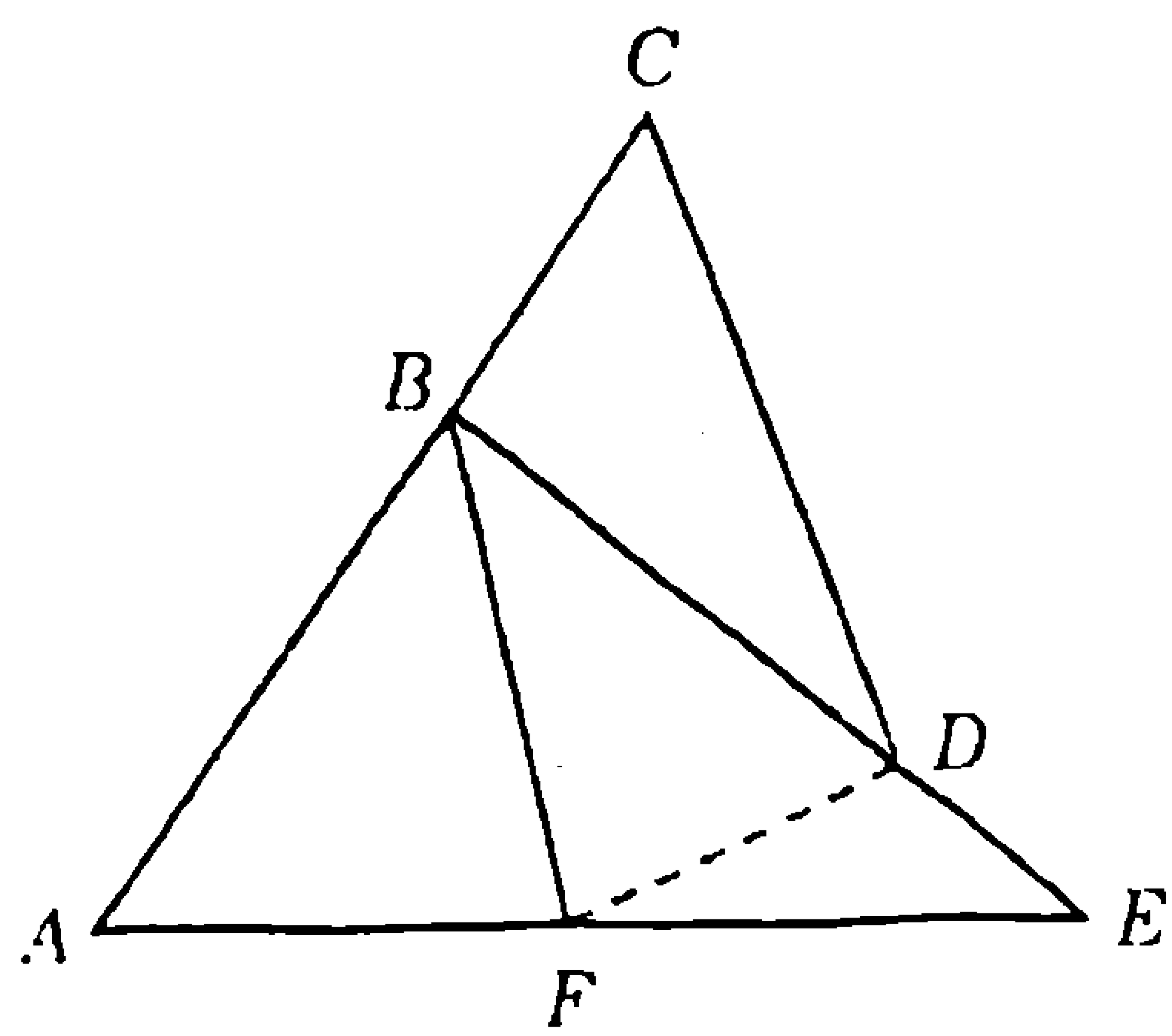


Hình 2-2

Xuất phát từ một đỉnh tuỳ ý, có thể vẽ một đường khép kín và trở về đỉnh xuất phát. Chẳng hạn, từ đỉnh A đi qua F, C, B lại trở về A.

Bây giờ ta xoá hành trình này đi, còn lại mạng lưới ở hình 2-2b. Hình 2-2b cũng chỉ có "đỉnh bậc chẵn" (không có "đỉnh bậc lẻ"). Vì vậy, như đã nói ở trên, có thể tìm được đường khép kín, chẳng hạn đường BGEB. Do đỉnh B cũng nằm trên đường khép kín trước đây nên có thể ghép hai đường này thành một đường khép kín AFCBGEBA. Xoá đường khép kín này đi, tiếp tục tìm phần còn lại của đường khép kín mới, rồi lại nối với đường khép kín ở trên.... Cứ như thế tiếp tục, có thể nối toàn bộ, hình thành một đường khép kín, nghĩa là có thể vẽ hình này bằng một nét mà đỉnh xuất phát và đỉnh cuối cùng chỉ là một.

Ta xét sang tính chất 3: Mạng lưới liên thông chỉ có hai "đỉnh bậc lẻ" như hình 2-3 (các đỉnh khác đều là "đỉnh bậc chẵn").



Hình 2-3

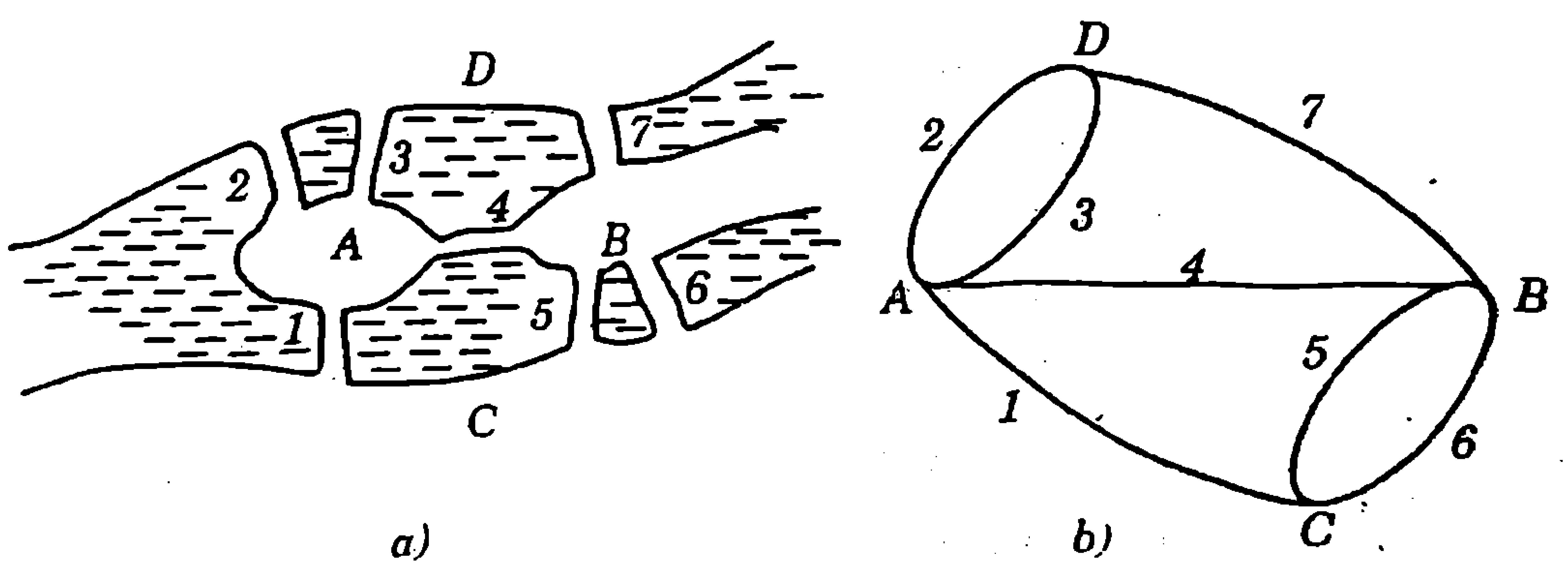
Chỉ cần nối hai "đỉnh bậc lẻ" D và F lại với nhau (đường nét đứt). Như vậy mạng lưới mới không còn "đỉnh bậc lẻ" nữa (chỉ còn "đỉnh bậc chẵn") và ta lại trở về trường hợp có tính chất 2. Do vậy có thể vẽ hình 2-3 bằng một nét.

Trở lại mạng lưới ở hình 2-1, ta thấy có hai "đỉnh bậc lẻ" A và E nên vẽ được bằng một nét.

Bây giờ ta xét "Bài toán bảy chiếc cầu" (hình 1-2). Vì cả bốn đỉnh đều là "đỉnh bậc lẻ" nên không thể vẽ được bằng một nét, mà chỉ có thể vẽ được bằng hai nét trở lên, do n = 2, theo tính chất 4, nghĩa là "bài toán bảy chiếc cầu" không có lời giải "vẽ bằng một nét".

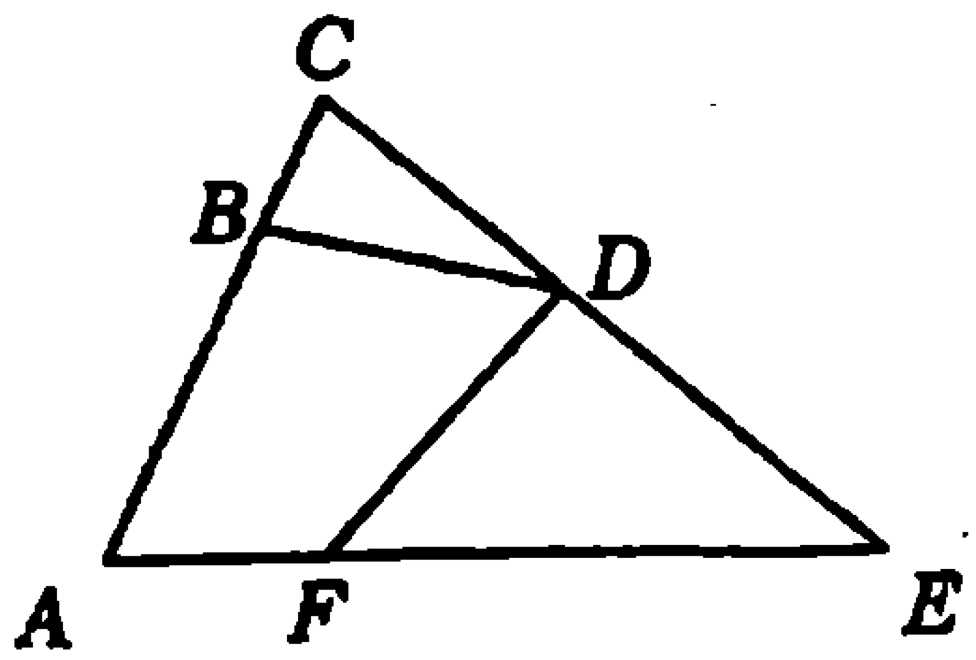
"Bài toán bảy chiếc cầu" nếu còn điều kiện "trở về chỗ cũ", tức là trở thành "Bài toán vẽ một nét đi và về" thì lại càng không giải được.

Nếu bảy chiếc cầu được bố trí như hình 2-4a thì có thể đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần, vì mạng lưới ở hình 2-4b chỉ có hai "đỉnh bậc lẻ" C và D. Theo tính chất 3, ta có thể xuất phát từ đỉnh C lần lượt đi qua A, D, A, B, C, B và D (theo các đường từ 1 đến 7). Tất nhiên, trong trường hợp này cũng không thể "vẽ một nét đi và về" được.

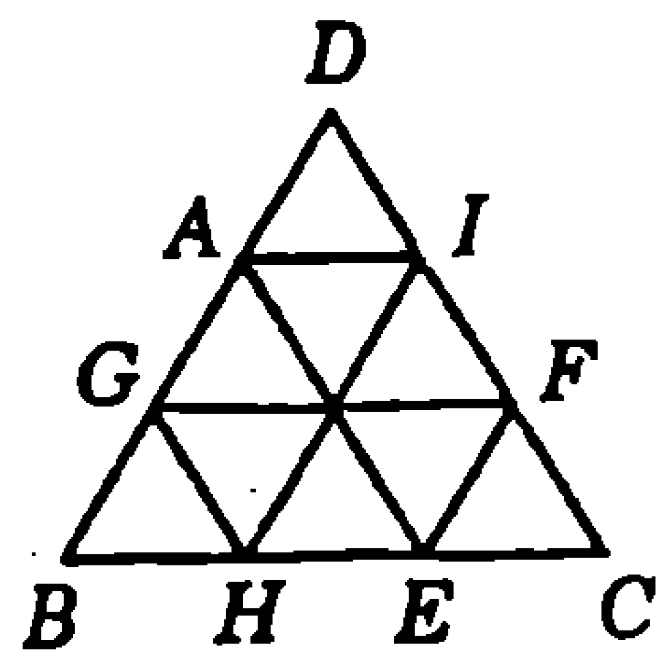


Hình 2-4

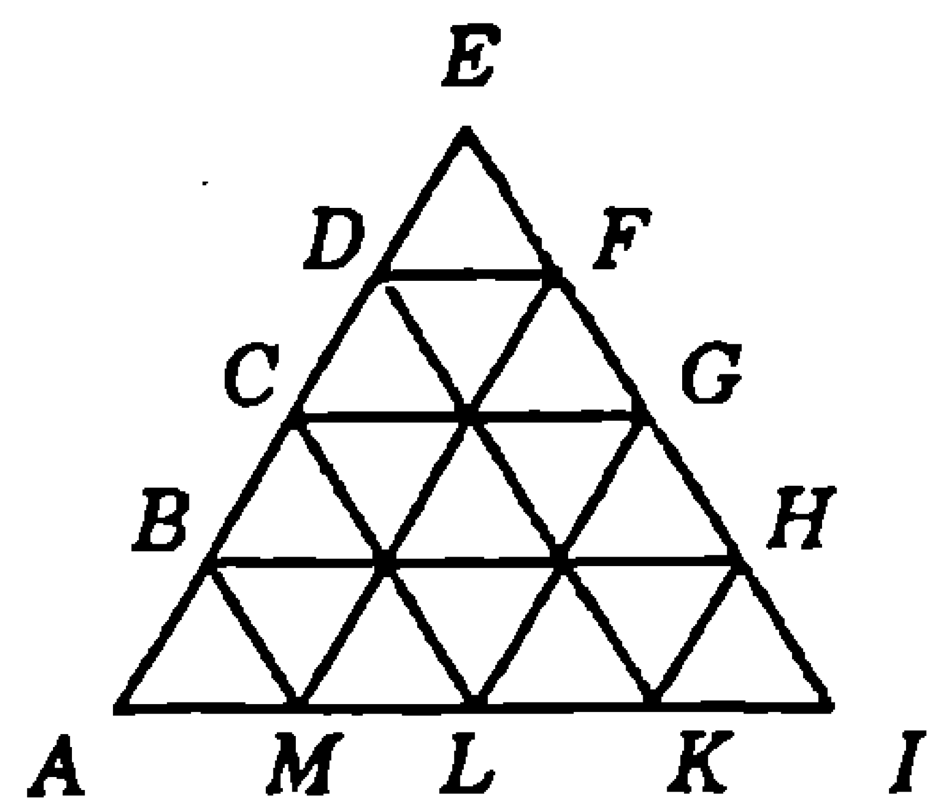
Bây giờ ta hãy áp dụng bốn tính chất nêu trên để xét các mạng lưới sau đây:



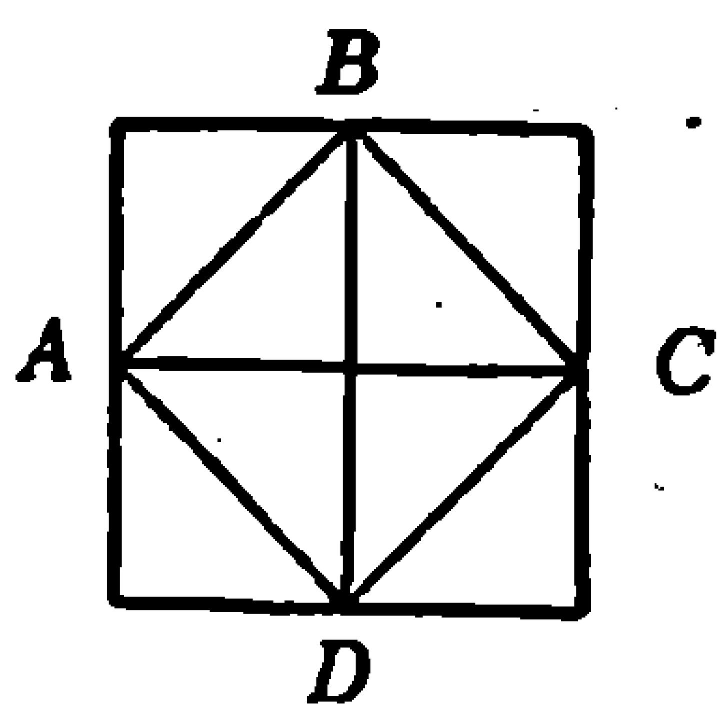
Hình 2-5



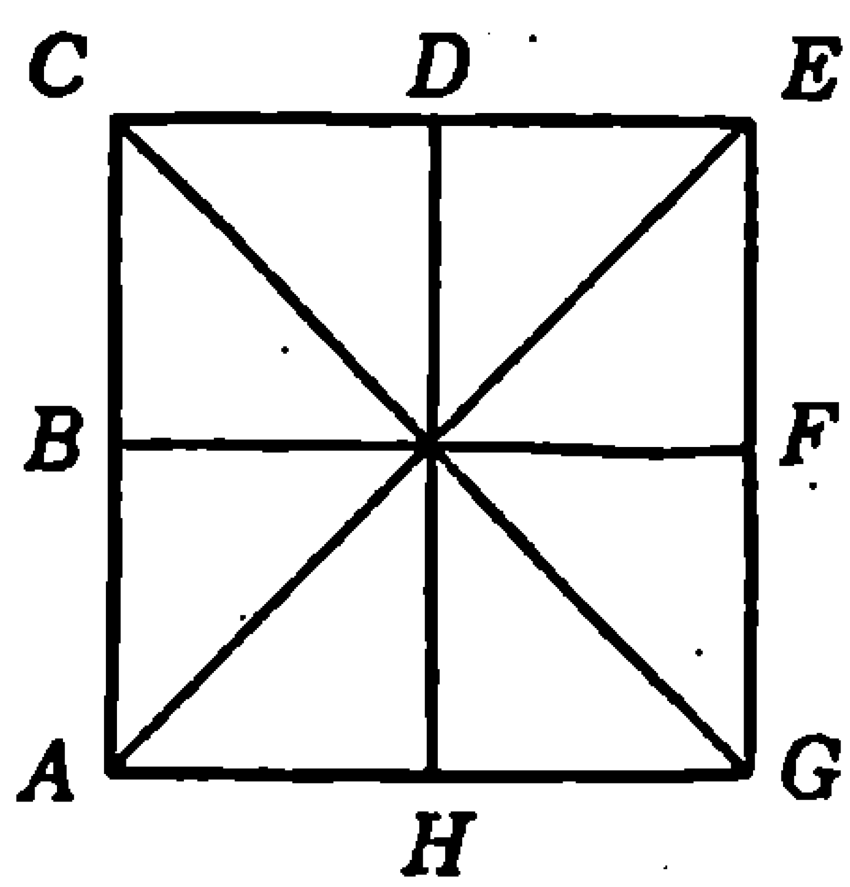
Hình 2-6



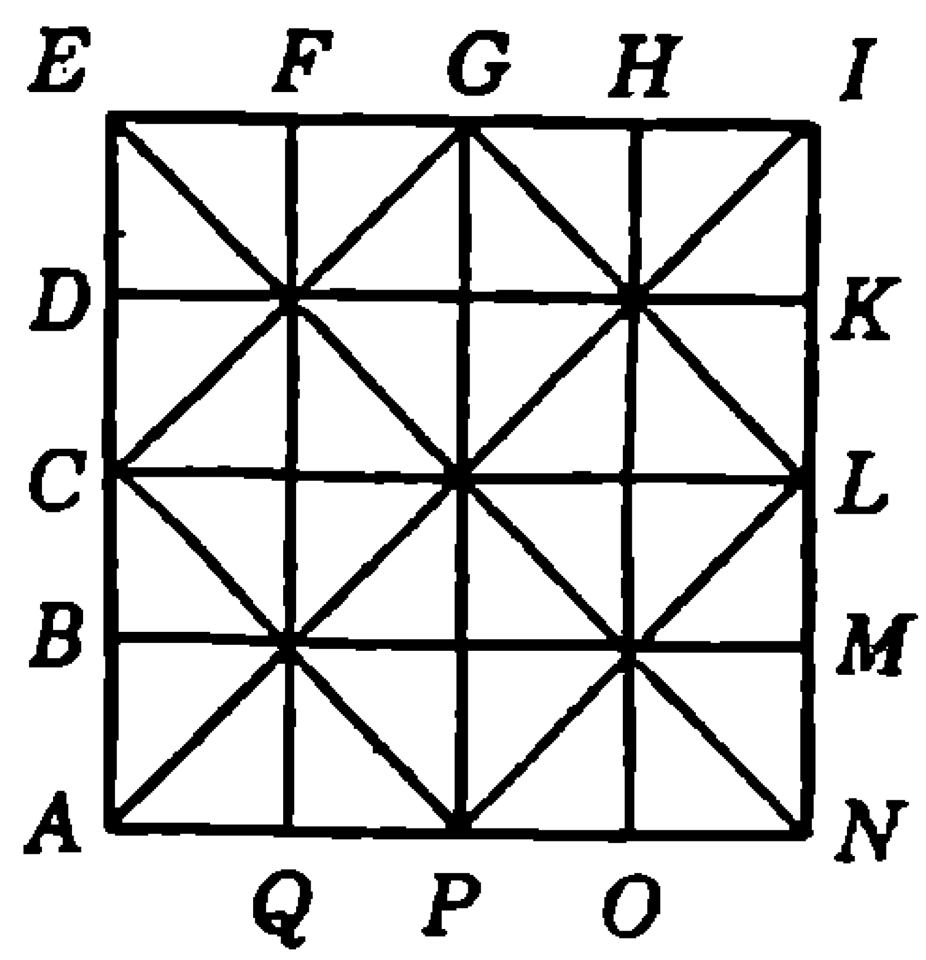
Hình 2-7



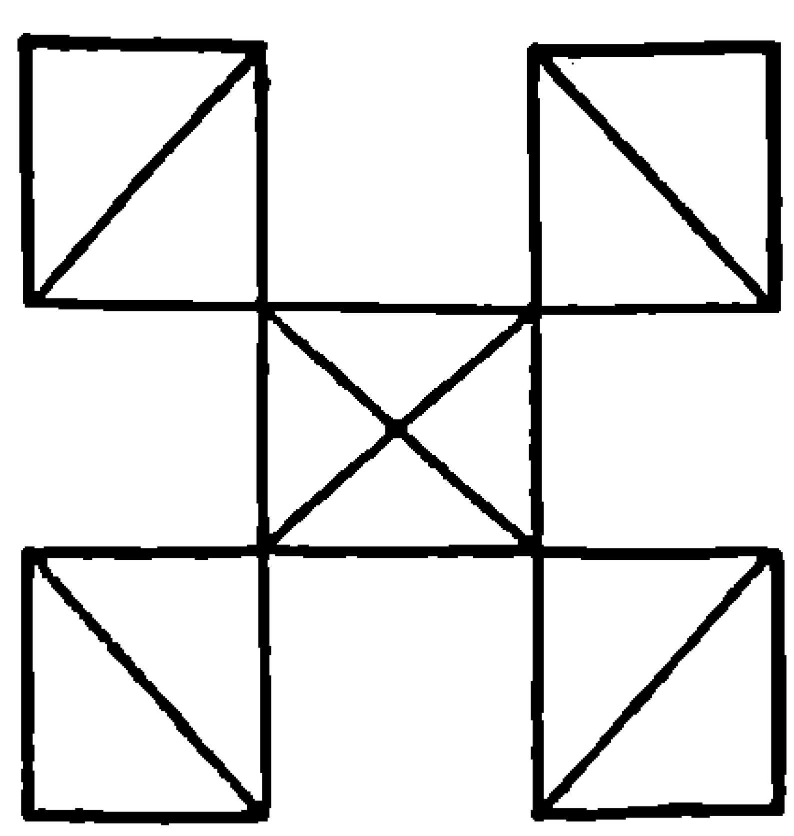
Hình 2-8



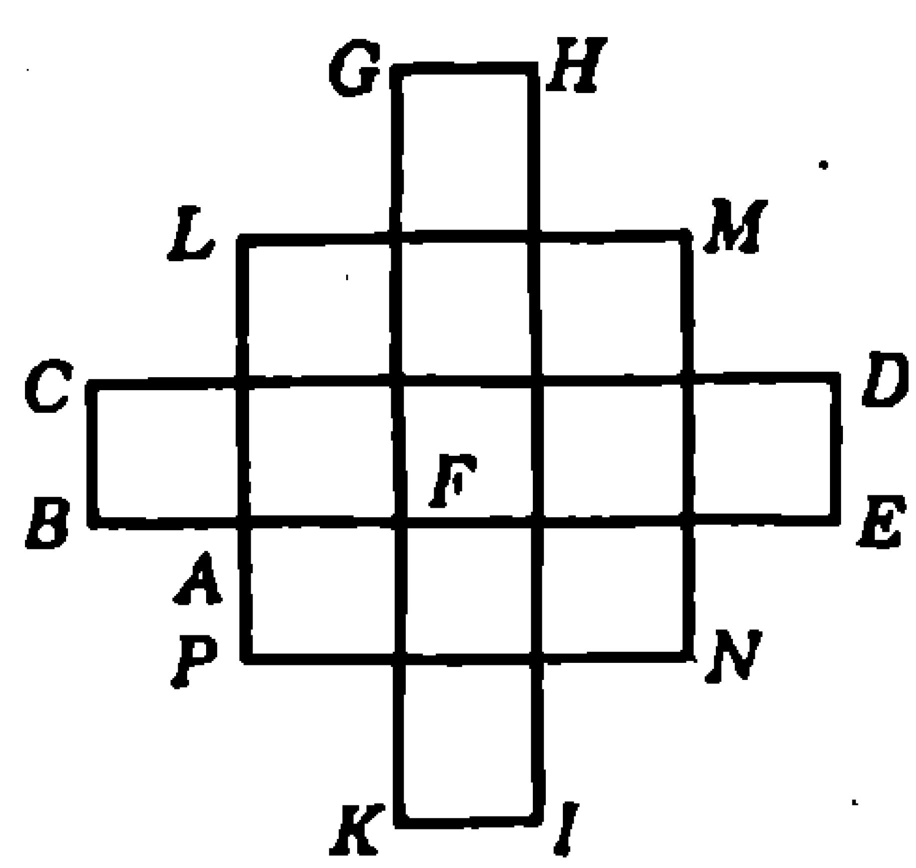
Hình 2-9



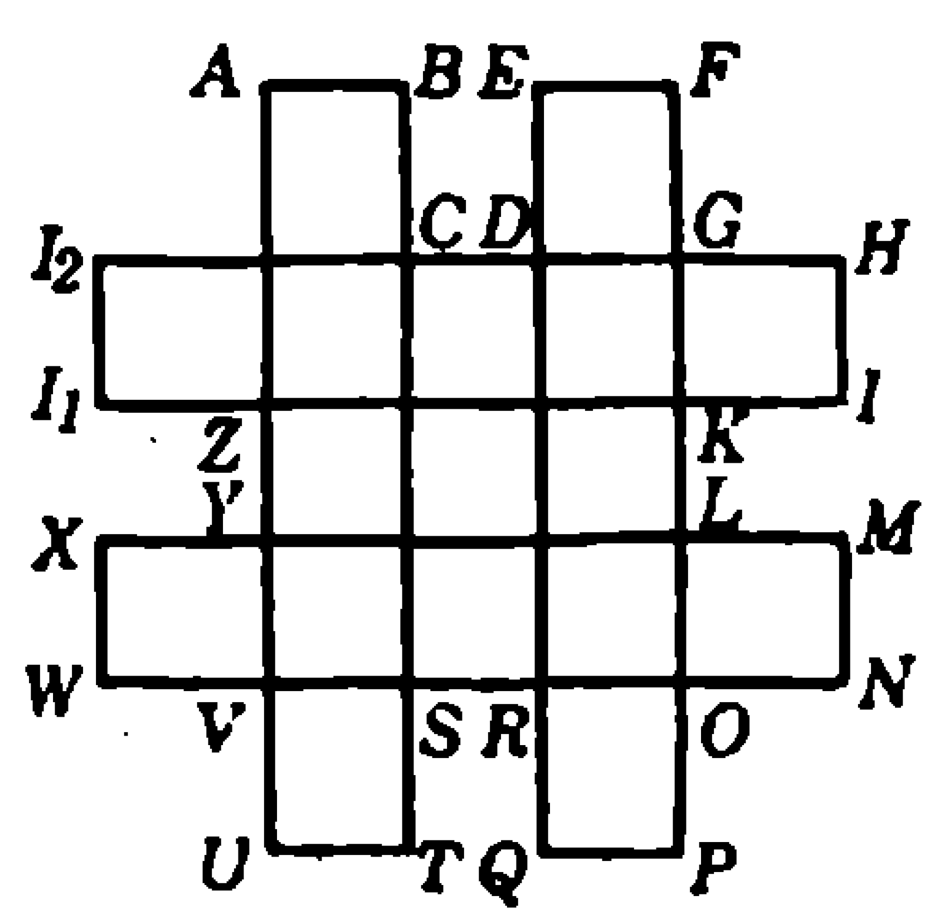
Hình 2-10



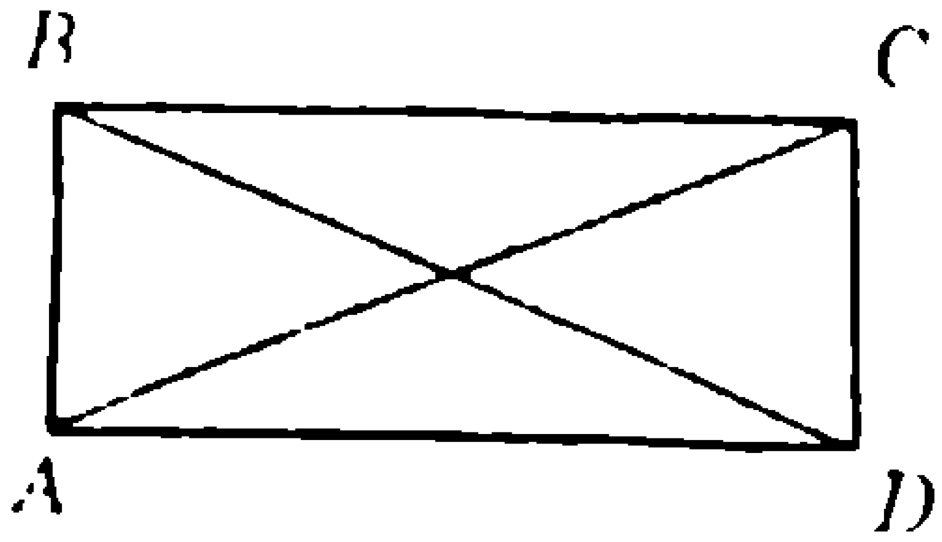
Hình 2-11



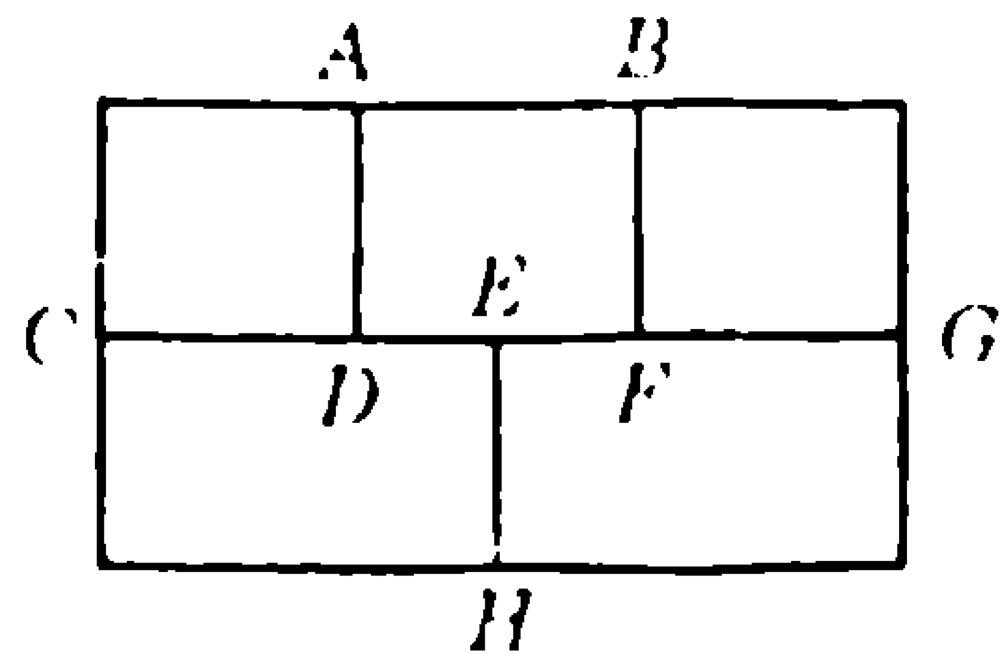
Hình 2-12



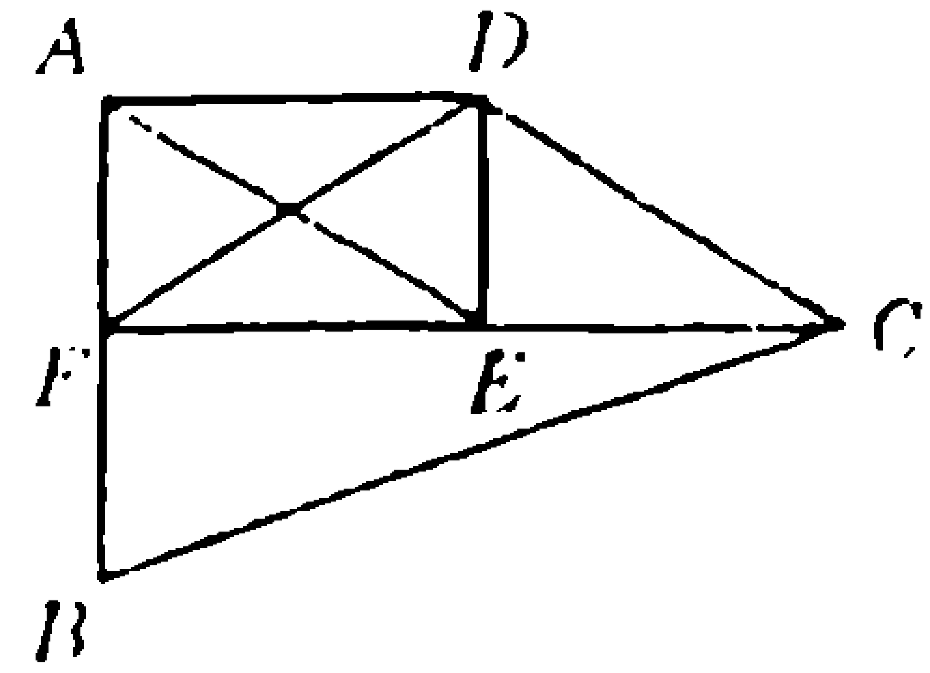
Hình 2-13



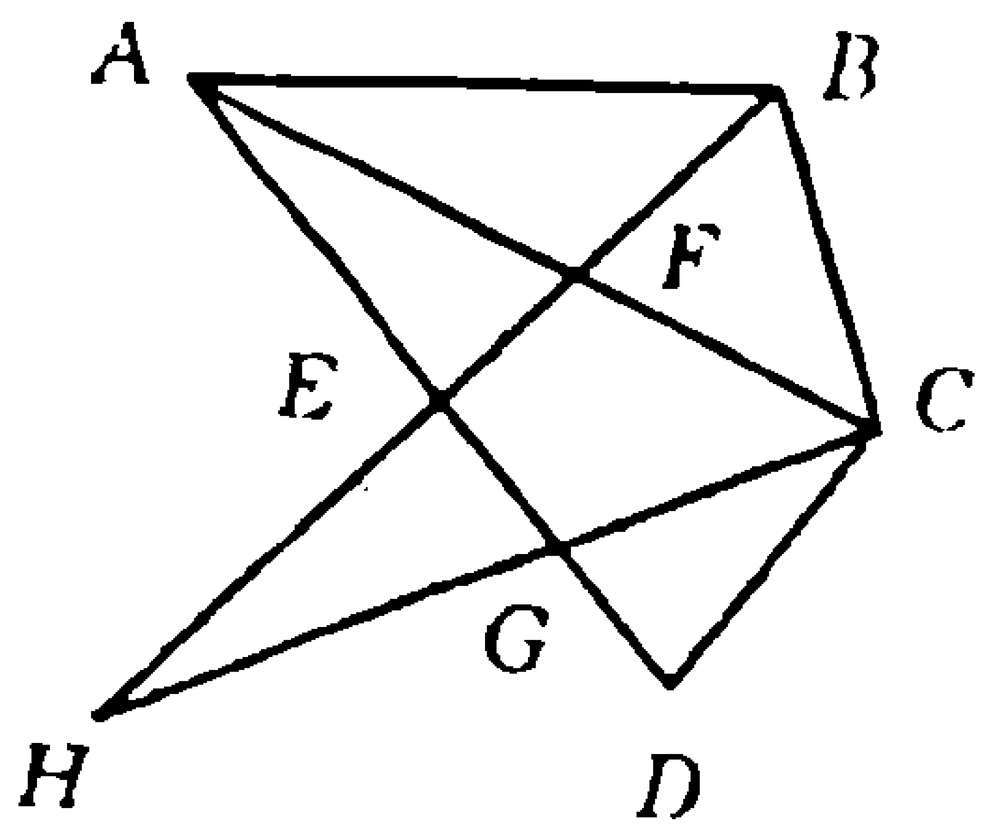
Hình 2-14



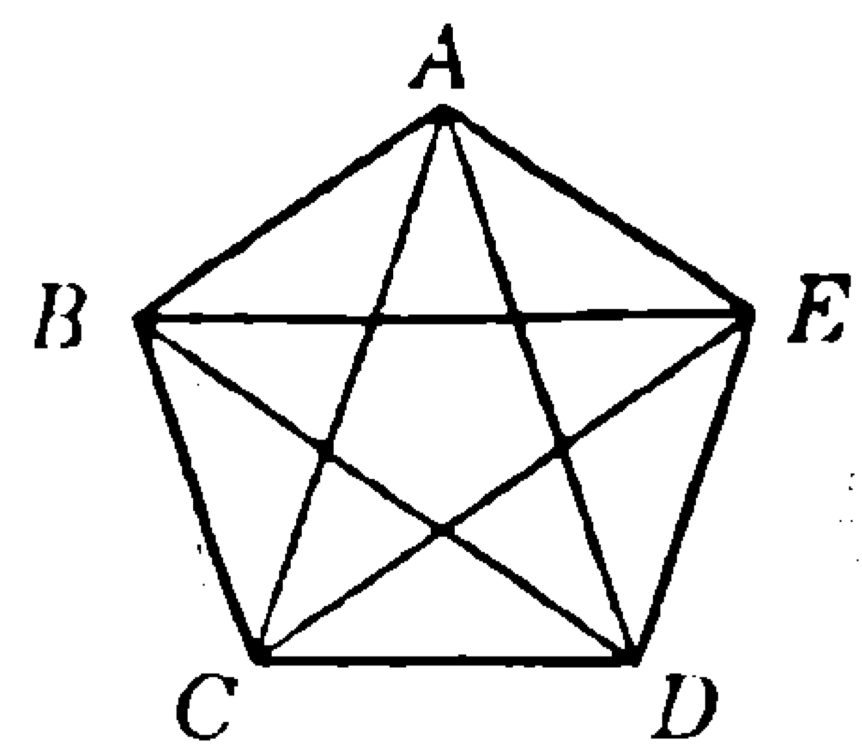
Hình 2-15



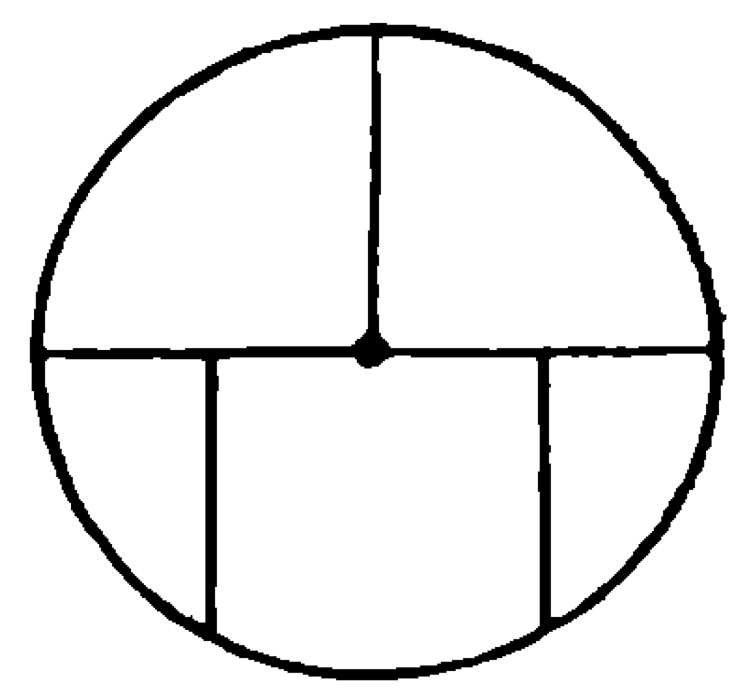
Hình 2-16



Hình 2-17

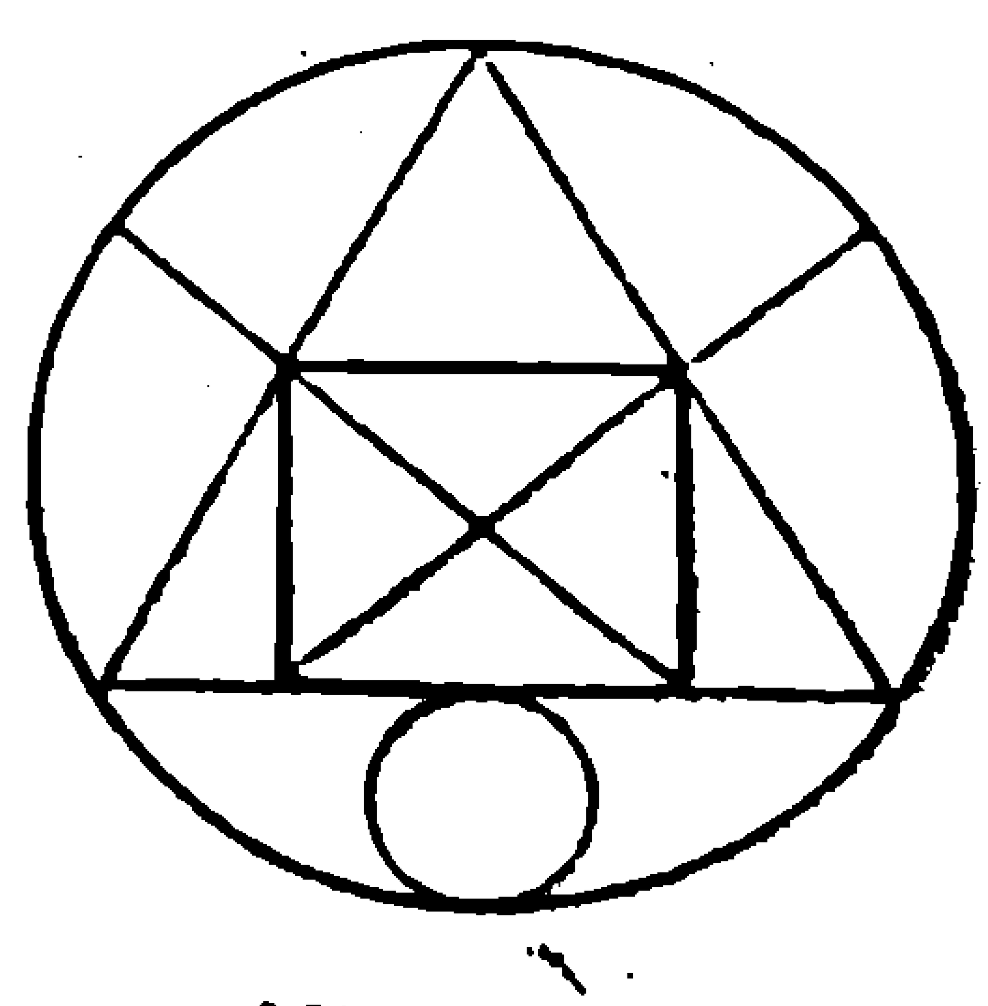


Hình 2-18



Hình 2-19

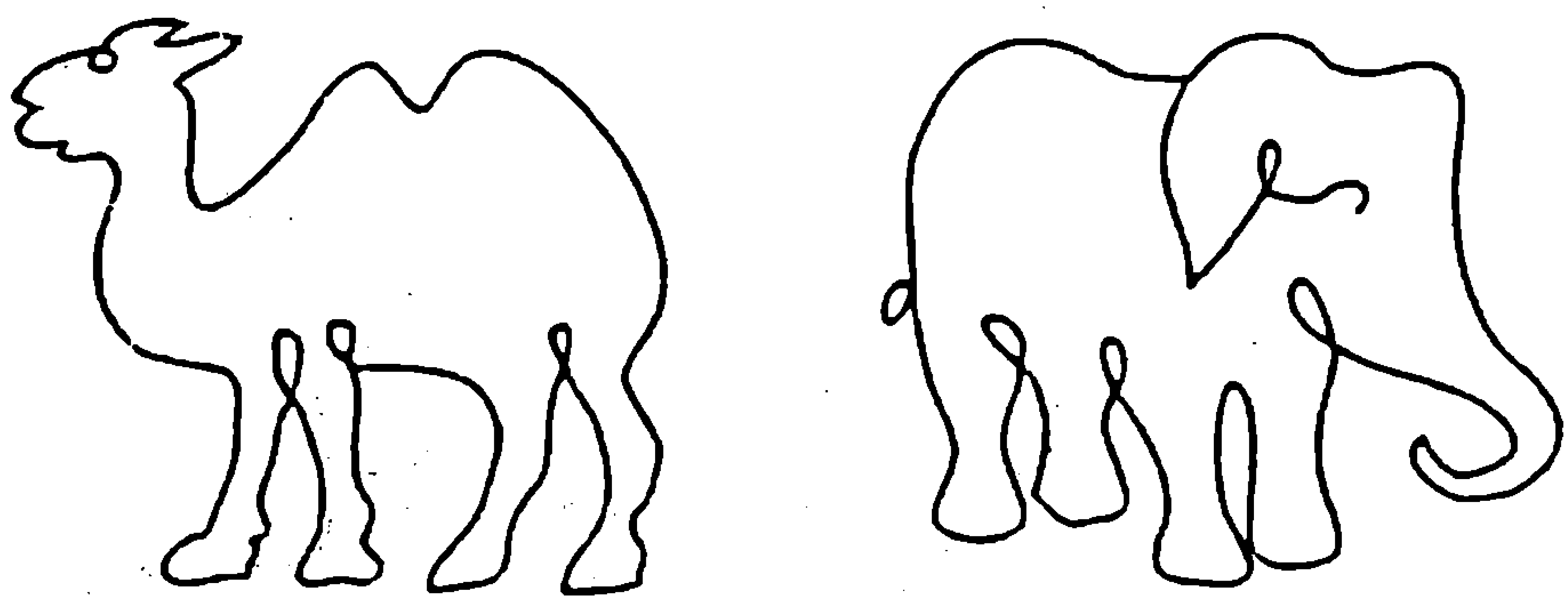
Từ bốn tính chất nêu trên, ta thấy có sáu hình (2-5, 2-6, 2-7, 2-12, 2-13 và 2-18) không có "đỉnh bậc lẻ" nên vẽ được một nét khép kín; ba hình (2-16, 2-17 và 2-20) có hai "đỉnh bậc lẻ" nên vẽ được bằng một nét (xuất phát từ một trong hai "đỉnh bậc lẻ" và kết thúc ở "đỉnh bậc lẻ" kia); hai hình (2-8 và 2-14) có bốn "đỉnh bậc lẻ" nên không thể vẽ được một nét (mà chỉ có thể vẽ được ít nhất là hai nét, do n = 2); ba hình (2-9, 2-15 và 2-19) có tám "đỉnh bậc lẻ" nên không thể vẽ được một nét (mà chỉ có thể vẽ được ít nhất là bốn nét, do n = 4); hình 2-11 có



Hình 2-20

mười hai "đỉnh bậc lẻ" nên cũng chỉ có thể vẽ được ít nhất là sáu nét, do n = 6; hình 2-10 có mười sáu "đỉnh bậc lẻ" nên cũng chỉ có thể vẽ được ít nhất là tám nét, do n = 8.

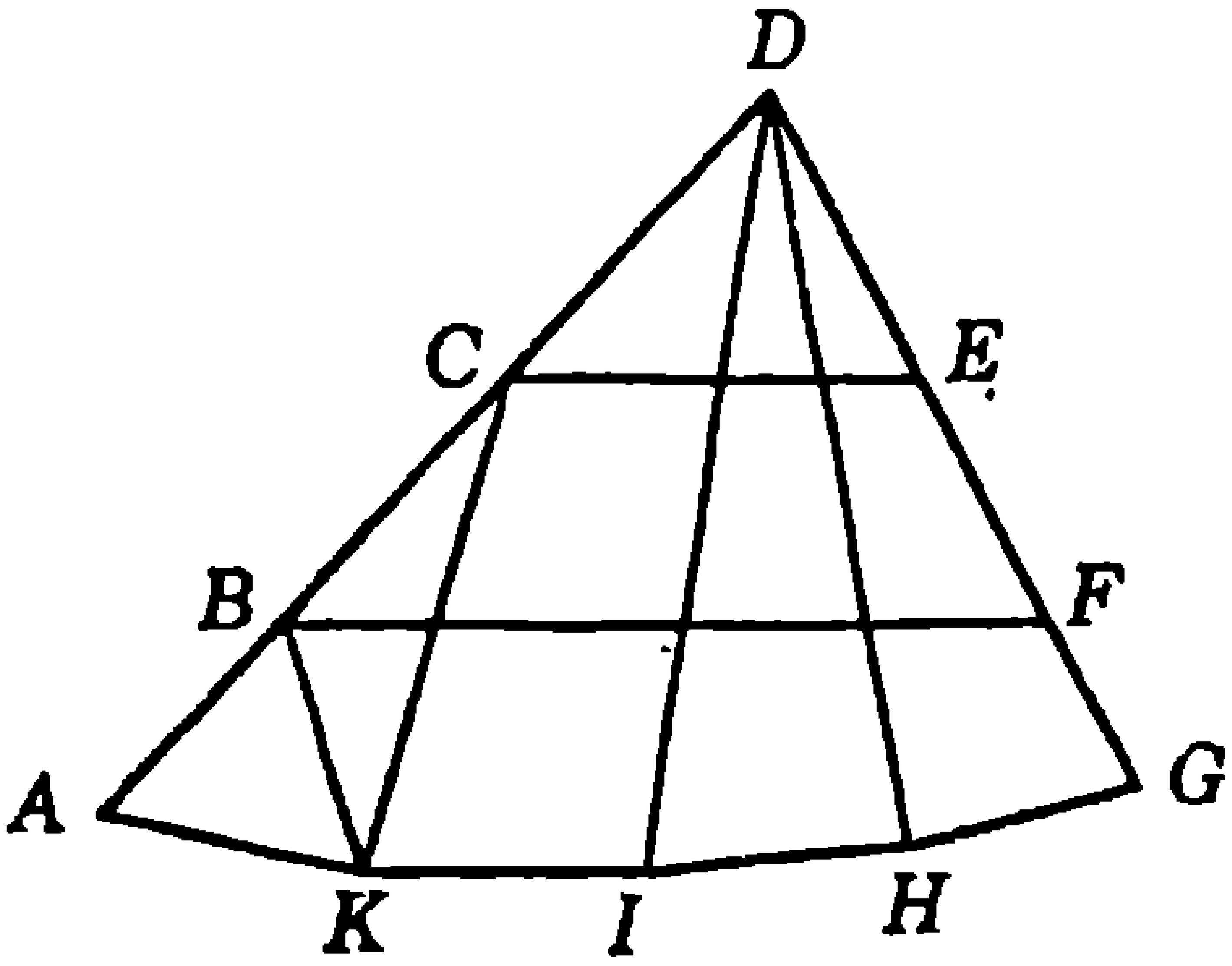
Hai con vật to lớn của thế giới động vật là lạc đà và voi (hình 2-21) đều có thể vẽ được bằng một nét. Hình lạc đà không có "đỉnh bậc lẻ", còn hình voi có hai "đỉnh bậc lẻ".



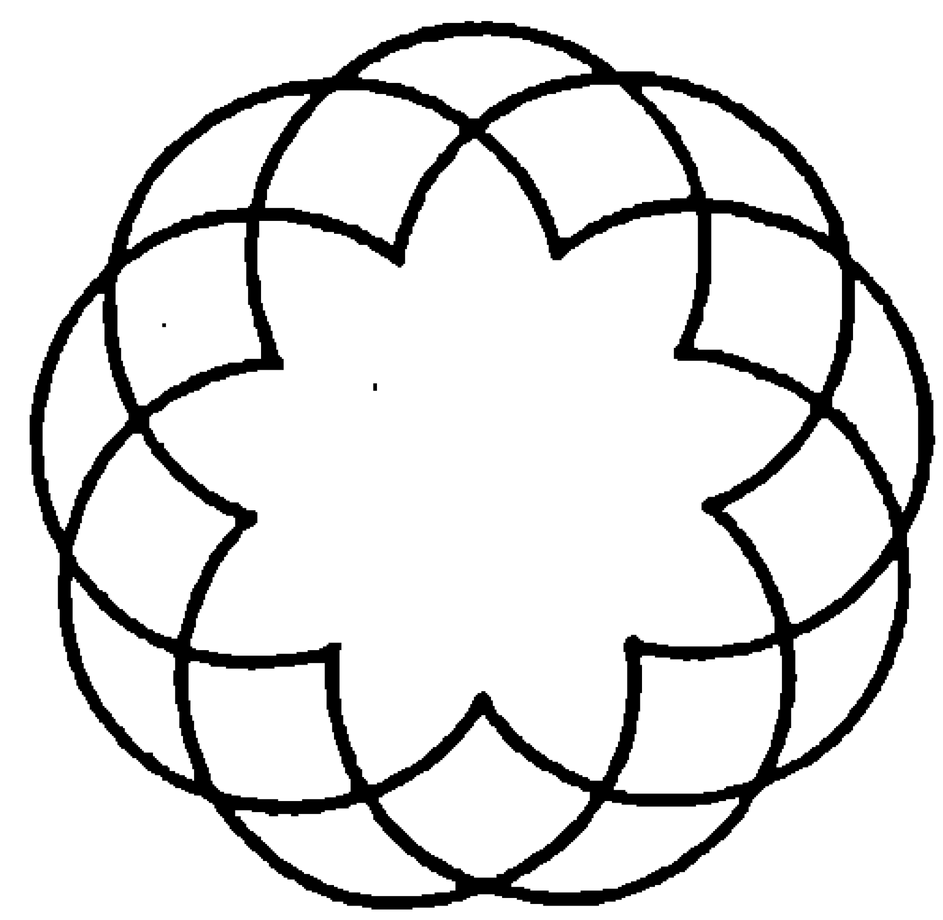
Hình 2-21

Đến đây chắc bạn đọc đã rõ là với mỗi mạng lưới thì cần phải vẽ ít nhất là mấy nét. Bốn tính chất của mạng lưới liên thông đã nêu ở trên giúp những ai muốn giải các bài toán loại này để giải trí, nhưng điều quan trọng là trong thực tế cũng gặp rất nhiều "bài toán vẽ một nét". Chẳng hạn, các nhân viên bưu điện đưa thư - báo, công nhân dệt đi tua thao tác máy, các đội tuần tra, các ôtô tưới nước cho các tuyến đường, đưa đón công nhân - học sinh,... đều cần phải đi theo hành trình hợp lý (ngắn nhất). Bài toán ở đây thường là "bài toán vẽ một nét đi và về" (có điều kiện "trở về chỗ cũ").

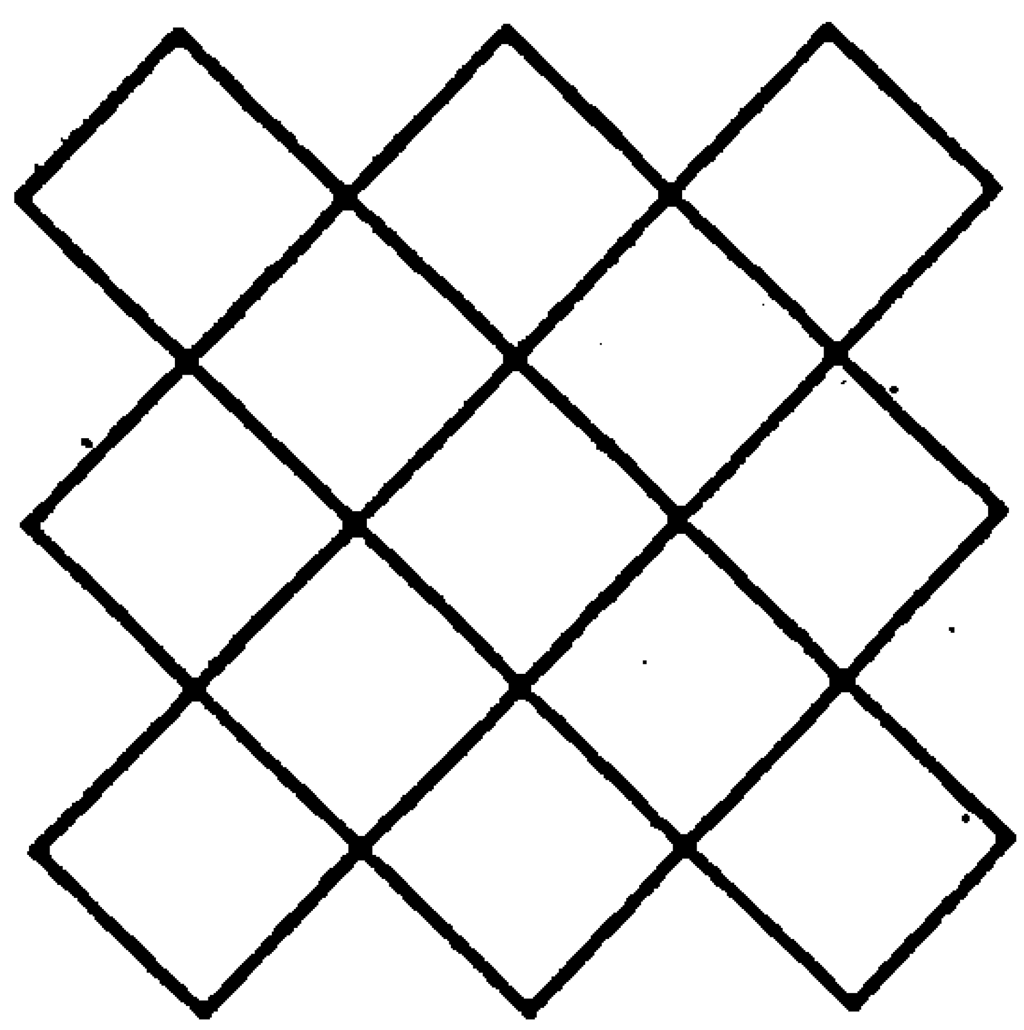
Bây giờ bạn đọc thử xem các mạng lưới sau đây thuộc loại nào?



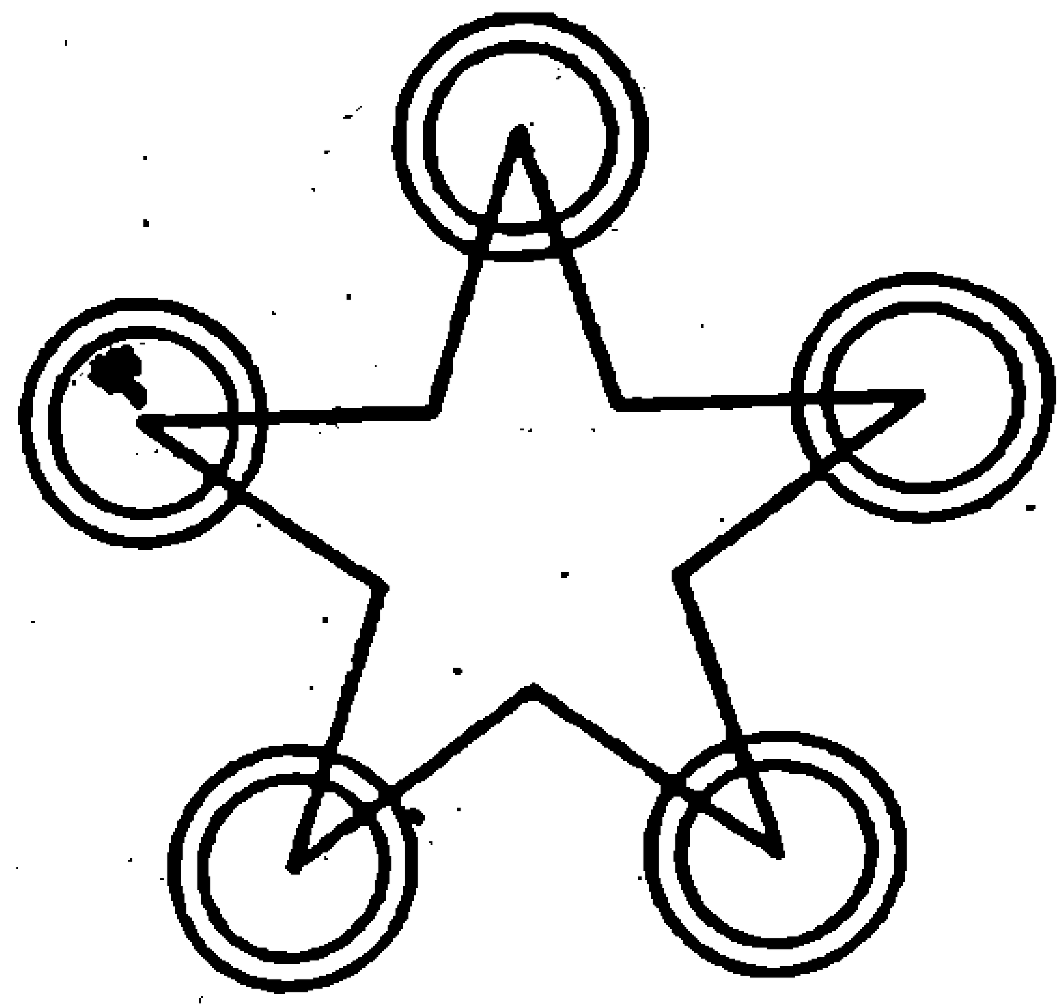
Hình 2-22



Hình 2-23

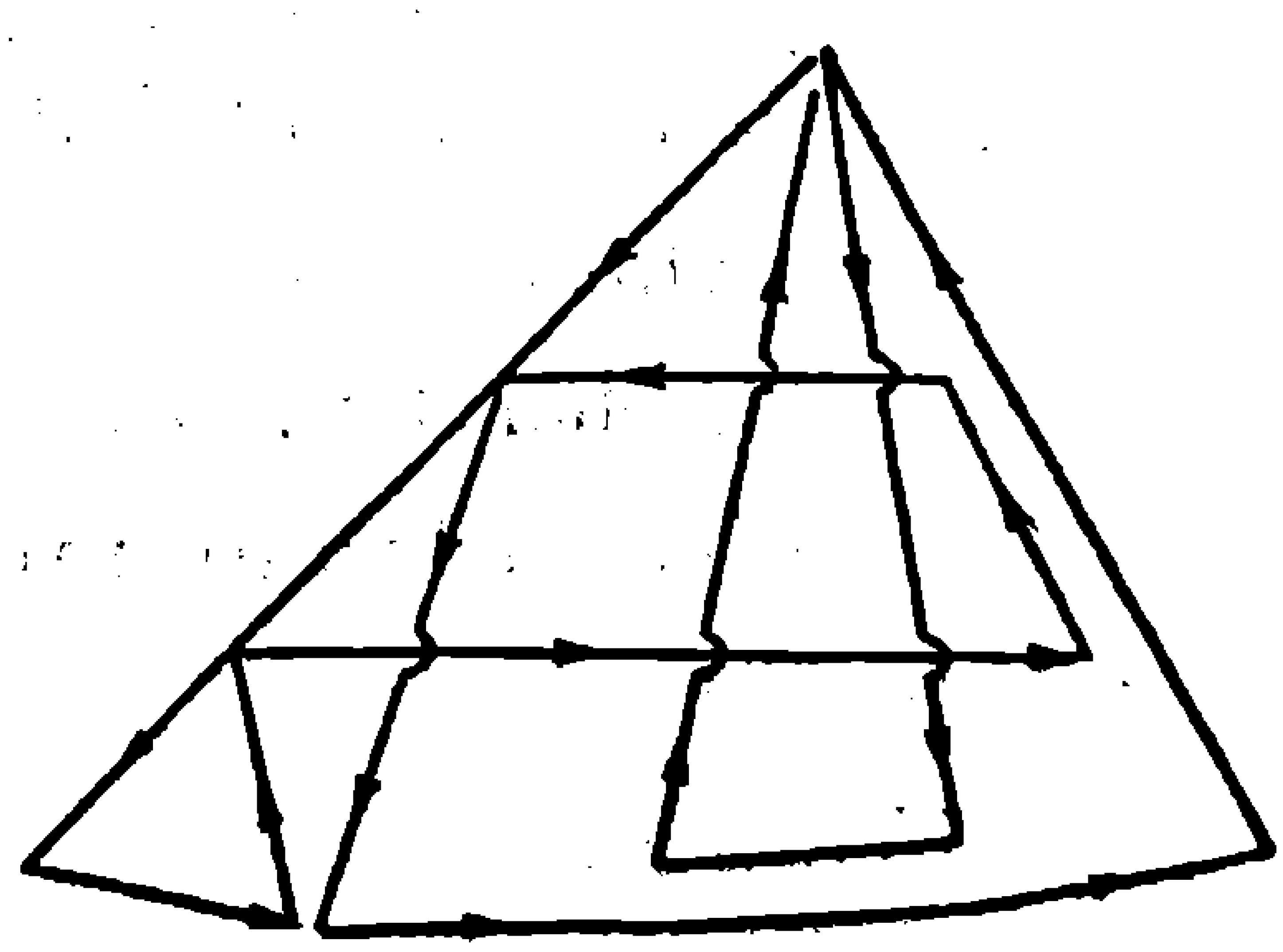


Hình 2-24



Hình 2-25

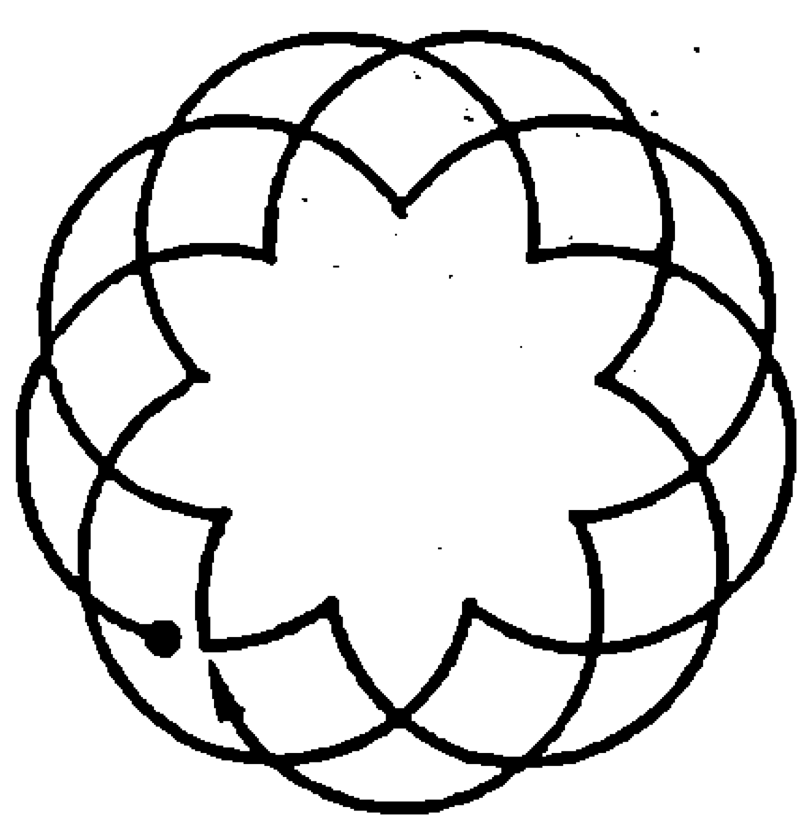
Trả lời: Hình 2-22 có bốn "đỉnh bậc lẻ" (E, F, H và I) nên chỉ có thể vẽ được bằng ít nhất là hai nét (n = 2). Nếu muốn vẽ một nét thì phải hai đoạn vẽ hai lần. Ta đã biết ở trên, những đoạn đi qua hai lần bao giờ cũng nối liền từng cặp "đỉnh



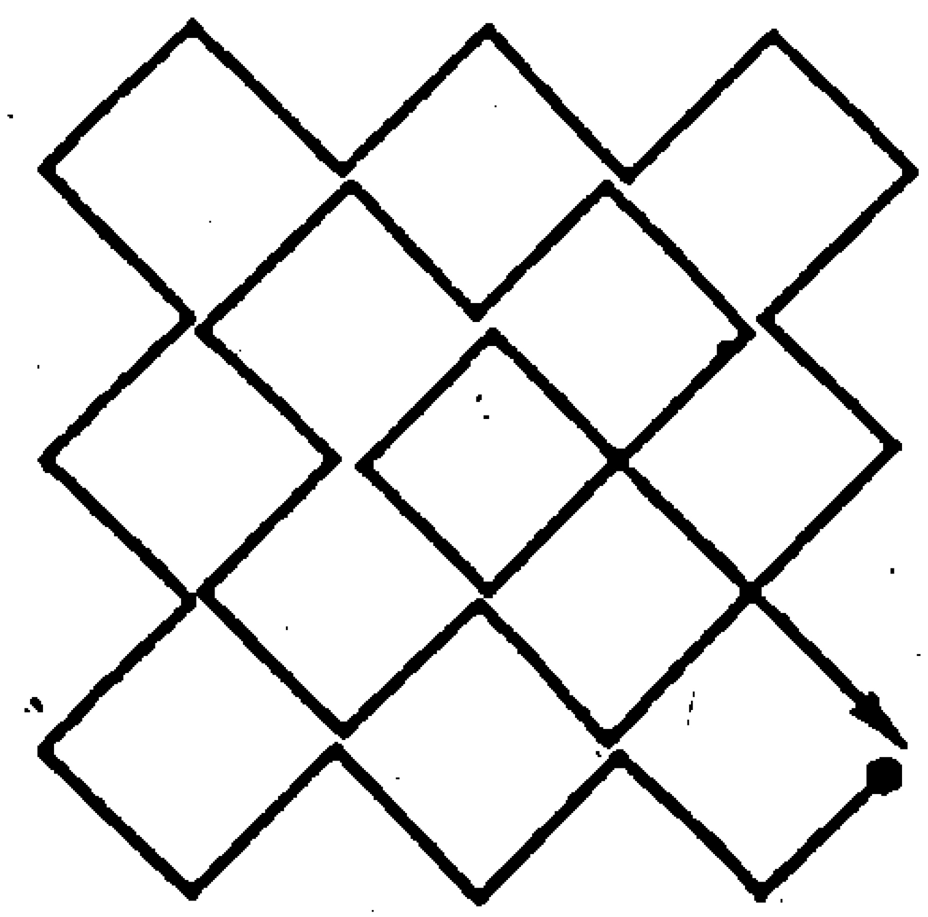
Hình 2-26

bậc lẻ". Vậy, vấn đề là chọn những đoạn nối liền từng cặp "đỉnh bậc lẻ" sao cho số các đoạn nối (kể cả số lần lặp) là nhỏ nhất. Theo cách đó, hành trình ngắn nhất với mạng lưới liên thông ở hình 2-22 như ở hình 2-26.

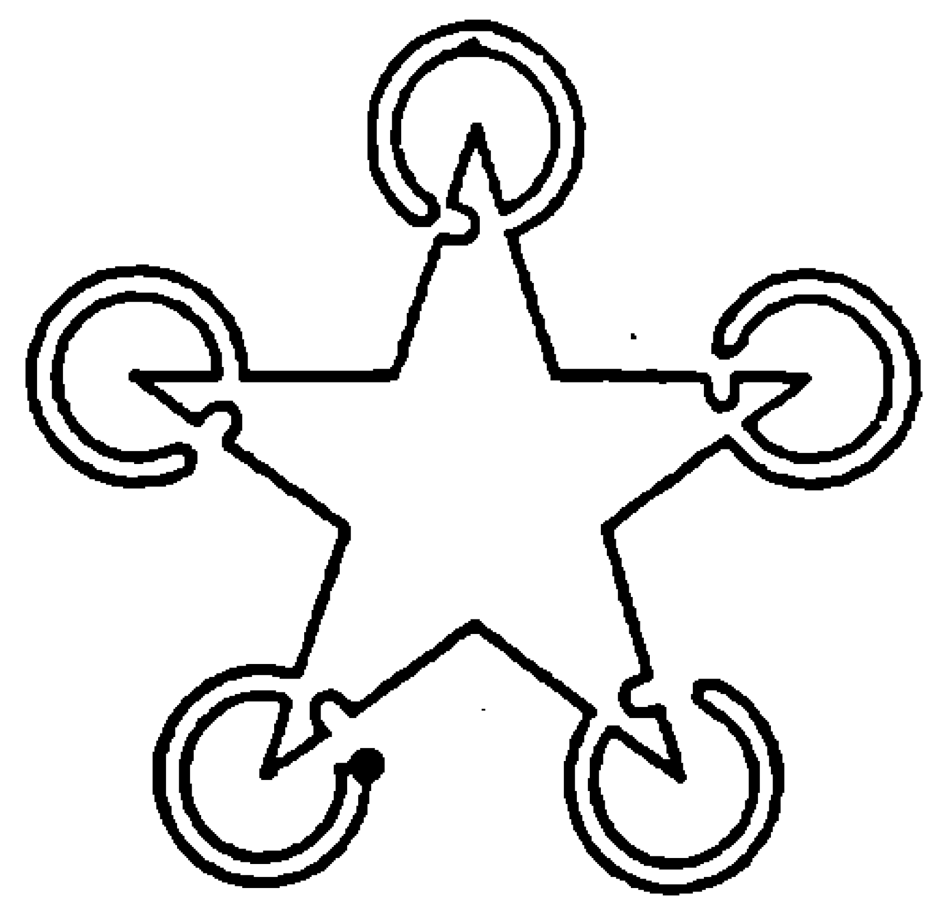
Ba hình 2-23, 2-24 và 2-25 đều vẽ được một nét, như ba hình 2-27, 2-28 và 2-29.



Hình 2-27

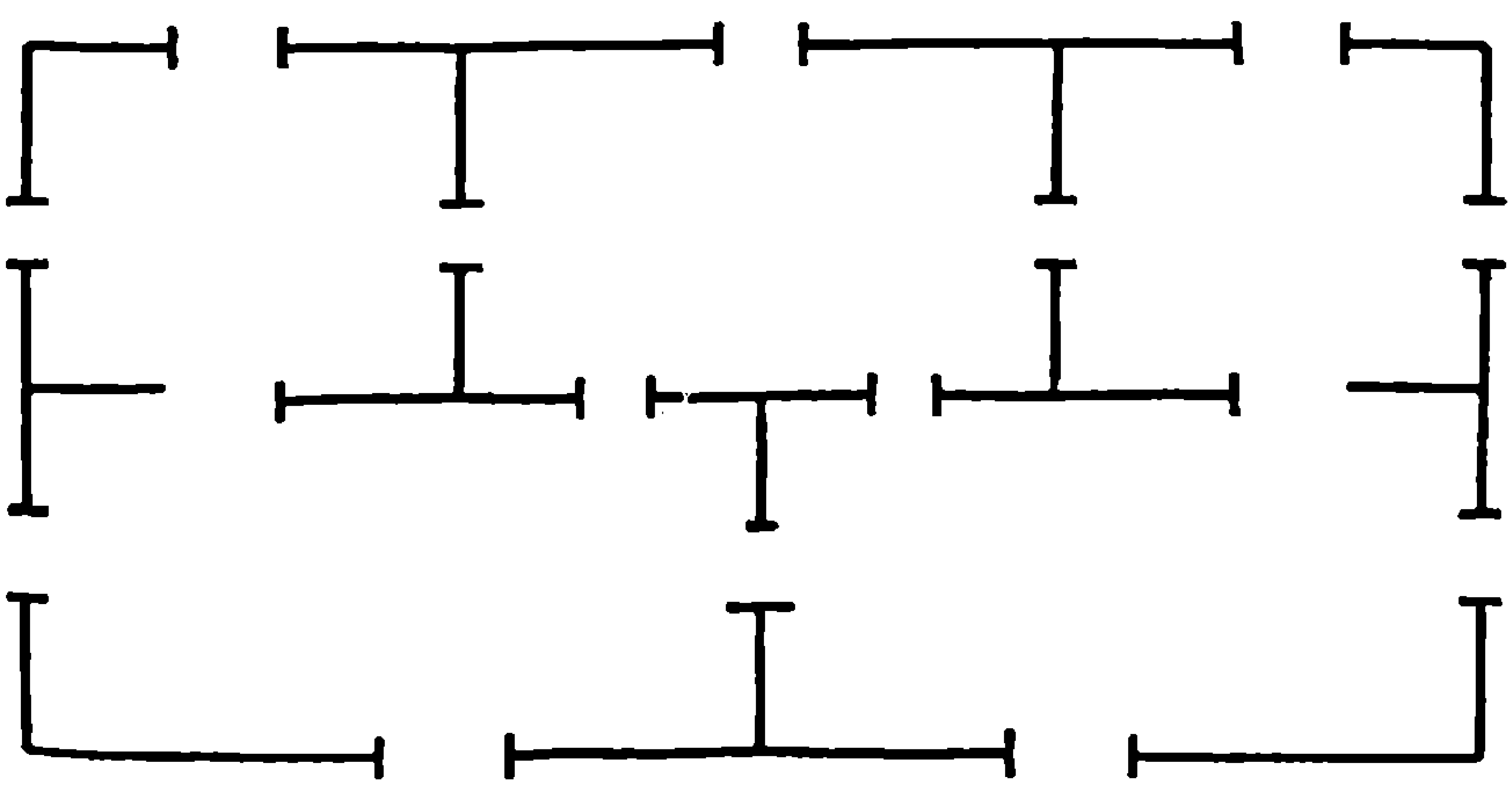


Hình 2-28



Hình 2-29.

Hình 2-30 biểu thị mặt bằng của một căn nhà với các buồng và cửa đi. Liệu có thể đi liên tục qua mỗi cửa một lần và chỉ một lần được không?



Hình 2-30

3. "CÂU ĐỐ" CỦA MÊ CUNG

Mê trận (trận mạc), mê lộ (đường) hoặc mê cung (công trình có hành lang và lối đi ngoắt ngoéo) sau đây được gọi là mê cung.

Năm 641 (năm Trinh Quan 14) đời Đường, thế nước cường thịnh, bốn bể thanh bình, quốc vương nước Thổ Phiên là Tùng Tán Cán Bố sai sứ thần Tạng vương đến kinh đô Trường An của nhà Đường cầu thông gia với hoàng đế Đường Thái Tông (Lý Thế Dân (626 - 649)). Vua Đường là người tinh tế, ông hiểu rằng nếu Hán Tạng kết giao thông gia được là một việc tốt cho biên giới láng giềng. Nhưng cần phải kiểm tra tài năng của sứ thần Tạng vương. Thế là vua Đường đã nêu ra mấy câu hỏi yêu cầu sứ thần Tạng vương trả lời. Không ngờ sứ thần của Tạng vương trả lời các câu hỏi của vua Đường Thái Tông một cách trôi chảy, làm cho vua Đường rất hài lòng và chỉ cần một cuộc thử thách cuối cùng nữa là quyết định được.

Một buổi tối, vua Đường mở tiệc chiêu đãi sứ thần Tạng vương ở cung vua. Tiệc xong đột nhiên vua Đường đưa ra yêu cầu là để sứ thần Tạng vương tự mình đi ra khỏi cung. Cung thất lúc này đã được bố trí đặc biệt, đường đi, lối lại rối mù khó phân biệt. Vua Đường muốn xem sứ thần Tạng vương trong trạng thái say rượu có còn đủ trí tuệ để thoát ra khỏi cảnh ngộ mê cung không.

Không ngờ sứ thần Tạng vương thông minh, khi vào cung đã để ý quan sát xung quanh và đánh dấu lại. Do vậy, khi về đã ra khỏi cung một cách thuận lợi.

Sứ thần Tạng vương bằng tài trí của mình cuối cùng đã giành được sự tin cậy của vua Đường và vua Đường Thái Tông đã nhận lời gả công chúa Văn Thành xinh đẹp và hiền thục cho Tùng Tán Cán Bố.

Xưa nay mê cung được nhiều người bàn luận, được coi là tượng trưng của thông minh và trí tuệ!

Trong "Tam quốc diễn nghĩa" có một đoạn kể về đại tướng Đông Ngô là Lục Tốn sau khi đánh tan 70 vạn quân Tây Thục ở Hào Đình, liền đưa quân vượt sông Trường Giang (Dương Tử) đuổi theo chúa Thục là Lưu Bị. Qua ải Kỳ Quan gần bến Ngư Phúc, quân Đông Ngô thấy dãy tường đá xếp ngổn ngang. Lục Tốn sợ có phục kích bèn hạ lệnh cho quân sĩ dừng lại tìm thổ dân để hỏi. Thổ dân thưa rằng: Ngày trước Gia Cát Lượng (Khổng Minh, 181 - 235) từ Kinh Châu về Thục, khi qua đây đã sai quân khuân đá xếp thành trận đồ kỳ quái mà kẻ địch đi vào thì không tìm được lối ra, đành chịu chết, cho nên gọi là "mê lộ".

Nghe xong, Lục Tốn có vẻ không tin, bèn cùng vài chục quân sĩ xông vào. Quả nhiên, vừa vào khỏi cửa thì cả quân lẫn tướng đi loanh quanh mãi đến tối vẫn chưa tìm được đường ra. Lúc đó Lục Tốn mới kinh hoàng, phục tài Gia Cát Lượng và tưởng rằng mệnh mình đã hết.

May sao, bỗng bên đường xuất hiện một cụ già, râu tóc bạc phơ. Cụ gọi mọi người lại và chống gậy dẫn đường ra. Lục Tốn muốn biết rõ ân nhân của mình là ai, bèn hỏi. Cụ già từ tốn đáp: "Ta là Hoàng Thừa Ngạn, nhạc phụ Gia Cát Lượng. Mê lộ này là do con rể ta làm ra để ngăn chặn bước tiến của quân Đông Ngô. Nó gồm 8 cửa nên gọi là "Bát quái trận". Hôm nay ta đang đứng trên núi, thấy tướng quân và binh sĩ vào cửa, không nỡ để tướng sĩ bị hãm hại, nên ta vội xuống để chỉ đường ra". Lục Tốn nghe xong vô cùng cảm phục và cúi đầu bái tạ.

Khi trở về nước, Lục Tốn đã thuật lại câu chuyện và kể rằng: "... chỉ thấy đá lạ cheo leo, chạc cây tựa kiếm, hoành sa lập thổ, chất chồng như núi, không có đường ra,...".

Về sau Vệ Công đã sửa chữa lại mê cung này thành "Lục hoa trận".

Mê cung trong thần thoại Hy Lạp đã nhắc đến cách nay hơn 4000 năm.

Mê cung mà con người biết được là mê cung của vua Minos. Truyền thuyết kể lại rằng: Minos là con trai của thần Zot và nàng Erov, lên ngôi trị vì trên đảo Crete. Một lần Minos đã làm thần biển Podeidong nổi giận vì không dâng cho ông ta con bò tuyệt đẹp như đã hứa. Thần Podeidong đã trả thù bằng cách làm nàng Padiphai vợ vua Minos tăng dục vọng vô độ trái với tự nhiên. Nàng đã ăn nằm với một con bò sinh ra Monotor mình người đầu bò. Để giấu con quái vật Monotor, Minos đã cho xây dựng mê cung Labiranht vào khoảng năm 1600 trước Công nguyên trong hoàng cung Knos. Mê cung này có hành lang 8 lần đi vòng quanh trung tâm tạo nên các vòng tròn thu nhỏ dần. Mỗi năm nhà vua bắt các chư hầu phải nộp 7 chàng trai và 7 cô gái để Monotor ăn thịt. Tình trạng này đã kéo dài gần 10 năm, khi đến lượt xứ Athen phải cống nộp, hoàng tử Thesens anh hùng của xứ Athen muốn vào mê cung để diệt quái vật, trừ hoạ cho muôn dân, hoàng tử đã vào mê cung cùng với đoàn người cống vật. Trước khi vào mê cung, đoàn người của Athen phải ra mắt triều đình. Ở đây, Thesens được gặp công chúa Ariadno. Công chúa đem lòng yêu Theseus nên đã tìm đến Daedalus hỏi kế giúp chàng khỏi lạc đường trong mê cung. Theo lời Daedalus, Ariadne đưa cho Theseus một cuộn chỉ đỏ để đánh dấu đường vào. Nhờ vậy mà sau khi giết được Minotaur, Theseus đã trở ra khỏi mê cung, không bị lạc đường. Sau đó công chúa Ariadne và Theseus sống bên nhau hạnh phúc trọn đời.

Ở Ai Cập cổ đại cũng có khu nhà gồm 3000 phòng bố trí hành lang và lối đi theo mê cung.

Ở Anh, mê lộ nổi tiếng nhất là vườn nghỉ của Rodamun, được nhà vua Henri II cho xây dựng tại công viên Vunxtoc vào thế kỷ XII. Nhà vua đã giấu nàng Rodamun xinh đẹp ở đây, để hoàng hậu Eleono Acvitanxki không vào được. Nhưng hoàng hậu đã vào được mê cung và buộc Rodamun phải uống thuốc độc tự tử và sau đó cũng nhờ cuộn chỉ nên trở ra được. Câu chuyện tình bi thảm này đã là nguyên mẫu cho nhiều tác phẩm thơ, ca, kịch, trong đó có bài ca "Rodamun" của Swinburne rất được ưa thích.

Ở Anh còn có mê lộ cây xanh nổi tiếng xây dựng năm 1690 bên cạnh cung điện Vinghen Oranxki ở Hempston Cooc của thủ đô London.

Vùng Ban Tích và Nga có hơn 500 mê cung rất cổ, được xây bằng đá, đường kính 7-18m, vào khoảng thế kỷ XIII đến thế kỷ XVII.

Từ lâu nước Pháp đã nổi tiếng với vườn mê cung rộng lớn mà ai bị lạc vào đó thì phải mất nhiều giờ, thậm chí cả buổi mới có thể tìm được lối ra.

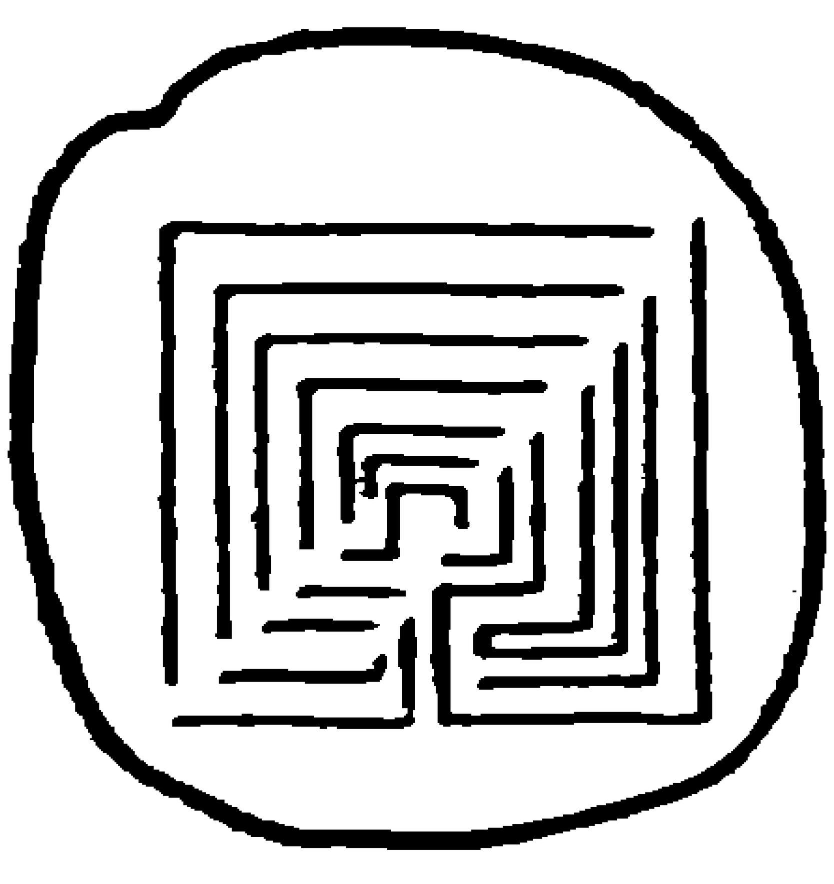
Kỷ lục về vườn mê cung rộng nhất châu Âu đến (năm 2002) thuộc về một trang trại của Maurice Flipot tại vùng Cordes sur Ciel ở trung nam nước Pháp. Vườn này rộng khoảng 12 000 m^2 với 762 lối đi dọc theo những hàng cây cao 1,5m được tỉa cắt gọn gàng. Theo M.Flipot thì một người bình thường phải mất 10 giờ mới tìm được lối ra. Nhiều khách đã đến vườn này để tham quan, thử sức suy đoán và lòng kiên nhẫn.

Ở Mỹ, mê lộ duy nhất bằng cây xanh còn tồn tại đến ngày nay, do các hội viên giáo hội Tin lành gốc Đức ở thành phố Garomonhia (Bang Indiana) tạo ra. Mê lộ này được xây dựng lại vào năm 1941 nhưng đáng tiếc là sơ đồ gốc bị mất nên phải xây dựng lại theo sơ đồ hoàn toàn mới.

Từ thời Cổ Đại người ta đã xây dựng rất nhiều mê cung ở hầu khắp các nước, đặc biệt là ở châu Âu. Sau đây là một số mê cung đã được phát hiện.

Đã đào được mê cung (ở hình 3-1) giống như vân tay người, đó là mê cung của người Tổ Lỗ (Nam Phi); hình 3-2 là mê cung trên đồng tiền đào được ở đảo Colito của Hy Lạp; hình 3-3 là mê cung trên bình rượu đào được ở Italia. Hình 3-4 được phát hiện ở di chỉ thành Pompei. Thành Pompei là một thành phố cảng khá trù phú và phồn thịnh của La Mã cổ đại, được xây dựng khoảng thế kỷ VIII trước Công nguyên. Ngày 24/8/79, núi lửa Vesuvio hoạt động làm cho cả thành phố Pompei bị chôn vùi dưới tầng tro bụi dày 6 mét. Từ giữa thế kỷ XVIII các nhà khảo cổ đã bắt đầu khai quật di tích Pompei, làm cho thành phố này nhìn thấy lại ánh sáng.

Hình 3-1



Hình 3-2

Hình 3-3

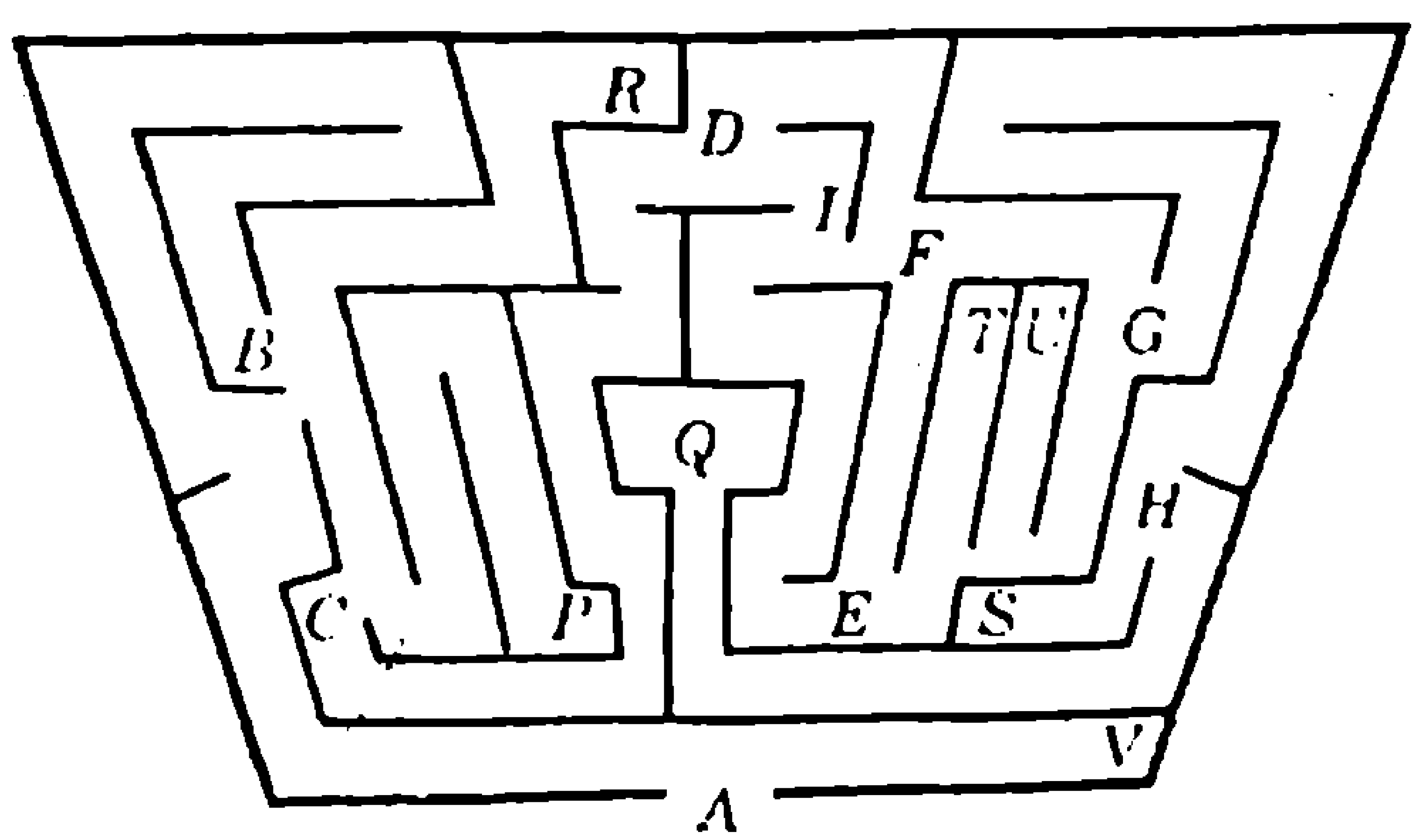
Hình 3-4.

Những câu chuyện kể trên tuy khác nhau về hình thức nhưng có cùng một nội dung toán học. Việc tìm đường đi trong mê cung là một bài toán của *lý thuyết đồ thị*. Trong một mê cung cho hai điểm A và B, hãy tìm đường đi từ A đến B?

Trong "Bát quái trận" của Gia Cát Lượng thì A là cửa vào, B là cửa ra, còn trong mê cung Minos thì A là cửa vào, B là chỗ đứng của Minotaur. Vấn đề của Lục Tốn, của Theseus hoặc của hoàng hậu E.Acvitanxki là tìm xem từ A có thể đến được B hay không, và nếu đến được thì bằng con đường nào? Nói cách khác, lời giải của "câu đố" của mê cung là như thế nào?

Nếu biết trước sơ đồ của mê cung thì "câu đố" có thể giải quyết một cách tương đối thuận lợi: chỉ cần gạch bỏ tất cả các đoạn đường cụt, sau đó sẽ còn lại các đường dẫn đến mục tiêu (B).

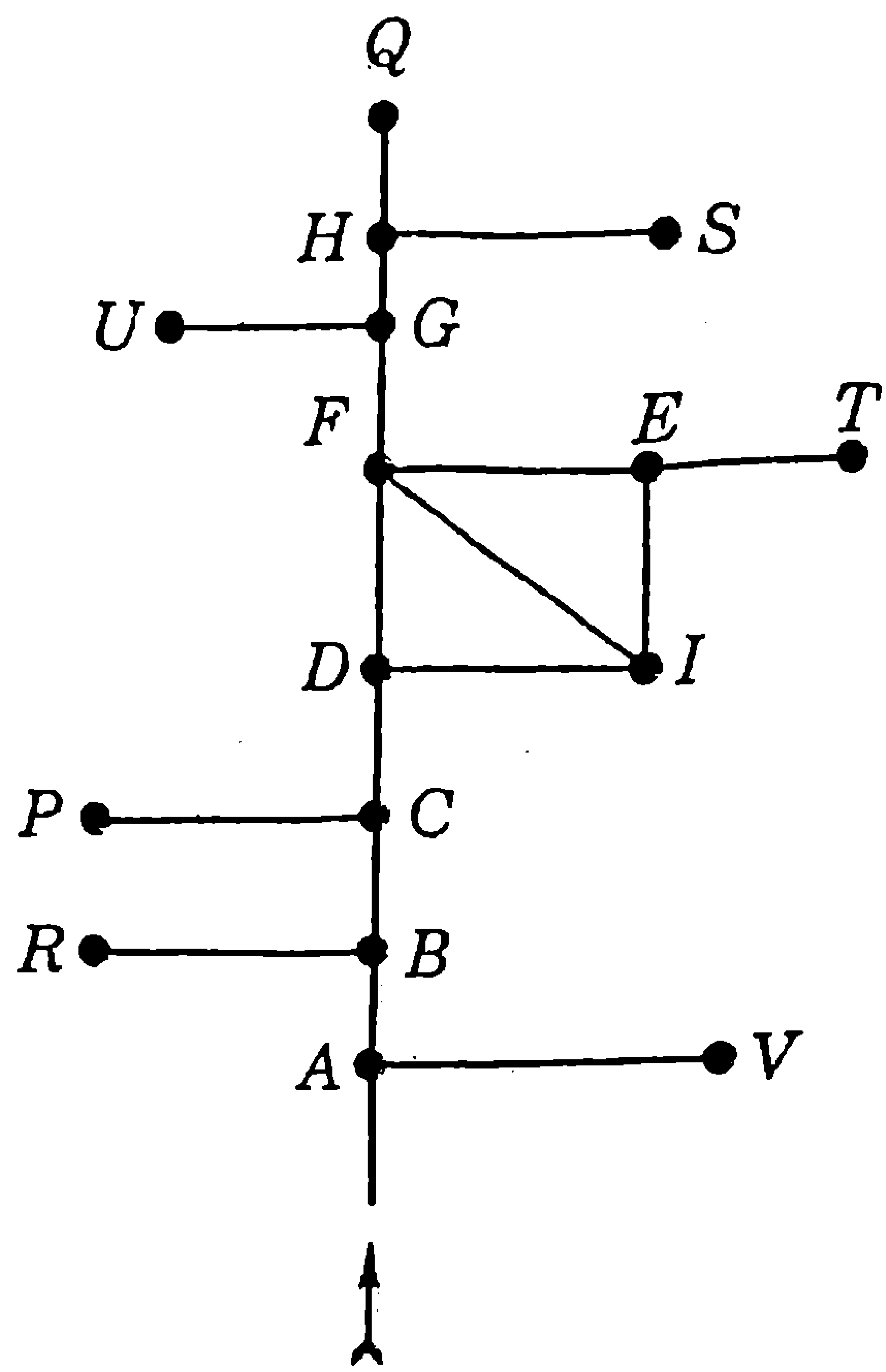
Chẳng hạn, chúng ta lấy mê cung Hempston Cooc đã nói ở trên làm ví dụ (hình 3-5), trong đó A là cửa vào, nét liền biểu thị hàng rào cây xanh kín, khe hở biểu thị đường đi. Tại trung tâm Q của mê cung có hai cột cao, dưới chân cột có ghế tựa cho du khách ngồi nghỉ chân.



Hình 3-5

Giống như "Bài toán bảy chiếc cầu" (mục 2), ta dùng các đường cung biểu thị tất cả các tuyến đường trong mê cung này thì có thể được sơ đồ như ở hình 3-6.

Vấn đề bây giờ là: làm sao xuất phát từ điểm A đi đến trung tâm Q của mê cung, hoặc từ Q trở lại cửa A? Có điều là đường thông từ A đến Q không thẳng tắp như ở hình 3-6, mà trên thực tế nó quanh co, khúc khuỷu, quay đi lượn lại. Khi đi nếu không thận trọng sẽ chui ngay vào ngõ cụt hoặc loanh quanh trong một khu vực nào đó, thậm chí còn quay về nơi xuất phát.



Hình 3-6

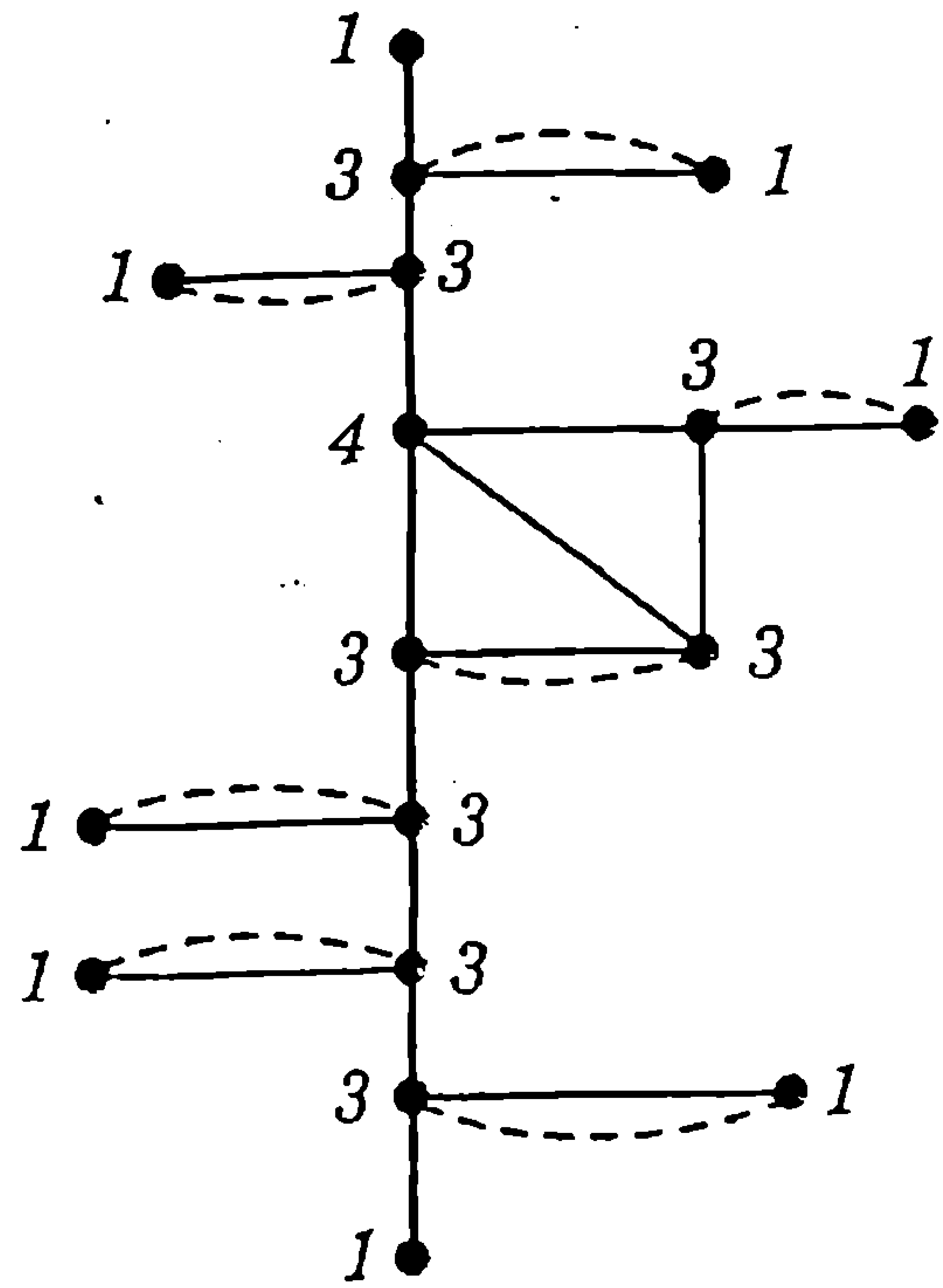
Có một tình huống gần như ngoại lệ, tức là mê cung có thể do "một nét vẽ" nối liền. Lúc này chỉ cần không đi trùng lặp là dễ dàng ra khỏi mê cung. Khi đó coi như đã giải quyết xong "câu hỏi" của mê cung. Nhưng nếu mê cung chỉ có như vậy thì bản thân nó cũng sẽ mất đi hàm ý "mê" rồi.

Trong thực tế mê cung thường phức tạp hơn nhiều. Chẳng hạn, mê cung ở hình 3-5, ngoài đỉnh F ra hầu như đều là "đỉnh bậc lẻ". Do đó, không phải bằng một nét, cho dù bằng năm sáu nét cũng khó có thể nối liền.

Tuy vậy, không phải vì thế mà chúng ta bỏ cuộc. Bởi vì, bất cứ mê cung nào cũng tìm được cách giải quyết. Người ta đã tìm ra rằng, bất cứ mê cung nào cũng có thể thông qua biện pháp điền thêm đường cung giữa các "đỉnh bậc lẻ", khiến nó biến thành mạng lưới vẽ được một nét. Nếu ta điền thêm một đường cung giữa các "đỉnh bậc lẻ" thì có thể làm cho số "đỉnh bậc lẻ" của mê cung giảm 2.

Nếu ta nối các "đỉnh bậc lẻ" hai bên của mê cung ở hình 3-6 lại thì "đỉnh bậc lẻ" của mê cung mới chỉ còn lại có hai đỉnh (hình 3-7), do vậy có thể vẽ được một nét.

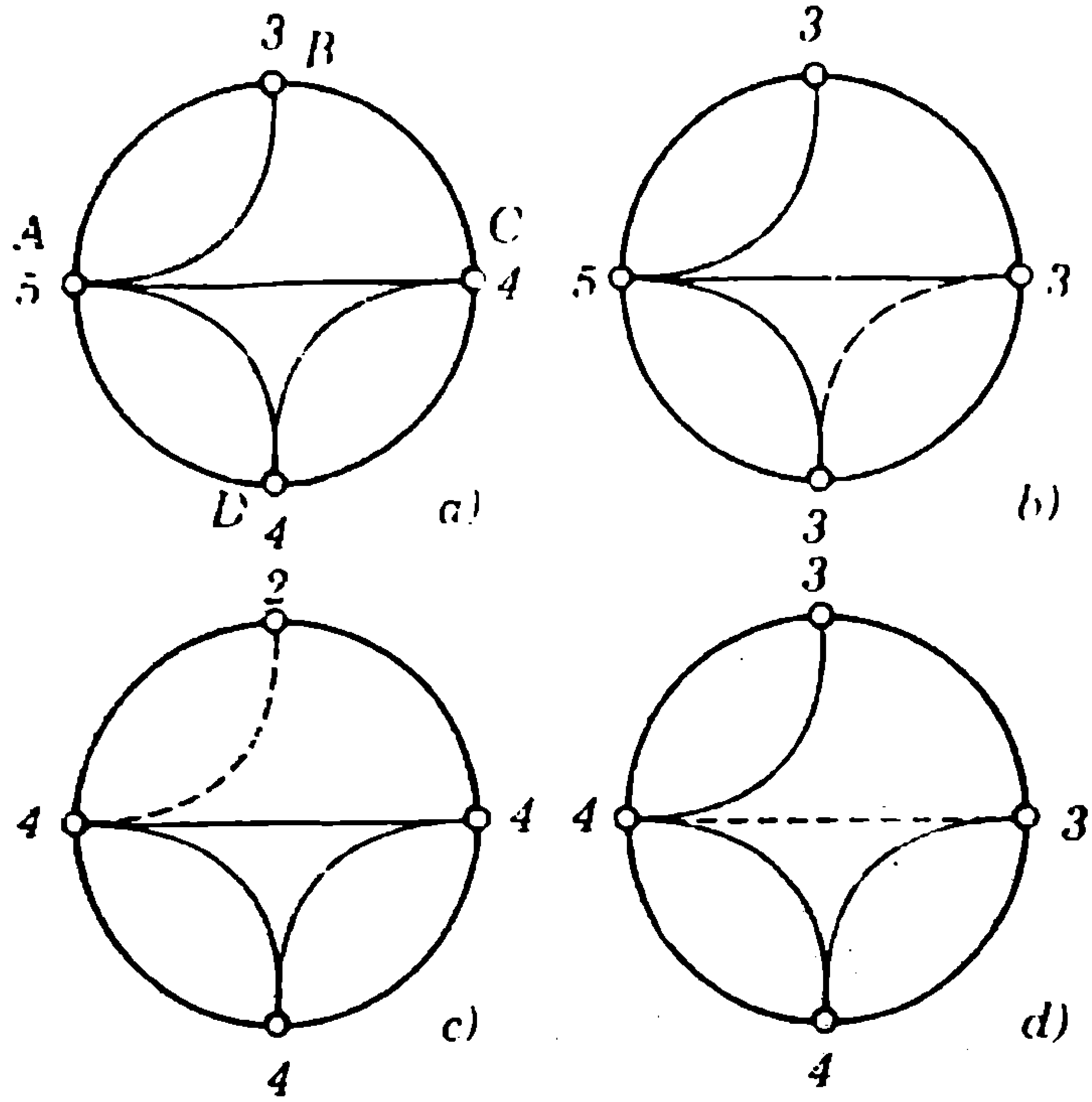
Phương pháp vừa nêu chứng tỏ rằng, muốn ra khỏi mê cung, chỉ cần đánh dấu ở chỗ các đường rẽ để nếu gặp ngõ cụt thì trở lại đến chỗ đánh dấu và đi tiếp tục vào đường khác. Làm như vậy dù có phải đi nhiều đường hơn nhưng có thể ra khỏi mê cung một cách chắc chắn. Chắc rằng sứ thần Tạng vương thông minh cũng đã làm như vậy.



Hình 3-7

Trong khi đề cập đến mạng lưới liên thông ở mục 2, chúng ta đã nêu tính chất 1 (do L.Euler đưa ra) nhưng chưa chứng minh. Việc chứng minh tính chất này cũng đơn giản: Chúng ta hãy xem hình 3-8. Hình 3-8a là hình ban đầu, có hai "đỉnh bậc lẻ" A và B.

Nếu ta bỏ đường CD (hình 3-8b) thì ở đỉnh C và đỉnh D trở thành hai "đỉnh bậc lẻ" và hình 3-8b trở thành hình có bốn "đỉnh bậc lẻ". Tương tự như vậy với hình 3-8c và hình 3-8d.



Hình 3-8

Như vậy, nếu ta bỏ một đường thì hoặc là tăng thêm hai "đỉnh bậc lẻ", giảm đi hai "đỉnh bậc chẵn", hoặc là giảm đi hai "đỉnh bậc lẻ", tăng thêm hai "đỉnh bậc chẵn", hoặc là số lượng các "đỉnh bậc lẻ" và "đỉnh bậc chẵn" không thay đổi, không có khả năng thứ tư. Điều này chứng tỏ tính chất chẵn - lẻ của số lượng các "đỉnh bậc lẻ" không thay đổi. Cứ như vậy, ta có thể bỏ đi từng đường cho tới khi chỉ còn lại một đường. Lúc này số lượng của "đỉnh bậc lẻ" rõ ràng còn 2. Từ đó ta suy ra số lượng "đỉnh bậc lẻ" ban đầu chắc chắn là chẵn.

Chứng minh đơn giản này khiến người ta nhớ tới trò chơi ảo thuật thú vị sau đây.

Lật ngửa một số đồng tiền đặt trên bàn. Bạn quay mặt đi rồi nhờ một người lật sấp từng đôi một với số đôi tuỳ ý. Sau đó nhờ người ấy lấy tay che một đồng tiền nào đó. Tiếp đến bạn quay mặt lại nhìn (đếm) các đồng tiền còn lại thì có thể đoán được đồng tiền ở dưới tay người ấy là sấp hay ngửa.

Ảo thuật này có một chút thần kỳ. Tuy vậy, nếu bạn lưu ý một điều là tính chẵn - lẻ của số lượng mặt ngửa lúc ban đầu không thay đổi khi người ta lật sấp từng đôi một. Vì vậy, khi bạn quay mặt lại, chỉ cần đếm số lượng các đồng tiền còn lại thì có thể đoán chính xác đồng tiền dưới tay người ấy là sấp hay ngửa.

Đối với bạn đọc thích đại số, tìm hiểu một chút về chứng minh tính chất 1 của mạng lưới liên thông theo đại số cũng thú vị. Gọi α là số đường của mạng lưới, n là số đỉnh, α_k là số đỉnh có k đường hội tụ vào. Chú ý rằng mỗi đường có hai đỉnh. Ta có:

$$2\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + k\alpha_k + \ldots \qquad (3\text{-}1)$$

Vế trái của (3-1) rõ ràng là một số chẵn. Bây giờ đưa vế phải của (3-1) trừ đi một số chẵn khác:

$$2(\alpha_2 + \alpha_3) + 4(\alpha_4 + \alpha_5) + 6(\alpha_6 + \alpha_7) + \ldots \qquad (3\text{-}2)$$

ta vẫn được một số chẵn:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \alpha_7 + \ldots \qquad (3\text{-}3)$$

Biểu thức (3-3) là số lượng của tất cả các "đỉnh bậc lẻ". Như vậy đã chứng minh được rằng số lượng "đỉnh bậc lẻ" phải là chẵn (thành đôi).

Vấn đề sẽ trở nên phức tạp hơn nếu như bạn (giống như hoàng hậu E. Acvitanxki hoặc Theseus trong hai câu chuyện ở trên), cần phải vào mê cung như sơ đồ mê cung không có, cũng chưa hề vào. Thế thì làm thế nào tìm được đường đi để đến mục tiêu trong một mê cung bất kỳ không?

Năm 1873, lần đầu tiên C.Vine đưa ra một quy tắc (nói theo ngôn ngữ toán học là thuật toán) có hệ thống để tìm đường đi trong mê cung. Một quy tắc khác đơn giản và tiện dùng hơn do G.Tarry (1843 - 1913) đưa ra như sau:

Người đi trong mê lộ cần luôn nhớ: không bao giờ đi hai lần trên một đoạn đường (hoặc hành lang) theo cùng một chiều, khi ở một chỗ rẽ nào đó (ngã ba, ngã tư,...) thì không được chọn đoạn đường đã dẫn mình tới chỗ đó lần trước, trừ khi không có cách nào khác.

Nếu xuất phát từ A và theo đúng quy tắc đi như trên thì nhất định đến một lúc nào đó ta sẽ tới được B (mục tiêu), nếu có đường đi từ A đến B, hoặc sẽ phải dừng lại ở A, vì không thể đi theo quy tắc nêu trên được nữa (nếu không có đường đi từ A đến B).

Đi theo quy tắc này có thể phải qua nhiều lần tại một nơi nào đó.

Nếu muốn tìm một đường đi từ A đến B mà không đi qua một nơi nào quá một lần thì có thể dùng quy tắc đánh dấu sau đây.

Trong mỗi giai đoạn của quá trình tìm đường đi, ta gọi các đoạn đường chưa đi qua lần nào là "đường trắng", các đoạn đã qua một lần là "đường xanh" và các đoạn đã qua hai lần (khác chiều) là "đường vàng". Khi tới một ngã nào đó (khác với B) thì người đi cần kiểm tra lần lượt từng trường hợp sau đây (theo đúng thứ tự) và làm theo trường hợp lần đầu tiên xảy ra:

1. Tại ngã đó có hai "đường xanh" thì quay lại theo đoạn đường vừa mới dẫn tới ngã đó và đoạn đường này trở thành "đường vàng".

2. Tại ngã đó có một "đường trắng" thì đi theo đoạn đường ấy và đoạn đường ấy trở thành "đường xanh".

3. Ngã đó chính là A thì dừng lại.

4. Tại ngã đó có một "đường xanh" duy nhất thì đi theo đoạn đường ấy và đoạn đường ấy trở thành "đường vàng".

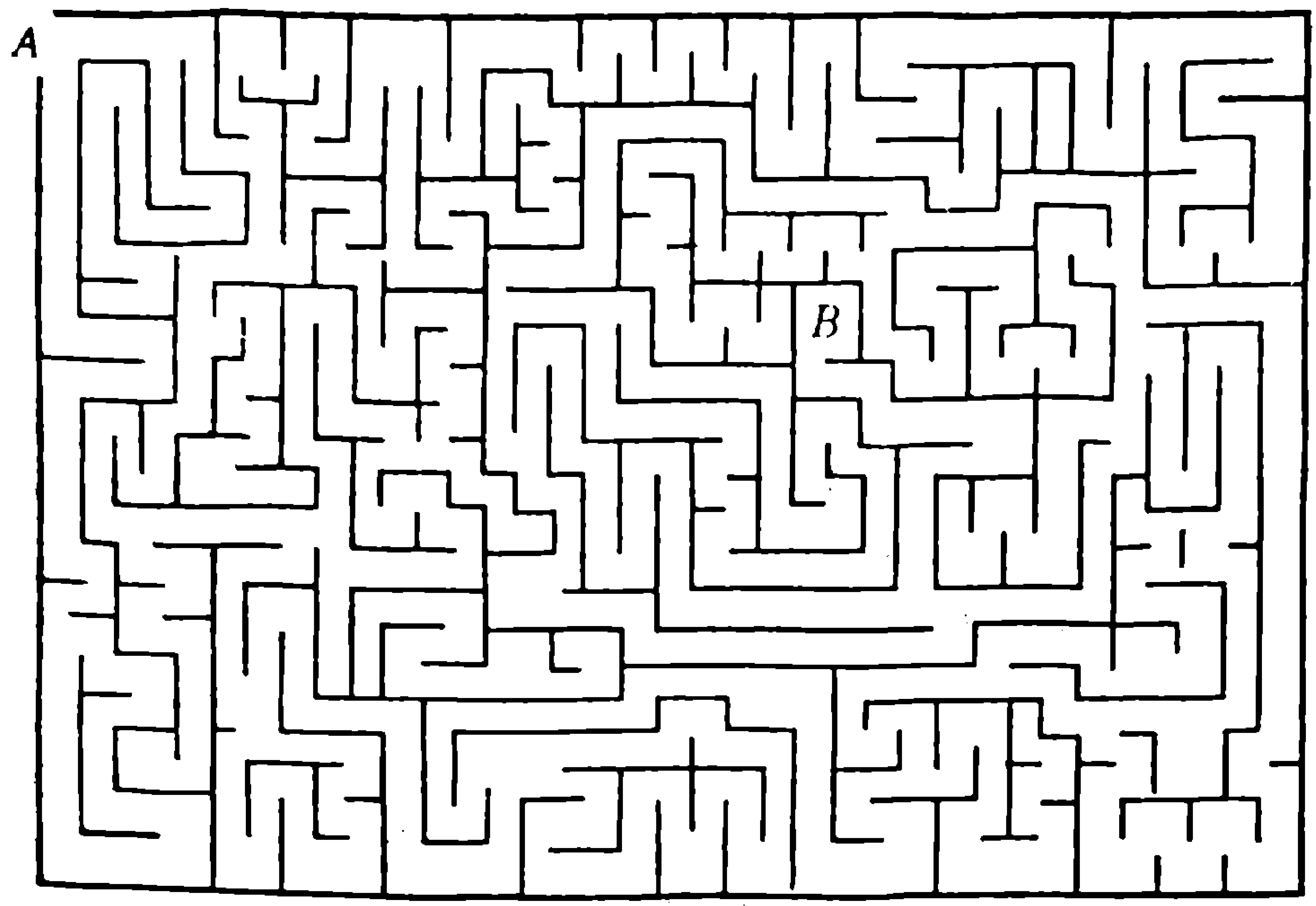
Có thể thấy rằng, ngoài bốn trường hợp vừa nêu thì không còn trường hợp nào khác nữa, và cũng theo quy tắc Tarry, đến một lúc nào đó thì sẽ đến được B (nếu có đường đi từ A đến B) hoặc sẽ phải dừng lại ở A (nếu không có đường đi từ A đến B).

Nếu dùng cuộn chỉ như Theseus và hoàng hậu E.Acvitanxki thì trong trường hợp 1 và trường hợp 4: người đi cuộn chỉ lại, trong trường hợp 2: người đi kéo chỉ ra. Khi tới được B thì cuộn chỉ nằm dọc theo con đường cần tìm và lúc quay trở ra không có nơi nào phải qua hai lần. Dĩ nhiên đường đi đó được tạo nên do các "đường xanh" ở giai đoạn cuối cùng.

Bạn đọc hãy thử áp dụng các quy tắc vừa nêu ở trên để tìm đường đi tới mục tiêu (điểm B) trong mê cung ở hình 3-9. Mê cung này do nhà toán học Y. Y.Bol xây dựng trong vườn nhà mình.

Lời giải "câu đố" của mê cung có thể giúp ích cho người bị lạc trong hang động, trong khu phố, làng xóm có nhiều đường đi lối lại (nếu người đó không muốn hỏi đường). Mặt khác "câu đố" của mê cung cũng rất thú vị đối với nhiều bạn trẻ và với cả những nhà tâm lý học.

Các nhà tâm lý học quan tâm tới mê cung vì trong mấy chục năm gần đây họ đã và đang dùng mê cung để nghiên cứu hành vi học tập của người và vật. Họ đã dạy cho giun đất biết cách tìm đường đi qua mê cung gồm các ngã ba đường, con kiến có khả năng vượt qua mê cung có 10 chỗ rẽ nhánh.



Hình 3-9

Các nhà nghiên cứu về máy tính, nghiên cứu các otomat biết tìm đường đi trong mê cung để chế tạo máy tự học. Một trong những otomat đầu tiên thuộc loại này là con chuột máy "Theseus" do nhà toán học kiêm kỹ sư Claude Shannon người Mỹ sáng chế. Về sau người ta đã nghiên cứu chế tạo được nhiều otomat biết tìm đường đi trong mê cung. Một trong những otomat "mưu mẹo" nhất do Yanoxlav Daycho người Mỹ chế tạo.

4. HÌNH HỌC TRÊN MÀNG CAO SU

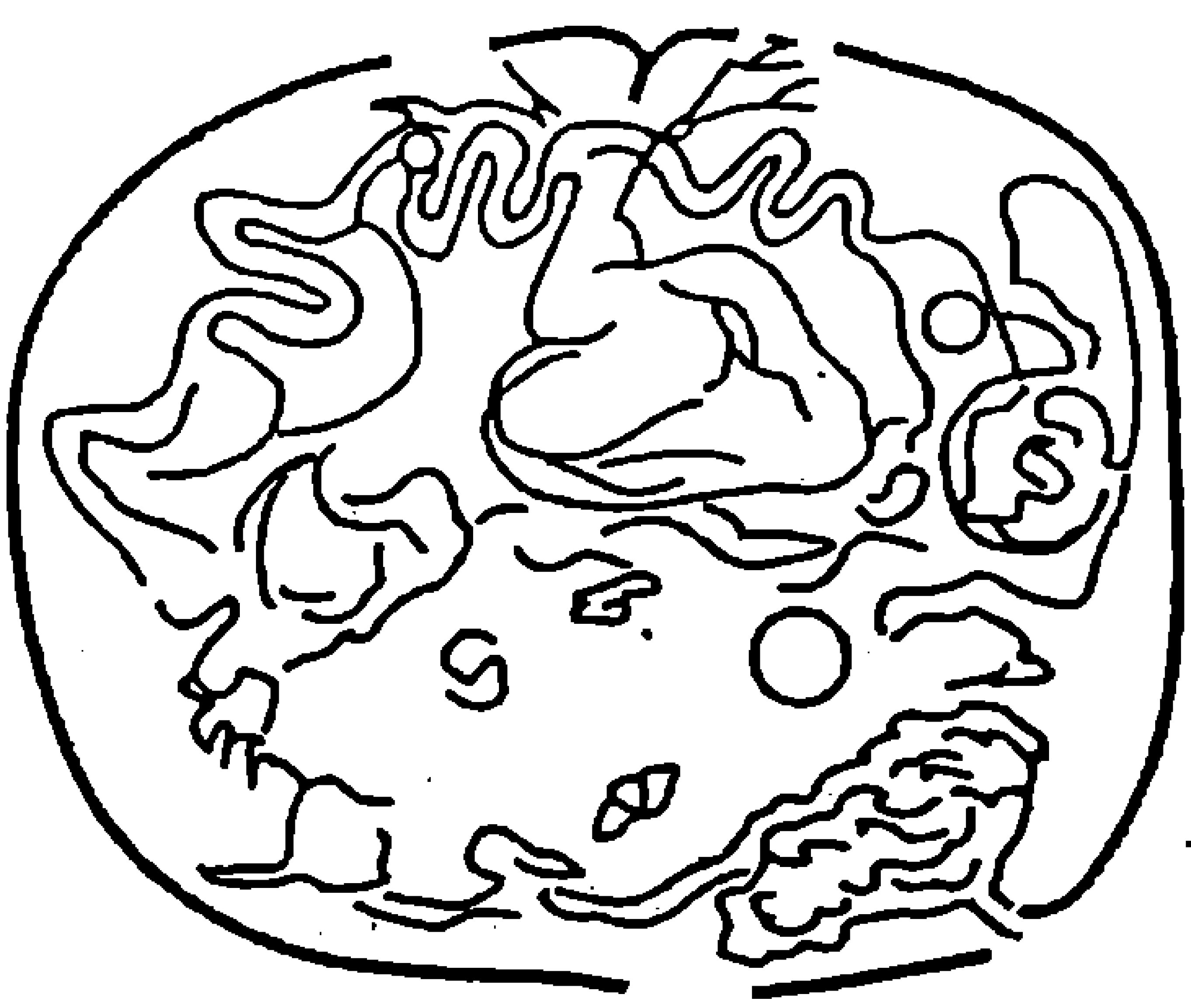
Ở mục 2: "Bài toán vẽ một nét", bạn đọc đã thấy một loại hình học mới chỉ nghiên cứu thứ tự tương đối của vị trí các bộ phận hình vẽ, mà không xét đến độ lớn kích thước của chúng. G.W.von Leibniz và L.Euler đã đặt nền móng cho sự phát triển của nhánh "hình học vị trí" này. Ngày nay nhánh hình học mới này đã phát triển thành nhánh toán học quan trọng: topo học.

Topo là bộ phận của toán học nghiên cứu các khái niệm, thoạt đầu mang tính trực giác về tính liên tục và giới hạn. Đầu thế kỷ XIX các nhà toán học đã sử dụng những khái niệm đó mà không định nghĩa chúng một cách chính xác. D.Hilbert đã tìm cách tiên đề hoá chúng. Đầu thế kỷ XX, M.R. Fréchet (1878 - 1973) người Pháp và Friedrich Riesz (12/1/1880 - 28/2/1956) người Hunggari đã đưa ra định nghĩa topo. Một trong những người đầu tiên nghiên cứu các vấn đề topo là nhà bác học Jules Henri Poincaré (1854 - 1912) người anh em họ với tổng thống Pháp Raymond Poincaré, được coi như người phát minh ra topo đại số và topo vi phân.

H.J.Poincaré

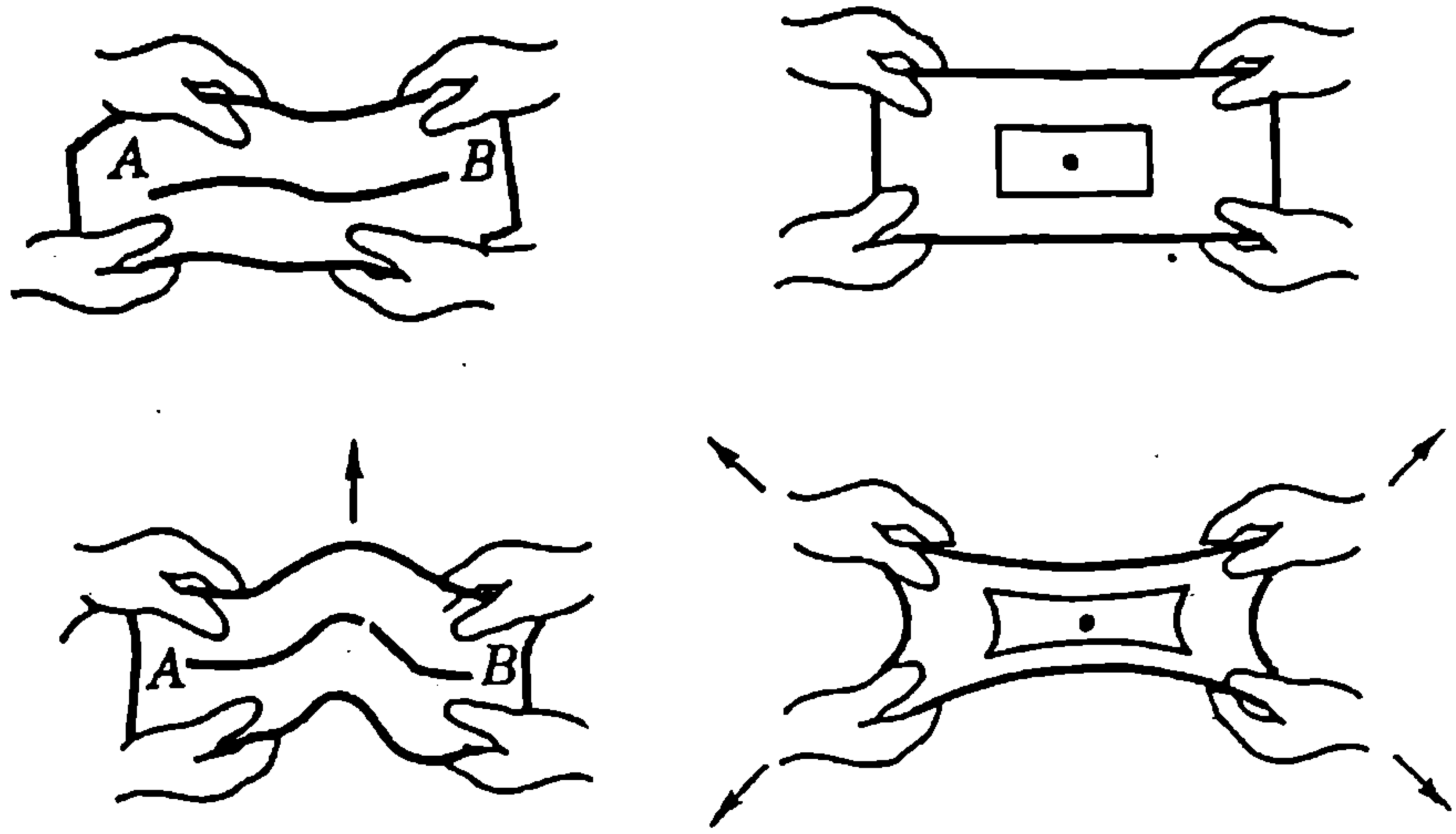
Nội dung nghiên cứu của topo học cực kỳ lý thú. Chẳng hạn, găng tay trái sau khi xoay lại vị trí trong không gian có thể biến thành găng tay phải được không? Một chiếc chén uống nước có quai so với phao cấp cứu hoặc lọ hoa thì giống cái nào hơn?... Rất nhiều sự việc khó tin nhưng trong topo học hầu như đều có thể!

Hình 4-1 là một bức hoạ siêu thực trong cuốn sách khoa học phổ thông "One, Two, Three, ..., Infinity" của giáo sư vật lý nổi tiếng Kemov người Mỹ, vẽ một người đang đi trên mặt đất và ngẩng đầu nhìn bầu trời xanh. Chẳng qua ở đây đã dùng phương pháp biến đổi của topo học, lộn ngược vũ trụ lại. Trái Đất, Mặt Trời và các vì sao trong hình đều bị dồn vào một vòng chật hẹp trong cơ thể người, xung quanh là các bộ phận bên trong cơ thể người.



Hình 4-1

Trong topo học, điều mà mọi người quan tâm chỉ là vị trí của hình vẽ chứ không phải là độ lớn nhỏ của nó. Có người gọi topo học là "hình học trên màng cao su" là rất xác đáng. Bởi vì hình vẽ trên màng cao su thì chiều dài, độ cong của đường, diện tích,... của nó đều sẽ biến đổi theo sự co dãn của màng cao su. Lúc này bàn các vấn đề như "dài bao nhiêu?", "lớn bao nhiêu?" là không hề có ý nghĩa gì.

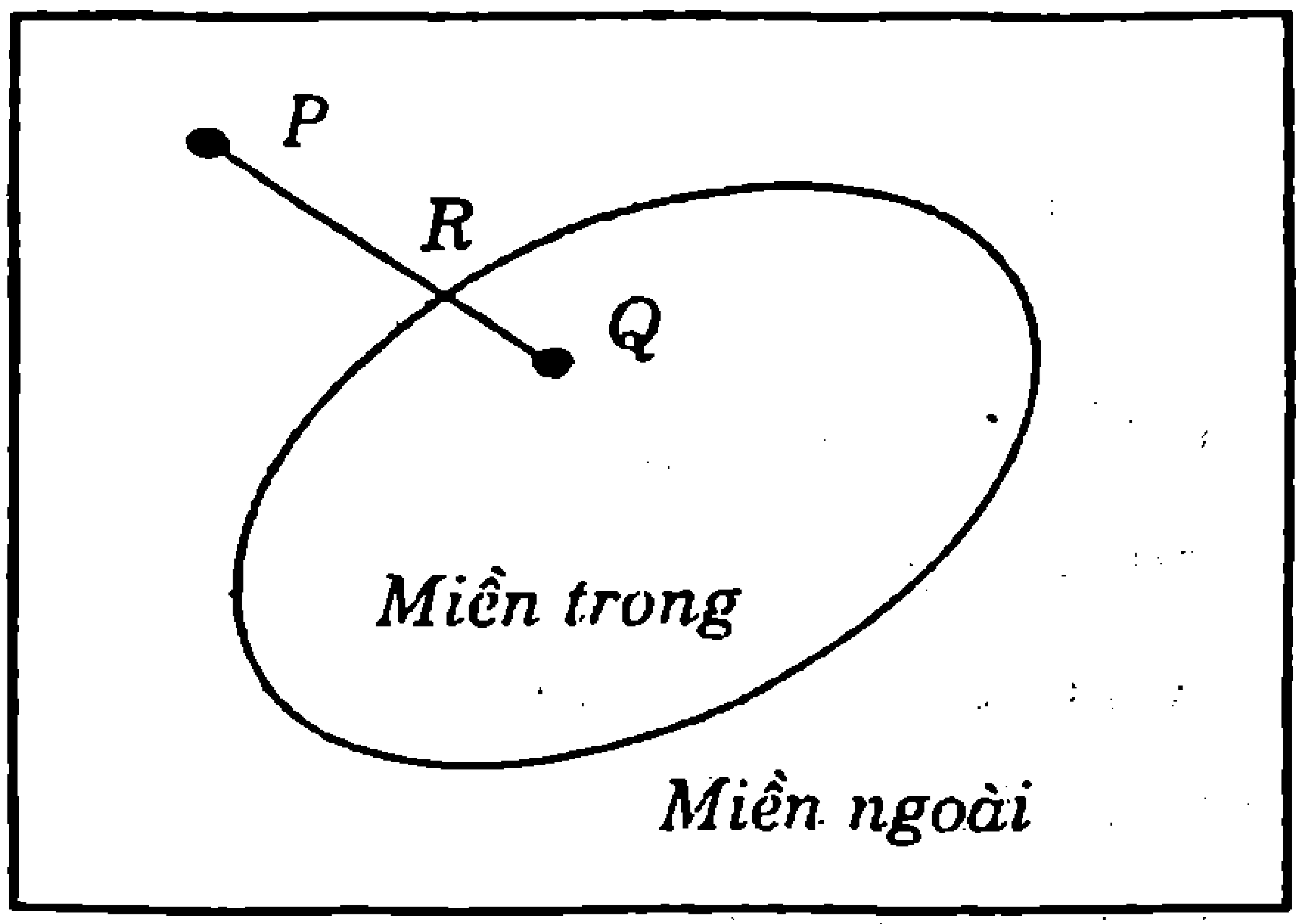


Tuy vậy, trong "hình học trên màng cao su" cũng có một số tính chất của hình vẽ giữ nguyên không thay đổi. Chẳng hạn, điểm sau khi biến đổi vẫn là điểm; đường sau khi biến đổi vẫn là đường; những hình vẽ giao nhau tuyệt nhiên không vì sự kéo giãn và uốn cong của cao su mà biến đổi thành không giao nhau nữa. Topo học chính là hình học nghiên cứu những thứ khiến hình vẽ giữ được tính bất biến trên màng cao su như vậy.

Trong chuyện "Tây du ký" mà về sau được chuyển thành phim đã chiếu mấy lần trên vô tuyến truyền hình Việt Nam có Tôn Ngộ Không được nhiều người khâm phục và yêu mến, nhất là các bạn trẻ. Đó là một chú khỉ, sau khi tu luyện lâu năm đã có được nhiều phép thần thông biến hoá. Sau lần Đại náo Thiên cung (phá Trời), chú khỉ được phong là Tề Thiên Đại Thánh (vị Thánh đã chinh phục Trời) nhưng đã bị Phật Bà Quan Âm thu phục và bắt phải theo hầu và bảo vệ cho sư thầy Đường Tăng sang đất Tây Trúc để lấy kinh Phật.

Khi đoàn đến một vùng rừng núi hiểm trở, Tôn Ngộ Không dặn ba thầy trò Đường Tăng, Trư Bát Giới và Sa Tăng ngồi nghỉ trong vòng mà Tôn Ngộ Không đã dùng gậy vẽ trên mặt đất, để mình đi trước dò đường.

Lát sau có con yêu Bạch Cốt Tinh định xông vào bắt Đường Tăng để ăn thịt. Nhưng nhờ cái vòng vẽ trên đất mà Bạch Cốt Tinh không thực hiện được âm mưu ác độc, bởi vì cái vòng đó có phép chống lại yêu tinh, ma quỷ. Cứ mỗi lần Bạch Cốt Tinh chạm vào vòng là hào quang toả sáng, tay chân đau buốt.



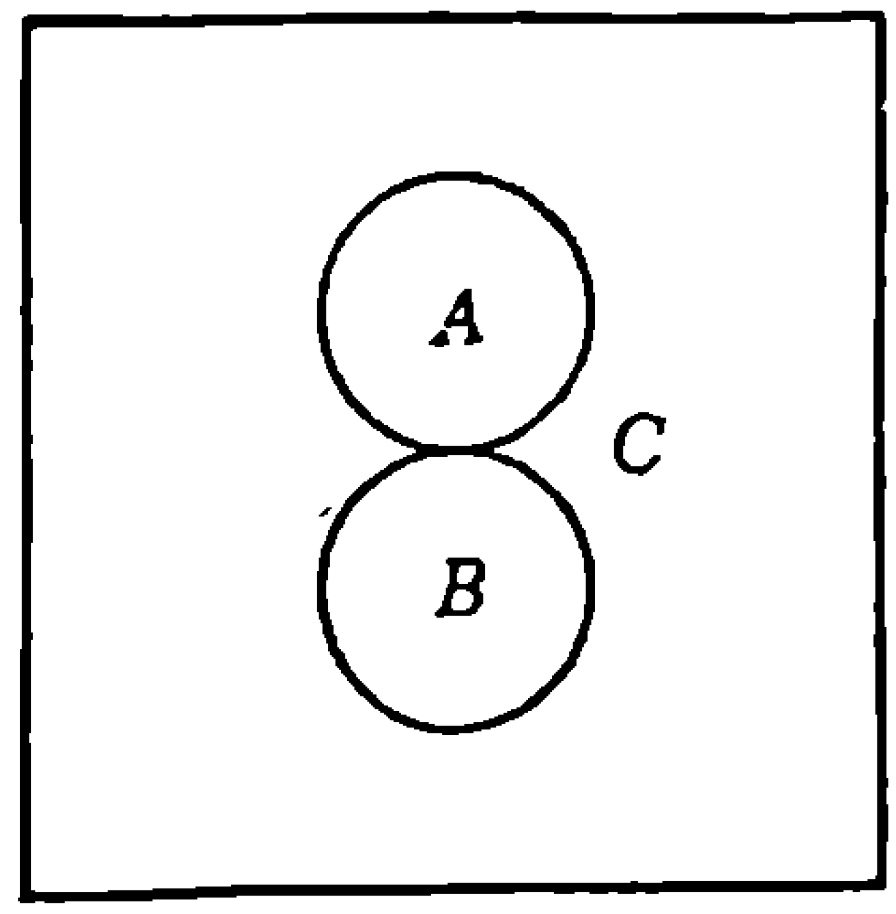
Hình 4-2

Về mặt toán học ta thấy, vòng mà Tôn Ngộ Không vẽ trên đất không nhất thiết phải là vòng tròn, chỉ cần là đường cong kín và không tự cắt. Đường như vậy sẽ chia mặt phẳng thành hai miền: "miền trong" và "miền ngoài" (hình 4-2). Còn những đường tự cắt, chẳng hạn đường số 8 thì chia mặt phẳng thành ba miền A, B và C (hình 4-3).

Trở lại đường mà Tôn Ngộ Không đã vẽ (hình 4-2), ta thấy nếu Bạch Cốt Tinh từ một điểm P thuộc "miền ngoài", muốn vào để vồ Đường Tăng ở "miền trong", giả sử là điểm Q, nhất thiết phải qua đường cong kín chứ không có con đường nào khác.

Điều này có nghĩa là, nếu nối P và Q thì chắc chắn đoạn thẳng nối P và Q phải cắt đường cong kín tại điểm R (nào đó).

Tuy điều này tưởng như là hiển nhiên, nhưng nếu chưa được công nhận là tiền đề thì phải chứng minh.



Hình 4-3

Từ năm 1882 đến năm 1887, nhà toán học Camille Marie Ennemond Jordan (5/1/1838 - 21/1/1922) người Pháp đã viết ba tập sách "Giáo trình giải tích", trong đó có định lý sau đây:

"Mọi đường cong kín và không tự cắt đều chia mặt phẳng ra làm hai miền: "miền trong" và "miền ngoài". Khi nối một điểm P bất kỳ thuộc "miền ngoài" với một điểm Q bất kỳ thuộc "miền trong" thì bao giờ đường nối PQ cũng cắt đường cong kín nói trên".

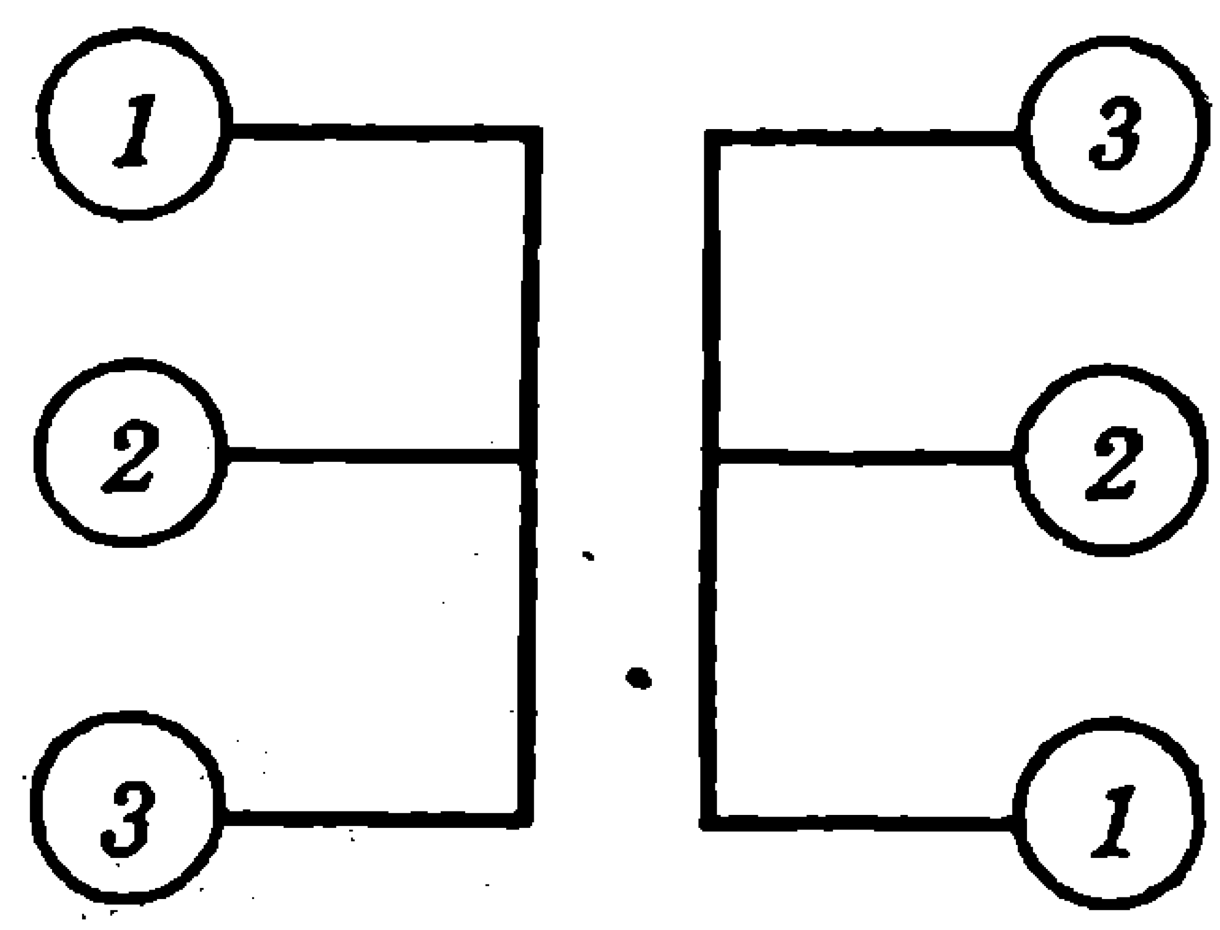
Ông phải chứng minh dài và không đơn giản. Sau này người ta phát hiện ra trong chứng minh đó có chỗ chưa hoàn chỉnh. Nhiều nhà toán học đã phải bỏ nhiều công sức để lấp nốt các chỗ chưa hoàn chỉnh trong chứng minh của C. M.E.Jordan. Tuy cách chứng minh này đã chặt chẽ và hoàn chỉnh nhưng rất khó hiểu. Cách chứng minh đơn giản hơn mới được công bố gần đây:

Nếu ta vẽ một đường cong kín như hình 4-2 lên miếng cao su rồi ta kéo, xoắn,... miếng cao su nhưng không được làm rách, đứt, không gấp,... thì đường cong kín vẫn giữa hai miền. Như vậy, cho dù đường cong kín ban đầu có bị phép biến hình topo làm thay đổi đi thì tính chất chia làm hai miền của nó vẫn giữ nguyên.

"Miền trong" và "miền ngoài" là hai khái niệm rất quan trọng trong topo học. Để hiểu thêm về hai khái niệm này, bạn hãy xem câu chuyện sau đây:

Truyền thuyết người kế thừa Halipha của thuỷ tổ đạo Ixlam Muhamad (571 - 632), sứ giả của Thánh Ala ở Ba Tư cổ đại kể rằng: Halipha có cô con gái tài sắc song toàn. Sắc đẹp và trí tuệ của cô khiến cho rất nhiều chàng trai thông minh, tuấn tú phải điêu đứng, đến nỗi ngựa xe của những người đến cầu hôn không ngớt. Halipha quyết định chọn một người tài trí hơn người trong số đó để làm rể. Ông đã đưa ra một câu đố và tuyên bố nếu ai giải được sẽ gả con gái cho.

Câu đố của Halipha như sau: Trong mặt phẳng hãy dùng các đường để nối các vòng có số giống nhau lại với nhau nhưng các đường đó không được cắt nhau (hình 4-4).

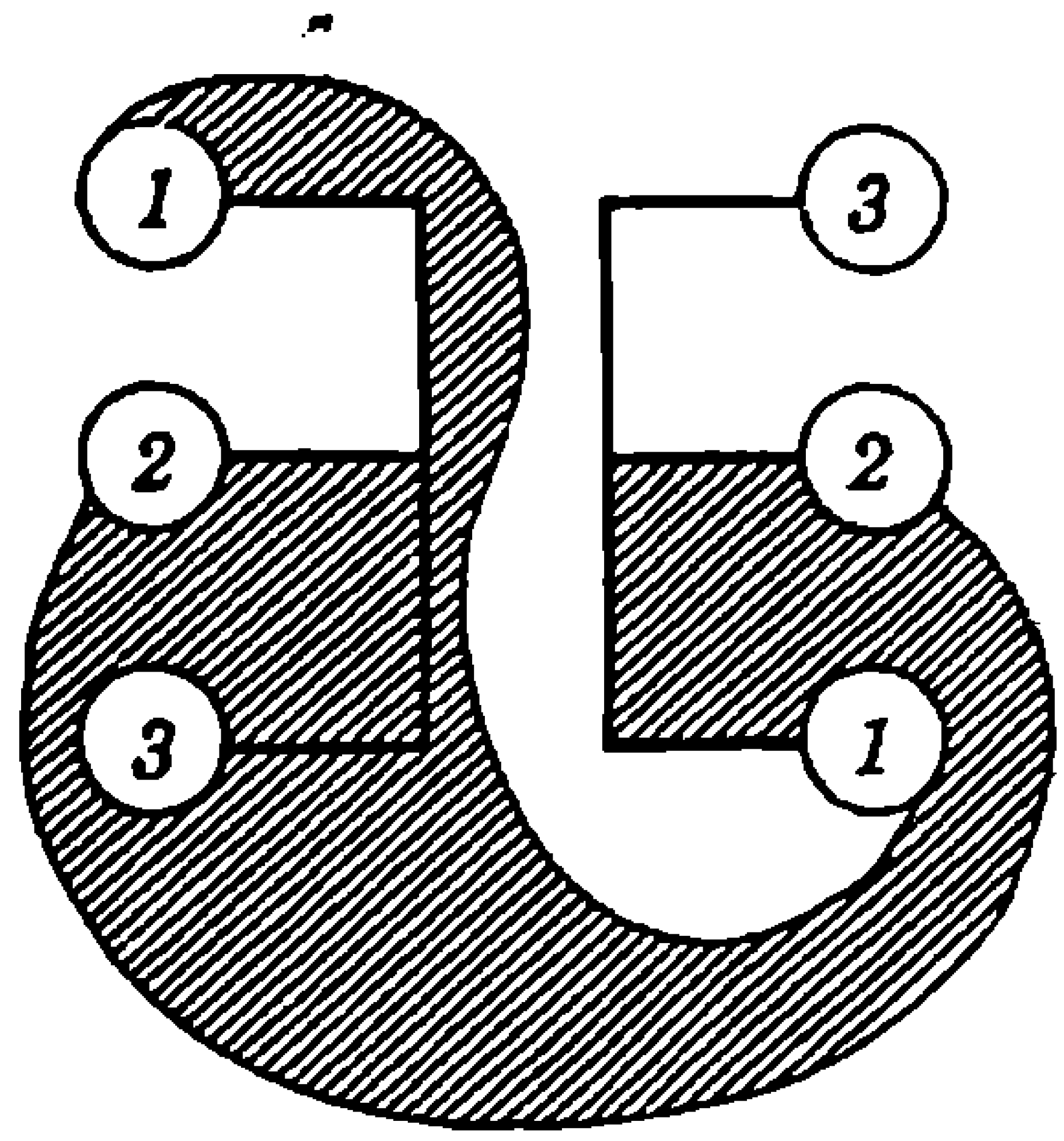


Hình 4-4

Thực hiện được câu đố này tựa hồ không khó lắm. Nhưng những người cầu hôn đến rồi lại buồn rầu ra về, không ai làm được. Nghe nói sau này Halipha tỉnh ngộ, thấy rằng câu đố đưa ra không thể thực hiện được, do đó đã sửa lại. Cũng có lời đồn rằng, vì Halipha cố chấp giữ mãi ý mình nên con gái xinh đẹp không lấy được chồng. Sự thật thế nào không ai trả lời chính xác được. Nhưng câu đố của Halipha lại có thể dùng kiến thức của topo học để chứng minh. Mấu chốt của câu đố vẫn là hai khái niệm "miền trong" và "miền ngoài".

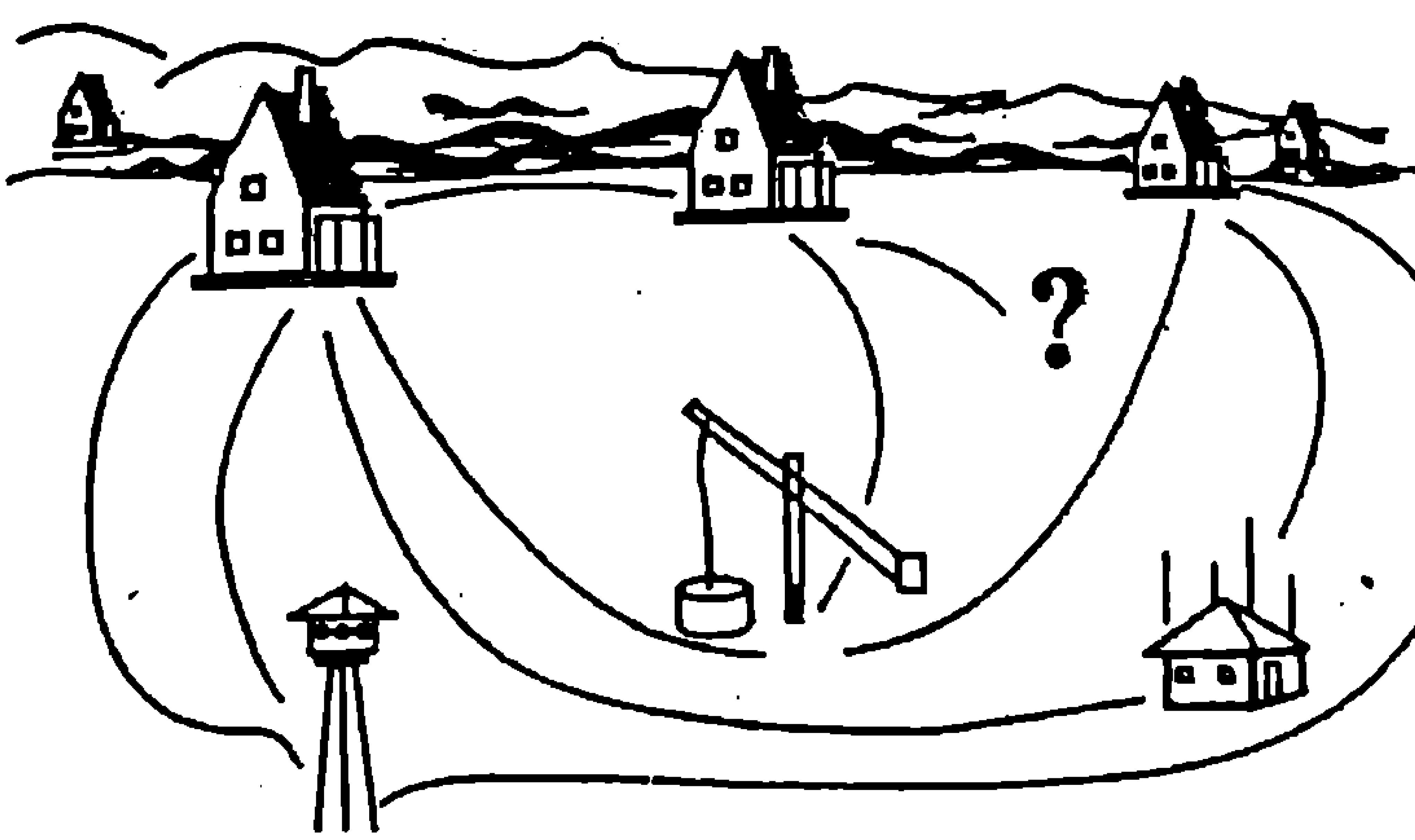
Ta dễ dàng nối ① với ①, nối ② với ②. Các bạn đọc tinh mắt đã có thể phát hiện ra là, ta đã được một đường cong kín (hình 4-5). Đường con kín này chia mặt phẳng thành hai miền:

"miền trong" (phần gạch chéo) và "miền ngoài", và một vòng số ③ thuộc "miền trong", một vòng số ③ thuộc "miền ngoài". Như vậy, theo định lý vừa nêu, muốn vẽ một đường từ vòng số ③ thuộc "miền trong" với vòng số ③ thuộc "miền ngoài" mà không cắt đường cong kín đã vẽ trước là không thể thực hiện được. Đây chính là bi kịch của Halipha.



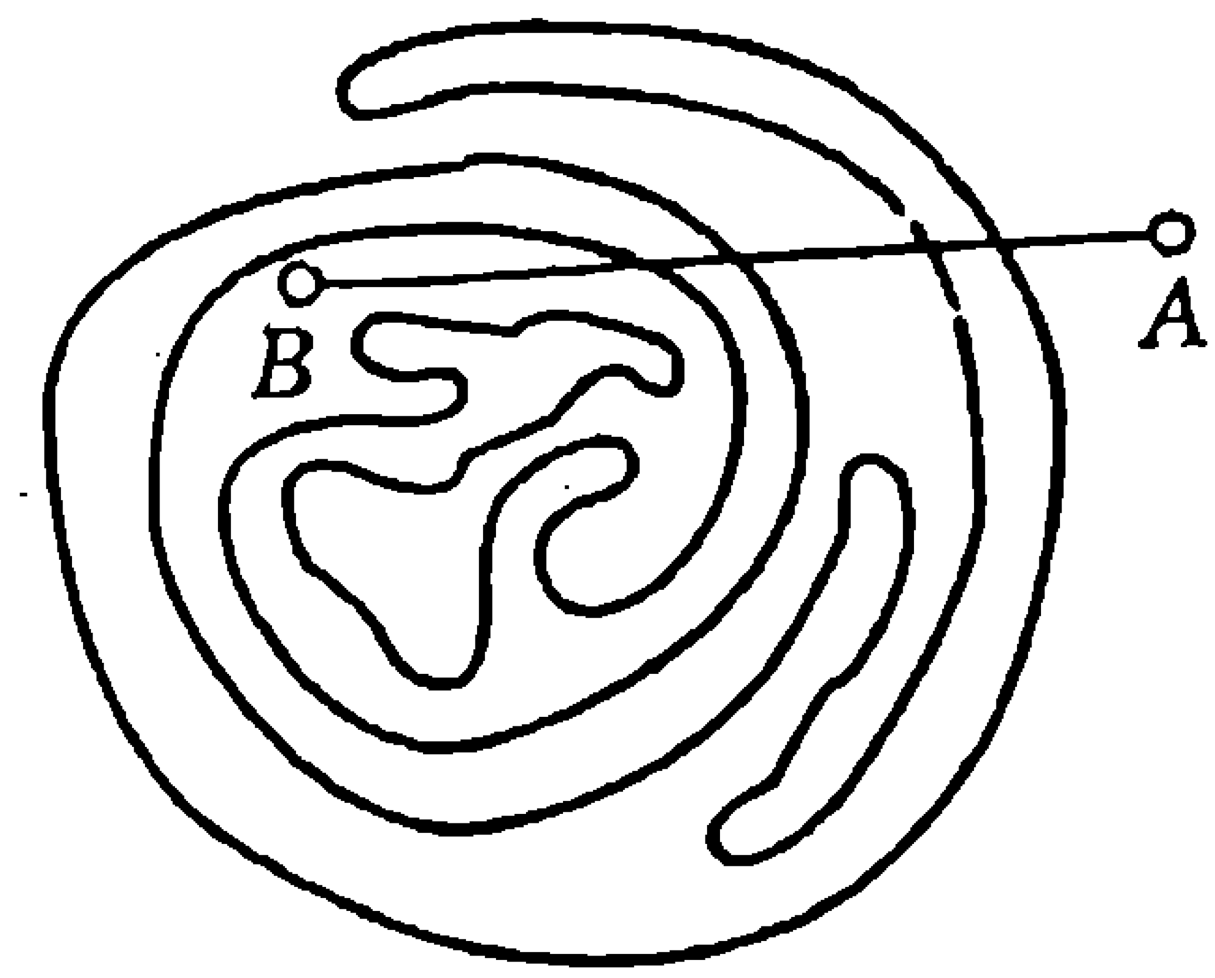
Hình 4-5

Một câu đố tương tự khác: Có ba ngôi nhà, một chuồng bồ câu, một cái giếng và một đống rạ. Muốn làm ba con đường từ mỗi ngôi nhà đến chuồng bồ câu, giếng và đống rạ, làm sao cho ba con đường này không cắt nhau? (hình 4-6). Bạn đọc hoàn toàn có thể vận dụng khái niệm "miền trong" và "miền ngoài" để chứng minh là không thể thực hiện được.



Hình 4-6

Khi xác định "miền trong" và "miền ngoài" của một hình, không phải lúc nào cũng thấy ngay được. Có trường hợp một số hình phức tạp khiến ta hoa mắt. Lúc đó nên làm thế nào? C.M.E.Jordan đã nêu ra một cách kỳ diệu như sau: Tìm một điểm ngoài hình, chẳng hạn điểm A (ở hình 4-7), nối với một điểm B nào đó của vùng cần xác định thành một đoạn thẳng AB. Nếu số lần cắt nhau giữa đoạn thẳng AB và đường cong kín là số lẻ thì vùng cần xác định thuộc "miền trong", ngược lại, số lần cắt nhau là số chẵn thì vùng cần xác định thuộc "miền ngoài". Vùng chứa điểm B ở hình 4-7 thuộc "miền ngoài", vì có bốn lần cắt nhau. Điều bí ẩn trong cách làm kỳ diệu này chắc bạn đọc thông minh đã hiểu ra.



Hình 4-7

5. MỘT CÔNG THỨC CỰC KỲ QUAN TRỌNG

Trong mục 13 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic" đã đưa ra công thức (13-1) quan hệ giữa các đại lượng trên bản đồ địa lý của một vùng không có đảo:

$$d + f = c + 2 \qquad (5\text{-}1)$$

trong đó: d là số đỉnh (mỗi đỉnh chung cho ít nhất là ba quốc gia);

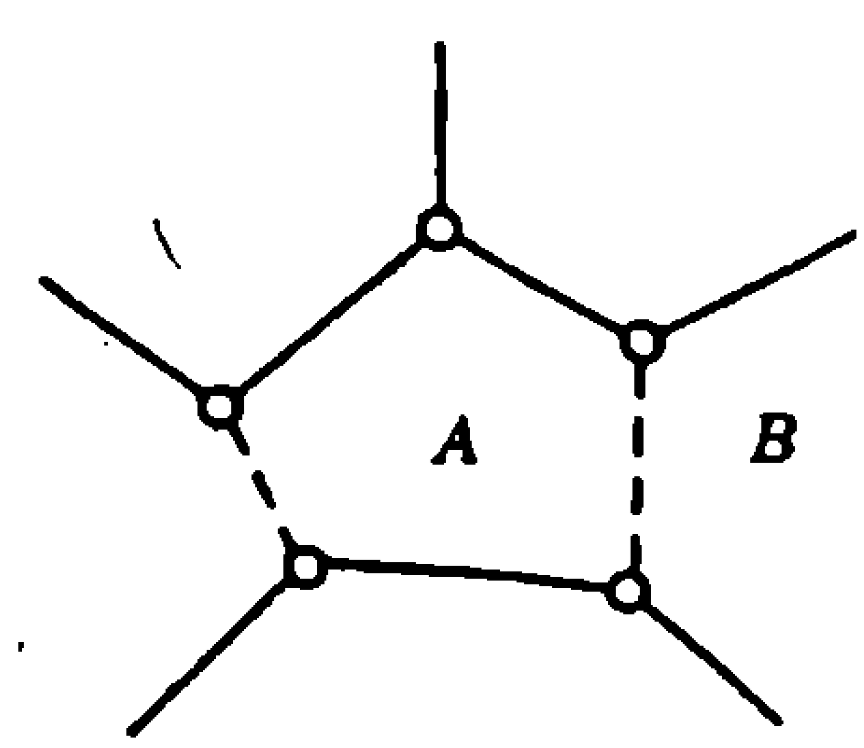
f là số quốc gia;

c là số đường biên giới nối hai đỉnh.

R. Descartes

René Descartes (31/3/1596 - 11/1/1650) người Pháp đã đưa ra (5-1) vào năm 1635 và vào năm 1752. L.Euler lại độc lập công bố công thức này, nên nó thường được gọi là công thức Descartes - Euler.

Trong cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic" đã dùng "Phương pháp quy nạp toán học" để chứng minh (5-1), bây giờ ta dùng phương pháp tương tự như đã dùng để chứng minh định lý về "miền trong" và "miền ngoài" ở mục 4. Sự thực, đối với một mạng lưới, sau khi dỡ bỏ đi một đường biên giới giữa hai quốc gia (A, B ở hình 5-1) thì số đỉnh d', số quốc gia f' và số đường biên giới c' mới sẽ có quan hệ với các đại lượng đó ở mạng lưới cũ như sau:



Hình 5-1

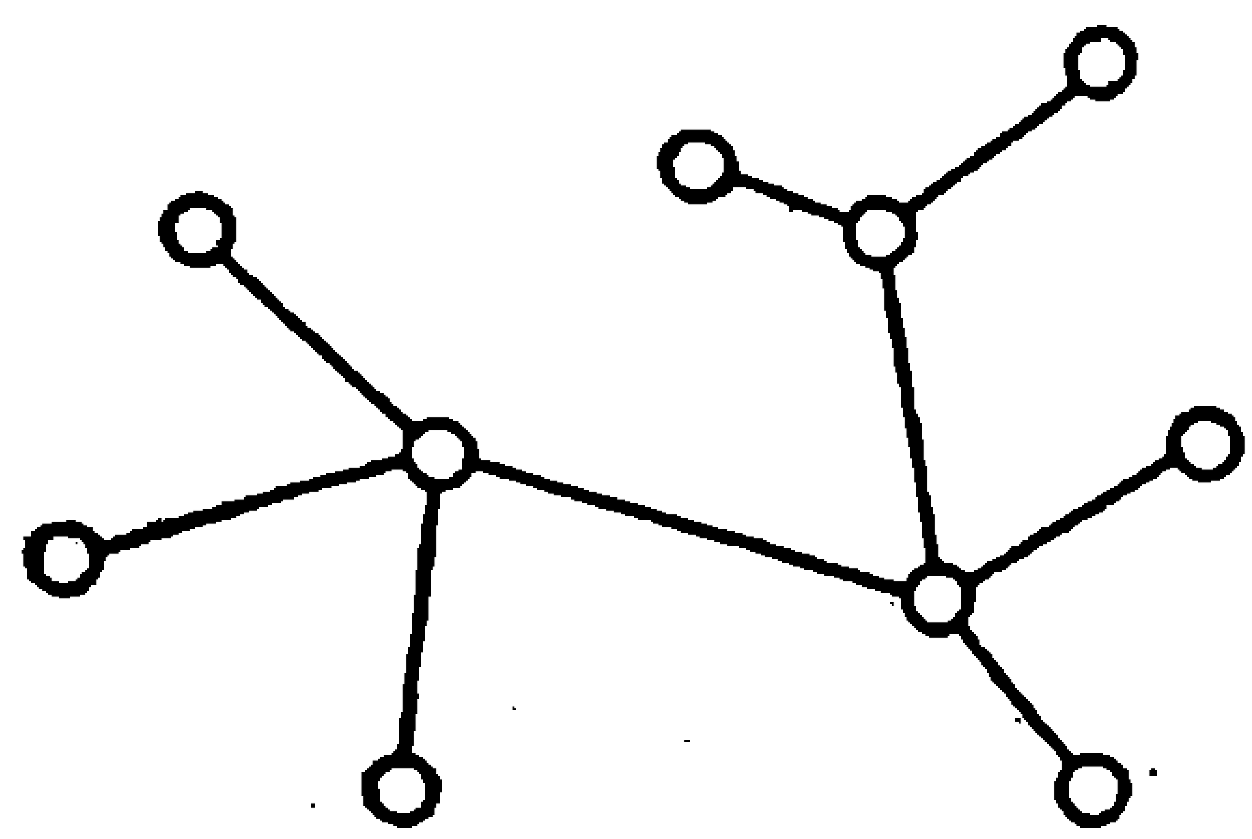
$$\begin{cases} d'=d \\ f'=f-1 \\ c'=c-1 \end{cases} \qquad (5\text{-}2)$$

Từ (5-2) và (5-1), ta được:

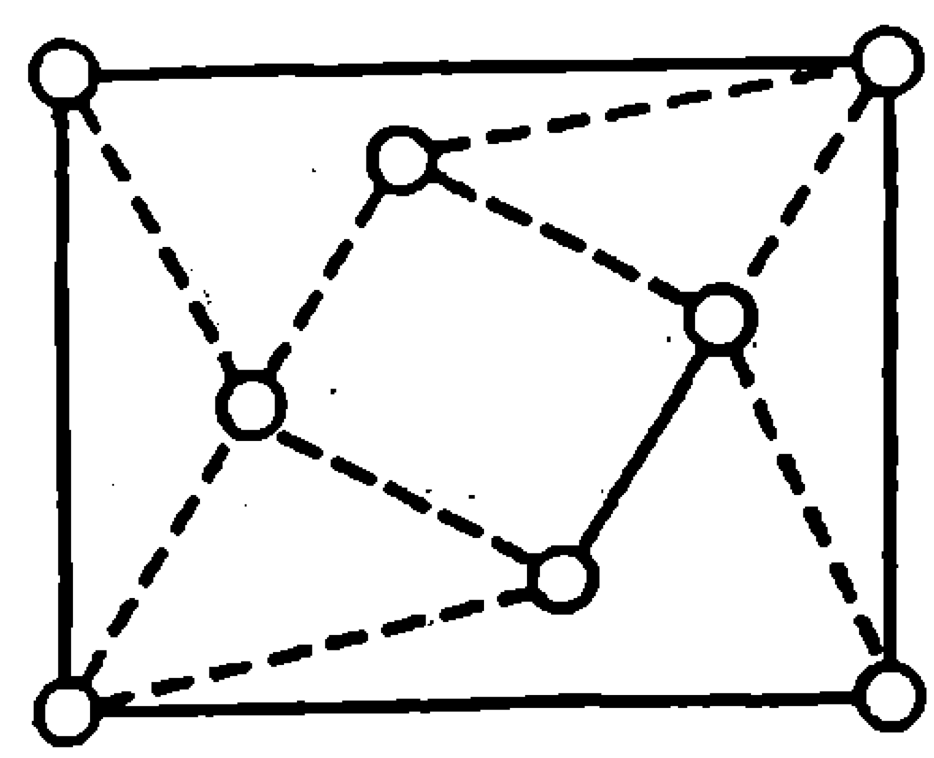
$$d' + f' - c' = d + f - c. \qquad (5\text{-}3)$$

Tương tự như vậy, cuối cùng ta được hình cây không còn "miền trong" như hình 5-2. Đối với hình 5-2, ta có quan hệ:

$$d^{(n)} + f^{(n)} - c^{(n)} = 2. \qquad (5\text{-}4)$$



Hình 5-2



Hình 5-3

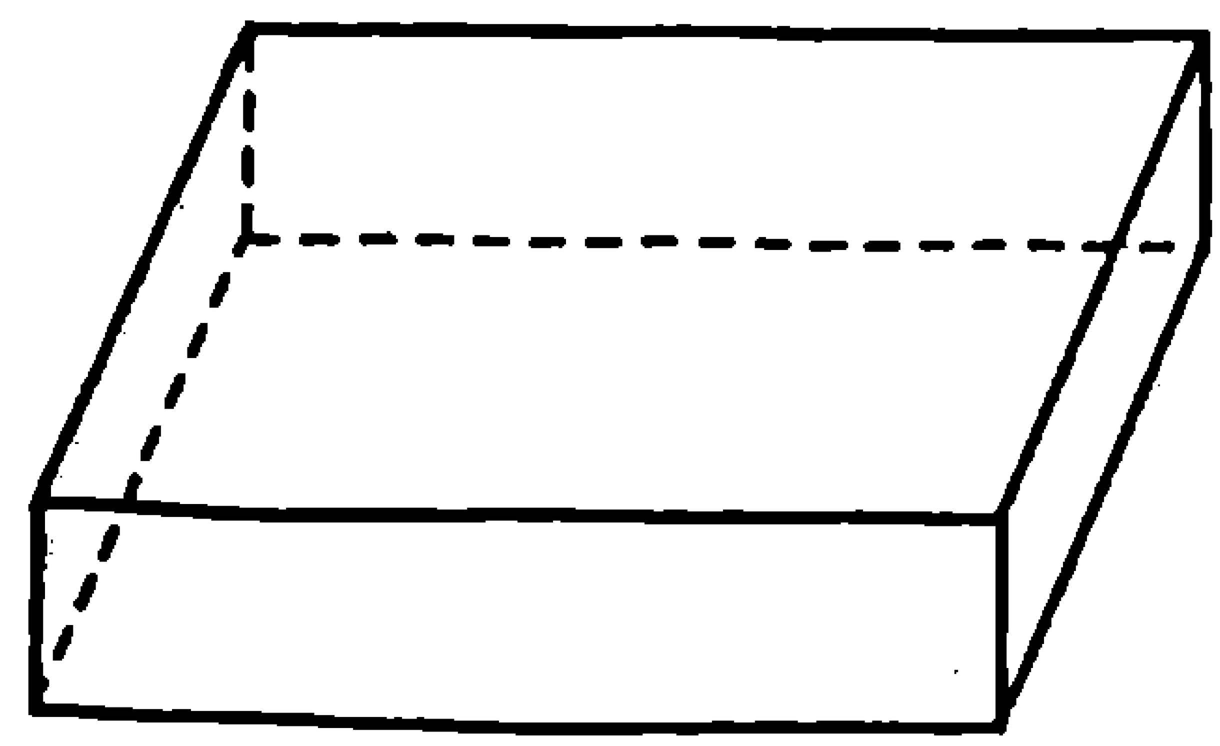
Từ (5-4) và (5-3), ta được (5-1).

Bây giờ ta xét trường hợp cụ thể, như hình 5-3. Ta đếm trên hình $d = 8$, $f = 8$ và $c = 14$. Theo (5-1), ta có:

$$8 + 8 = 14 + 2.$$

Thực ra, năm 1752, L.Euler đưa ra công thức (5-1), chứng minh và vận dụng nó trong cả các trường hợp hình khối đa diện. L.Euler chỉ ra rằng: "Với những khối đa diện nhiều mặt, không có lỗ thủng thì số đỉnh d cộng với số mặt f, trừ đi số cạnh c của nó luôn luôn bằng 2".

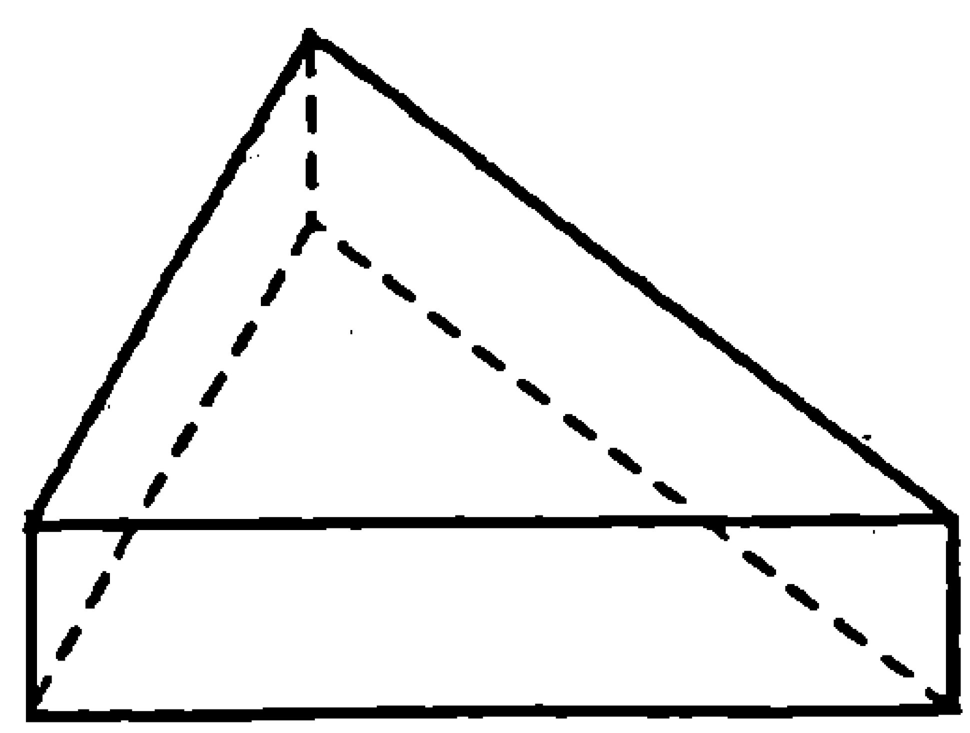
Như vậy, nếu chúng ta thực hiện phép biến hình topo để chuyển khối này sang khối khác thì vẫn áp dụng được (5-1), mặc dù hình dạng, kích thước của nó thay đổi. Đó là tính chất topo trong (5-1). Do vậy, người ta thường gọi L.Euler là ông tổ của topo.



Hình 5-4

Bây giờ ta áp dụng (5-1) cho các khối đa diện. Chẳng hạn, đối với hòn tẩy như hình 5-4, ta có (bạn đếm được không khó khăn lắm): d = 8, f = 6 và c = 12. Theo (5-1), ta có:

$$8 + 6 = 12 + 2.$$



Hình 5-5

Bây giờ ta cắt đôi hòn tẩy theo một mặt phẳng chéo (mặt phẳng chứa hai cạnh đối diện) của hình 5-4, được hình 5-5.

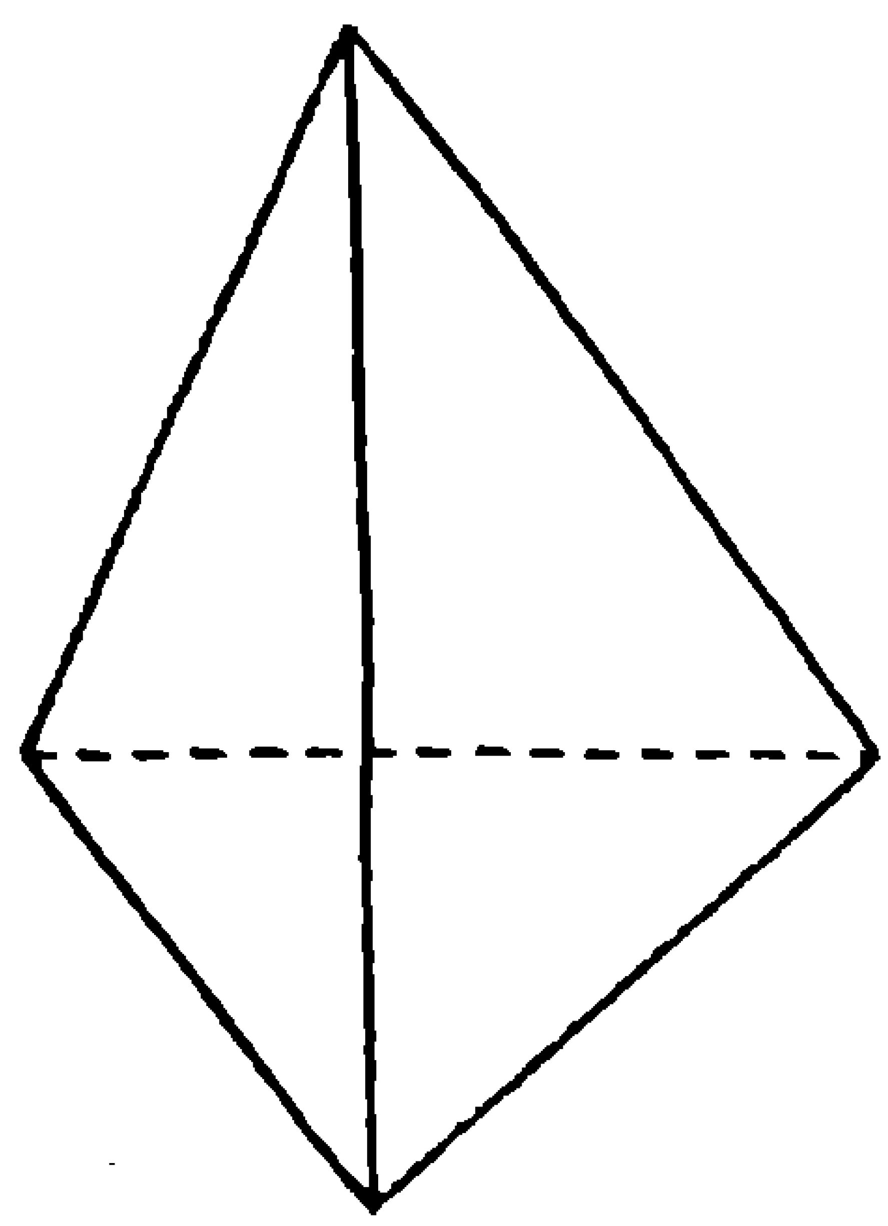
Tương tự như ở trên ta đếm được: d = 6, f = 5 và c = 9. Ta có:

$$6 + 5 = 9 + 2.$$

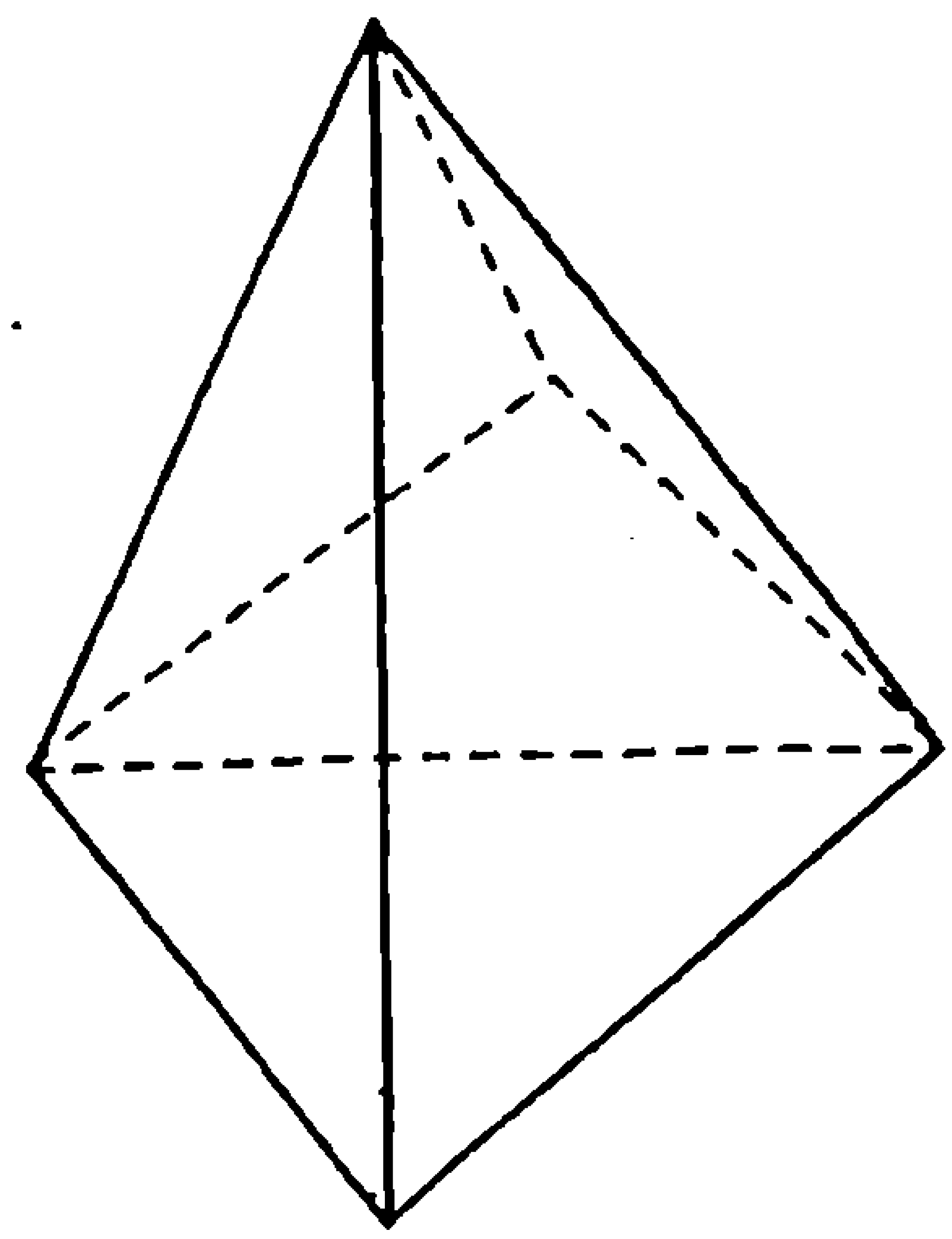
Với hình khối như hình 5-6, ta cũng được kết quả tương tự:

$$4 + 4 = 6 + 2.$$

Nếu có hai khối như hình 5-6 rồi ghép hai mặt như nhau lại thì vẫn được kết quả tương tự (hình 5-7):



Hình 5-6



Hình 5-7

$$5 + 6 = 9 + 2.$$

Với những hình khối phức tạp như đèn ông sao trong Tết Trung Thu, ta vẫn có kết quả tương tự:

$$15 + 22 = 35 + 2.$$

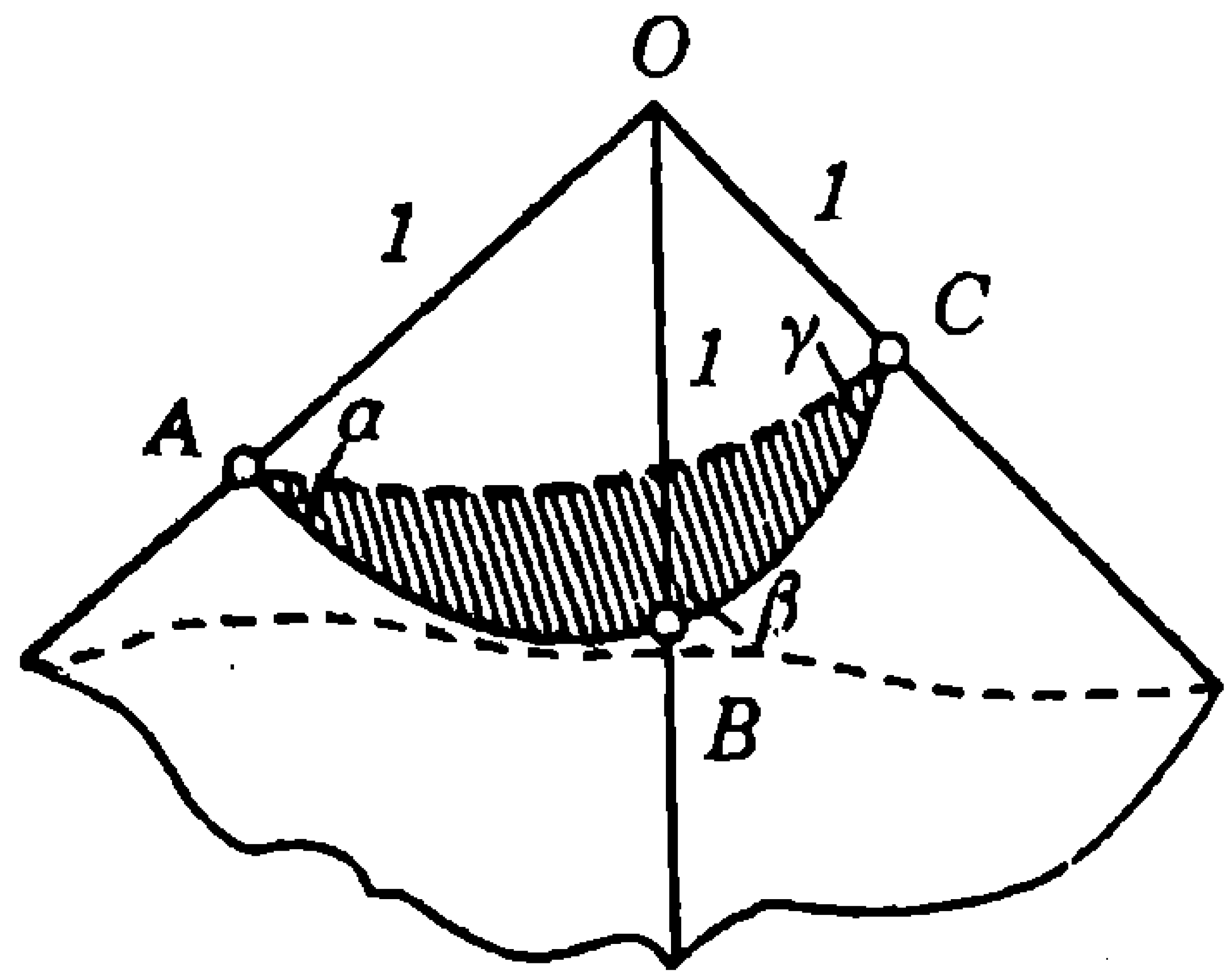
6. SUY NGHĨ PHI THƯỜNG CỦA R.DESCARTES

Bây giờ ta nói về suy nghĩ phi thường của nhà toán học R.Descartes người Pháp. Năm 1635, ông đã đưa ra công thức (5-1) nổi tiếng như đã nói ở mục 5. Năm 1650, sau khi ông bị ốm chết ở Stockholm (thủ đô Thụy Điển), bản thảo về lý thuyết vật thể đa diện đã được bạn ông là Claulouslier cất giữ. Năm 1675, G.W.von Leibniz may mắn được xem qua bản thảo này ở Paris và sao chụp những phần quan trọng trong đó bằng chữ Latinh. Sau này di cảo của R.Descartes qua tay nhiều người nên bị thất lạc, do đó người ta đành phải tìm đến bản sao của G.W.von Leibniz, dịch trở lại tiếng Pháp để xuất bản chính thức.

Bản thảo của R.Descartes đã đưa ra (5-1) và chứng minh bằng phương pháp hoàn toàn khác. Để làm rõ suy nghĩ phi thường của R.Descartes, người sáng lập ra môn hình học giải tích, chúng ta cần phải bắt đầu từ khái niệm về góc khối.

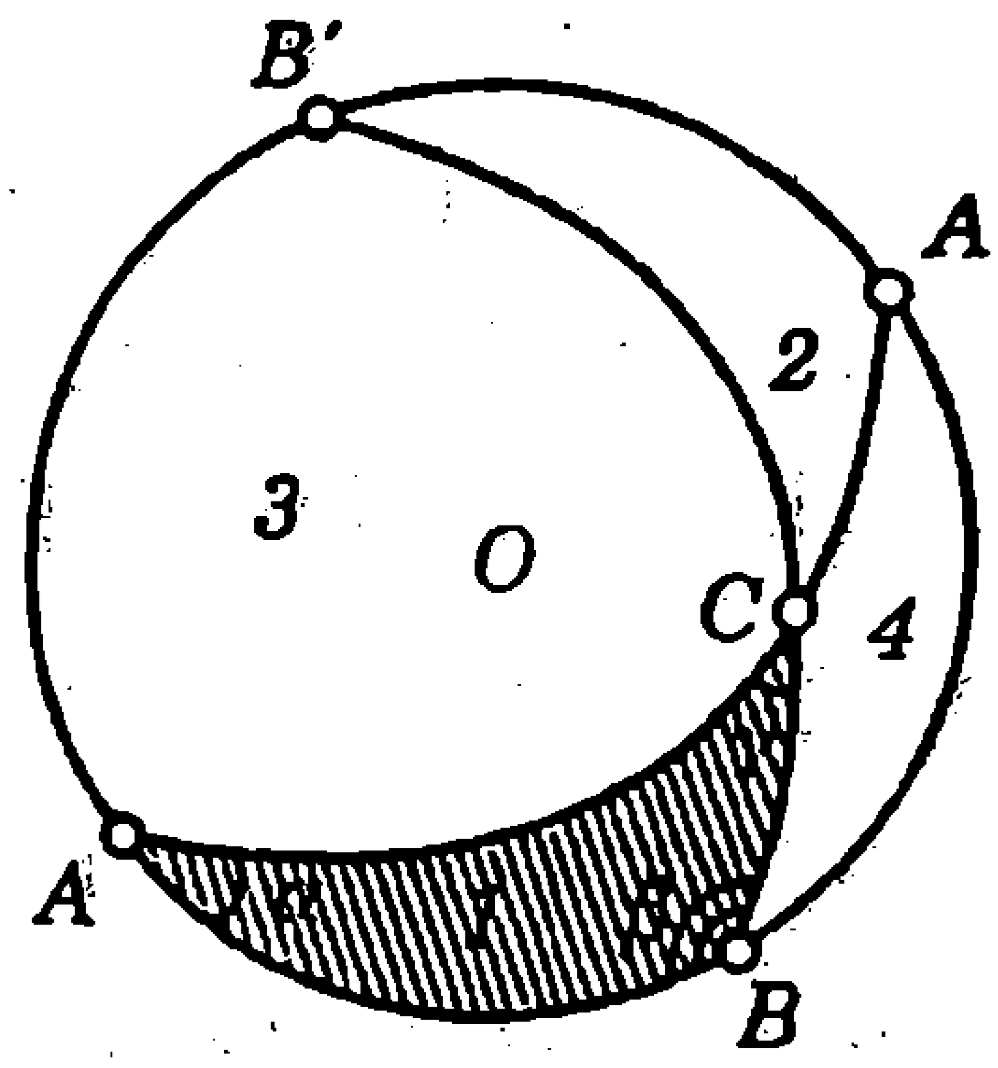
Góc khối chỉ phần không gian là giao của ba nửa không gian xác định bởi ba mặt phẳng đi qua đỉnh O, đôi một cắt nhau (ba giao tuyến qua đỉnh O không cùng nằm trong một mặt phẳng). Độ lớn của góc khối được đo bằng diện tích của miền "tam giác cầu" cắt ra bởi góc khối trên một mặt cầu đơn vị lấy đỉnh góc làm tâm của mặt cầu. Độ lớn của góc khối ở hình 6-1 dùng diện tích của miền "tam giác cầu" ABC để đo. Dễ dàng chứng minh được rằng, diện tích δ_1 của miền này trong hình 6-1 bằng:

$$\delta_1 = \alpha + \beta + \gamma - \pi \qquad (6\text{-}1)$$



Hnh 6-1

Thực vậy, như hình 6-2, trên mặt cầu đơn vị O, các đường tròn chứa các cung tròn AB, BC và AC chia nửa mặt cầu thành bốn bộ phận 1, 2, 3 và 4. A, A' và B, B' trong hình 6-2 hiển nhiên là hai cặp điểm đối tâm. Thông qua các tính toán đơn giản, có thể thấy được diện tích của bốn bộ phận δ_1, δ_2, δ_3, và δ_4 thoả mãn:

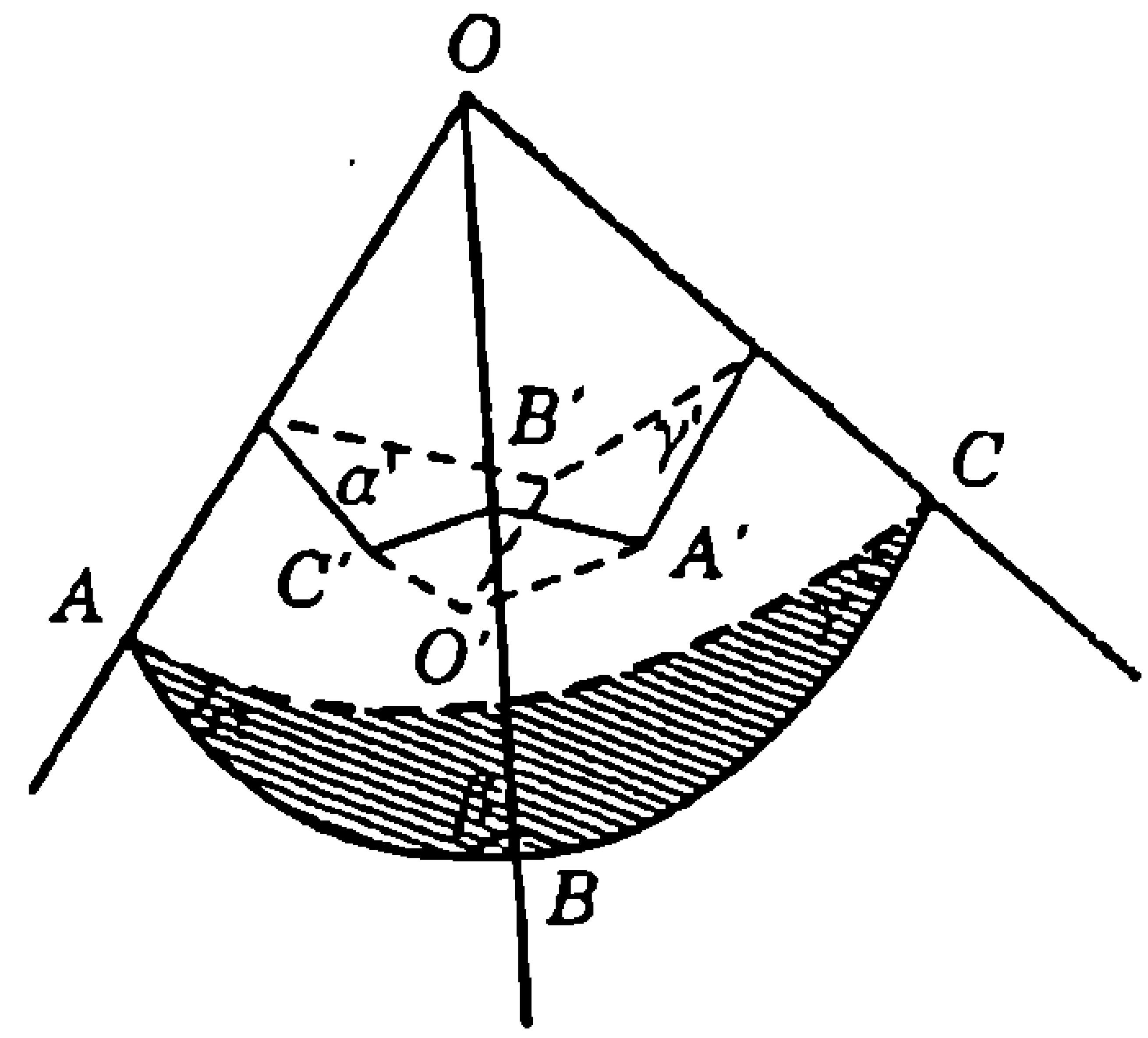


Hình 6-2

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_3 = \dfrac{\beta}{2\pi} \times 4\pi = 2\beta \\ \delta_1 + \delta_4 = \dfrac{\alpha}{2\pi} \times 4\pi = 2\alpha \\ \delta_1 + \delta_2 = \dfrac{\gamma}{2\pi} \times 4\pi = 2\gamma \\ \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = 2\pi \end{cases} \tag{6-2}$$

Từ (6-2), ta được (6-1).

Tương tự như tìm góc bù của một góc trong hình học phẳng, một góc khối bù của một góc khối có thể tìm được như sau (hình 6-3): Lấy điểm O' ở trong góc khối O - ABC đã biết, từ O' vạch các đường vuông góc O'A', O'B' và O'C' với các mặt, thì góc khối O' - A'B'C' chính là góc khối bù của góc khối O - ABC.



Hình 6-3

Dễ thấy rằng, ba góc phẳng a', b' và c' của góc khối bù, bù lần lượt với α, β và γ. Từ đó, độ lớn của góc khối ban đầu O - ABC có thể biểu thị là:

$$\delta_1 = \alpha + \beta + \gamma - \pi = (\pi - a') + (\pi - b') + (\pi - c') - \pi$$

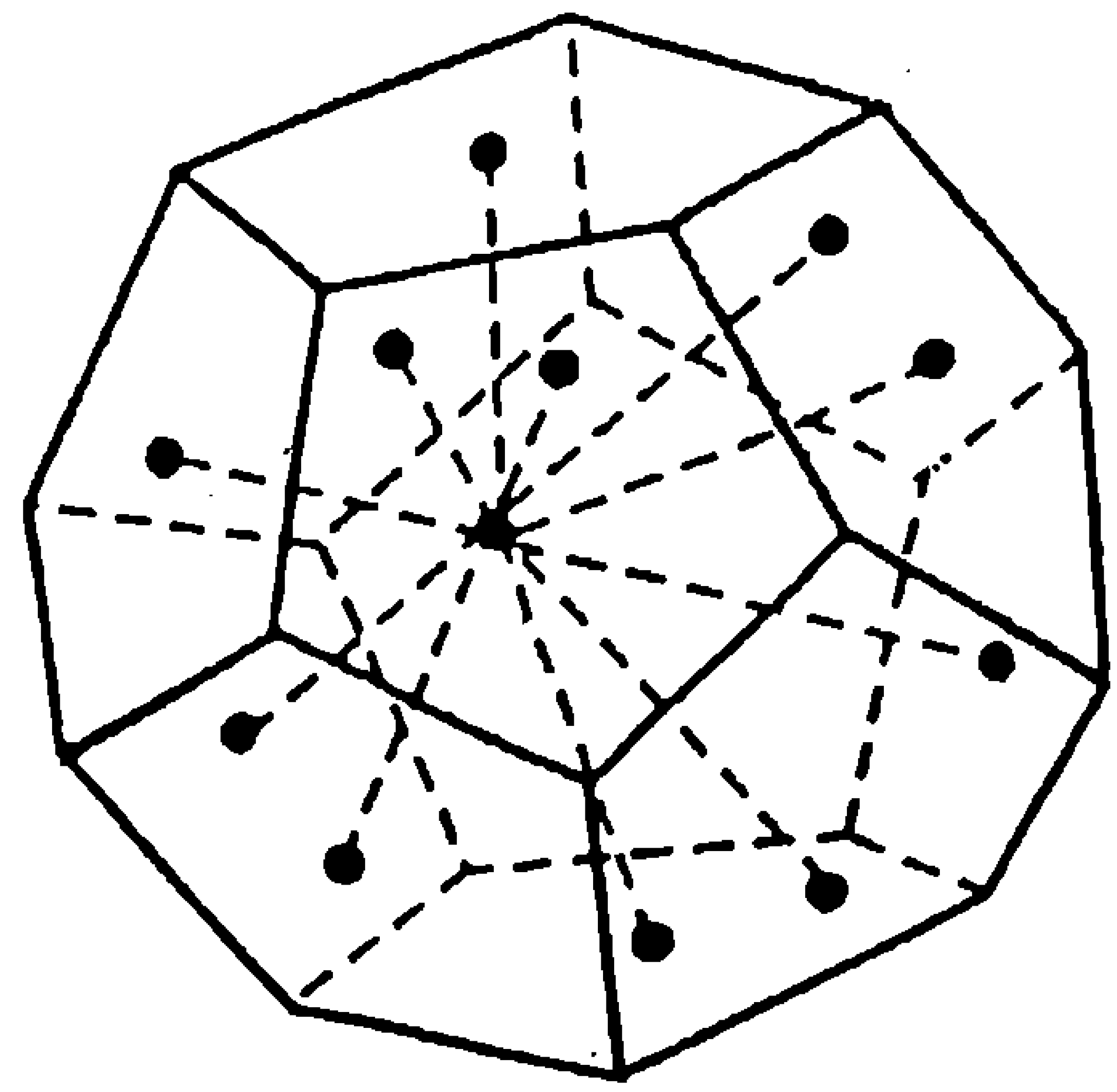
$$= 2\pi - (a' + b' + c') \qquad (6\text{-}3)$$

Tương tự, độ lớn của góc khối bù O' - A'B'C' có thể biểu thị là:

$$\delta_1' = 2\pi - (a + b + c) \qquad (6\text{-}4)$$

trong đó a, b, c là các góc phẳng của góc khối ban đầu O - ABC.

Bạn đọc chắc hẳn đã biết rằng: Tổng các góc ngoài của một hình đa giác lồi phẳng bằng 2π, tức là tổng các góc bù của tất cả các góc trong bằng 2π. Vậy đối với khối đa diện lồi trong không gian (hình 6-4), tổng các góc khối bù của tất cả các góc khối ở đỉnh, có phải cũng có quan hệ tương tự không? Vì thế, chúng ta vạch các đường thẳng từ điểm O bên trong khối đa diện vuông góc với các mặt của khối đa diện. Từ hình 6-4 không khó nhận ra là: Tất cả các góc khối bù của góc khối ở đỉnh của khối đa diện vừa vặn chiếm toàn bộ không gian xung quanh điểm O, do đó tổng của nó phải bằng diện tích mặt cầu đơn vị, tức là 4π.



Hình 6-4

Sau đây chúng ta trở lại suy nghĩ của R.Descartes:

Gọi số đỉnh của khối đa diện là d, số mặt là f và số góc trong của mặt thứ i (cũng là số biên) là ni. Vậy tổng g của tất cả các góc trong là:

$$g = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_f. \tag{6-5}$$

Rồi dùng Σ để biểu thị tổng các góc trong của tất cả các mặt, thì theo kết luận tổng các góc khối bù của khối đa diện là 4π đã nói ở trên, ta được:

$$4\pi = 2\pi \times d - \Sigma \tag{6-6}$$

Tổng các góc trong của mặt thứ i là $(n_i - 2)\pi$. Từ đó toàn bộ góc trong của f mặt cộng với nhau sẽ được:

$$\begin{aligned} \Sigma &= (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi + \ldots + (n_f - 2)\pi \\ &= (n_1 + n_2 + \ldots + n_f)\pi - 2\pi f \\ &= \pi g - 2\pi f \end{aligned} \tag{6-7}$$

Thay (6-7) vào (6-6), ta có:

$$4\pi = 2\pi d - (\pi g - 2\pi f)$$

hay là:

$$g = 2(d + f) - 4. \tag{6-8}$$

Đây chính là kết quả mà R.Descartes để lại cho đời sau.

Công thức Descartes (6-8) cách (5-1) thực tế chỉ có một bước. Thành công của L.Euler chỉ là do ông đưa vào khái niệm số cạnh, từ đó phá các luật lệ của hình học cổ điển, xây dựng trật tự mới của topo học.

Nếu gọi số cạnh của khối đa diện là c thì số các góc trong của các mặt của khối đa diện vừa bằng hai lần số cạnh, tức là:

$$g = 2c. \tag{6-9}$$

Từ (6-9) và (6-8), ta có (5-1).

Một ứng dụng đơn giản của (5-1) về khối đa diện là chứng minh khối đa diện đều chỉ có năm loại. Thực vậy, giả sử mỗi mặt của khối đa diện đều là hình p cạnh đều, mà qua mỗi đỉnh đều có q cạnh thì ta có:

$$\begin{cases} qd = 2c \\ pf = 2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{2c}{q}; \ f = \dfrac{2c}{p} \end{cases} \tag{6-10}$$

Thay (6-10) vào (5-1), ta được:

$$\frac{2c}{q} + \frac{2c}{p} - c = 2$$

hay là:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{1}{c} \tag{6-11}$$

Bây giờ ta xét khối đa diện đều được tạo thành bởi các mặt là tam giác đều ($p = 3$), ta thấy:

Do tổng các góc khối phải nhỏ hơn 2π, mà góc trong của tam giác đều là $\frac{\pi}{3}$, cho nên dùng tam giác đều ghép thành góc khối, chỉ có ba khả năng: tạo thành góc đa diện đều, góc tứ diện đều và góc ngũ diện đều.

Tại sao lại không thể ghép thành góc lục diện đều? Bởi vì sẽ tạo thành góc khối $\frac{\pi}{3} \times 6 = 2\pi$, tức là một mặt phẳng chứ không phải là góc khối nữa.

Do vậy, nếu ta thay $p = 3$, $q = 3$; 4 và 5 vào (6-11), ta được ba nghiệm 1; 2 và 4 trong bảng 6-1.

Khối đa diện đều được tạo thành từ các mặt là hình vuông ($p = 4$) thì sao? Góc trong của hình vuông là $\frac{\pi}{2}$, cho nên từ các mặt hình vuông chỉ có thể tạo thành góc tam diện đều. Thay các trị số vào (6-11) ta tính được nghiệm 4 trong bảng 6-1.

Thế còn các mặt hình ngũ giác đều ($p = 5$) tạo thành khối đa diện đều thì sao?

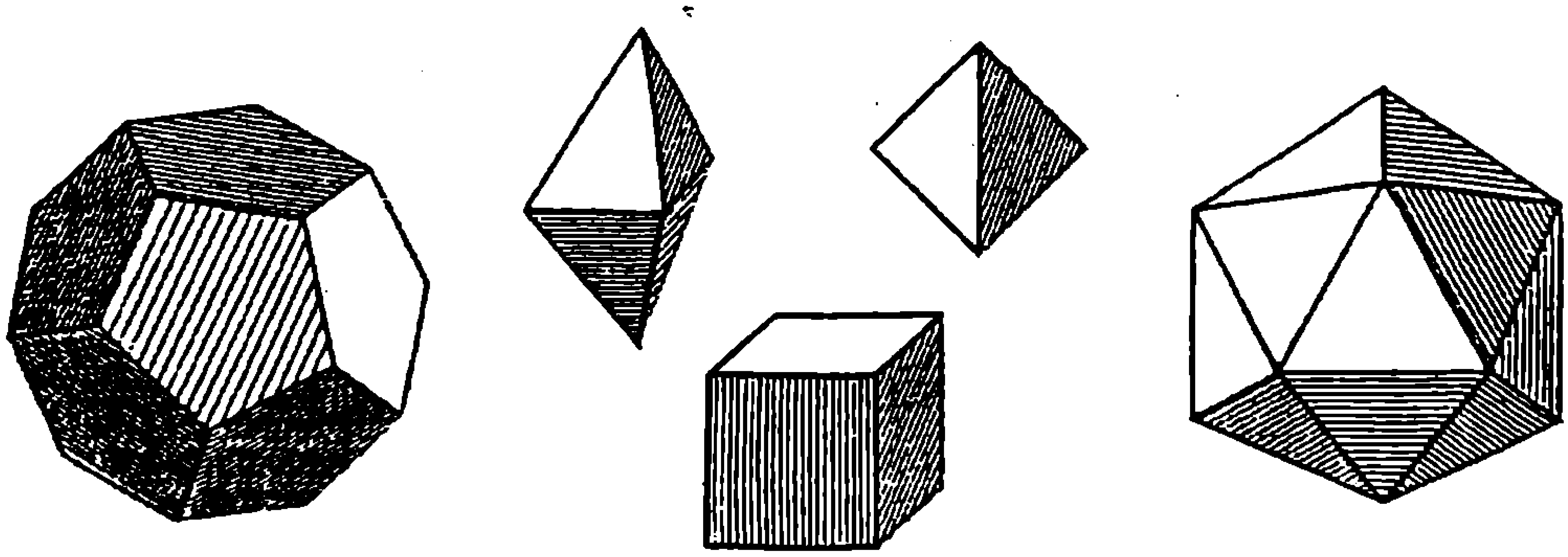
Góc trong của hình ngũ giác đều là $\frac{3\pi}{5}$, cho nên từ các mặt hình ngũ giác đều chỉ có thể tạo thành góc khối tam diện đều. Thay các trị số vào (6-11), ta được nghiệm 5 trong bảng 6-1.

Bảng 6-1

Nghiệm	p	q	d	f	c	Tên khối đa diện đều
1	3	3	4	4	6	Tứ diện đều (4 mặt đều)
2	3	4	6	8	12	Bát diện đều (8 mặt đều)
3	4	3	8	6	12	Lục diện đều (6 mặt đều) (Lập phương)
4	3	5	12	20	30	Nhị thập diện đều (20 mặt đều)
5	5	3	20	12	30	Thập nhị diện đều (12 mặt đều)

Như vậy khối đa diện đều chỉ có năm loại, tức là (6-11) chỉ có năm nghiệm số nguyên dương như bảng 6-1.

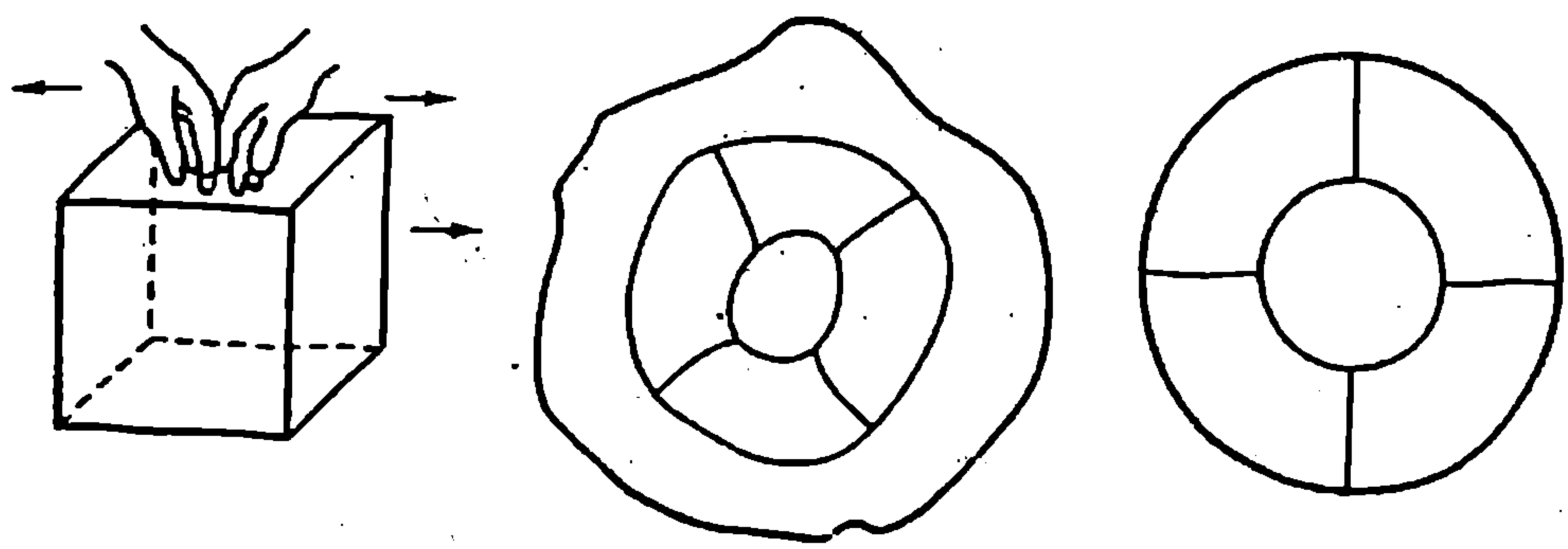
Các hình khối đa diện đều tương ứng với năm nghiệm ở bảng 6-1 như ở hình 6-5.



Hình 6-5

Cuối cùng, điều cần nói thêm là: Phương trình (6-11) về khối đa diện đều chỉ là một trường hợp đặc biệt của (5-1) trong mặt phẳng. Thực vậy, chúng ta dễ dàng dùng phương pháp sau đây, trải bề mặt của khối đa diện thành một hình phẳng: giả sử bề mặt của khối đa diện là một lớp màng cao su tự co giãn, mà bên trong khối đa diện là rỗng. Bây giờ trên một mặt màng cao su đục một lỗ, sau đó chọc ngón tay vào lỗ và kéo giãn ra xung quanh, trải thành mặt phẳng. Hình 6-6 thể hiện quá trình trải bề mặt của một khối lập phương (hình 6-6a). Hình 6-6b có ranh giới ngoài cùng không gọn gàng, trên thực tế là đường viền của lỗ thủng. Nếu chúng ta sửa chữa các đoạn trên đường ranh giới thành hình dễ coi hơn sẽ được hình 6-6c. Hình 6-6c gọi là hình topo phẳng của khối lập phương. Các khối đa diện khác khối lập phương cũng có thể thu được một hình topo phẳng tương ứng một cách tương tự. Từ đó chuyển vấn đề bề mặt khối đa diện thành vấn đề trên mặt phẳng để tiến hành giải quyết.

Đây chính là lý do vì sao công thức (5-1) có thể ứng dụng vào bề mặt khối đa diện.

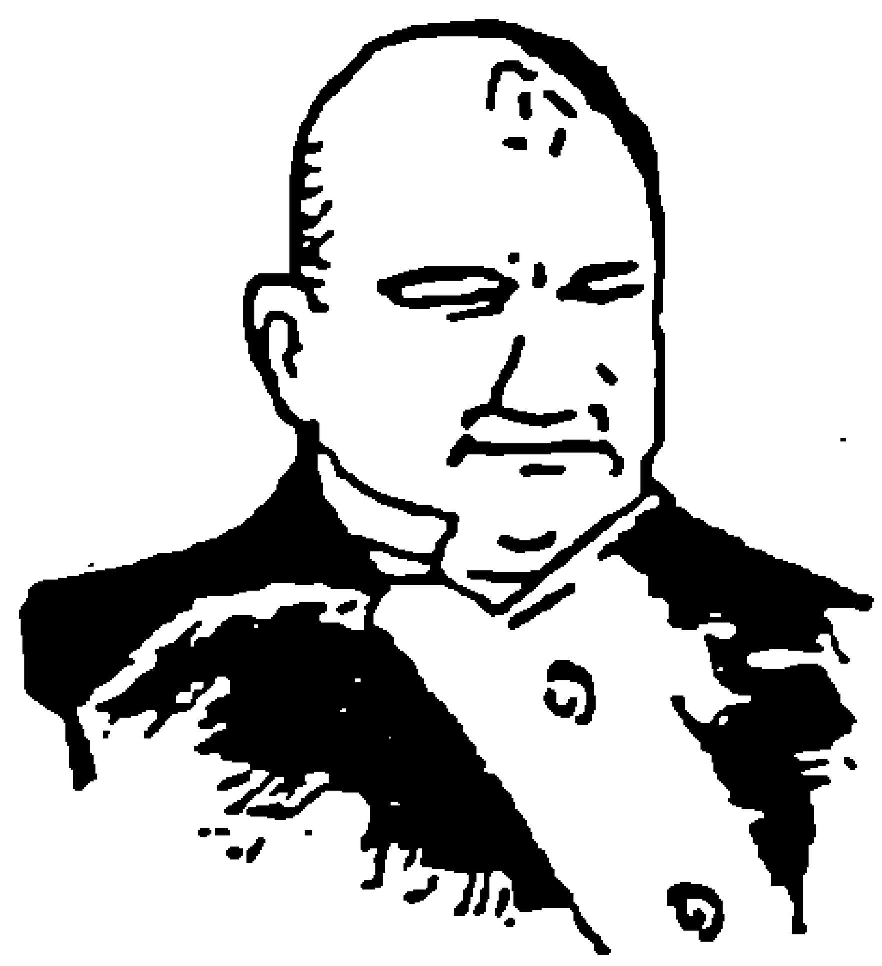


Hình 6-6

7. "TRÒ CHƠI CHU DU THẾ GIỚI" CỦA W.R.HAMILTON

Trong đội ngũ của nhà toán học, thần đồng như W.R.Hamilton là rất hiếm.

William Rowan Hamilton (4/8/1805 - 2/9/1865) người Ireland, sinh ở Dublin. Thiên tài của ông được thể hiện ngay từ khi còn rất nhỏ và được phát triển nhanh một cách kỳ lạ. Năm 3 tuổi ông đã biết chữ, năm 12 tuổi đã thành thạo số ngoại ngữ bằng số tuổi mình. Năm 10 tuổi ông đã đọc xong bộ "Nguyên lý" của Euclid bằng tiếng Latinh, 13 tuổi ông đã nắm vững nội dung cuốn "Số học đại cương" của I.Newton. Năm 16 tuổi ông đã viết bài sửa lại chỗ sai lầm trong chứng minh của nhà toán học nổi tiếng Pierre - Simon de Laplacce (23/3/1749 - 5/3/1827) người Pháp. Năm 22 tuổi ông được bầu là giáo sư của Trường đại học Tổng hợp Dublin và 32 tuổi ông là Chủ tịch Viện Hàn lâm khoa học Ireland, sau đó được bầu là Viện sĩ thông tấn Viện Hàn lâm khoa học Nga.

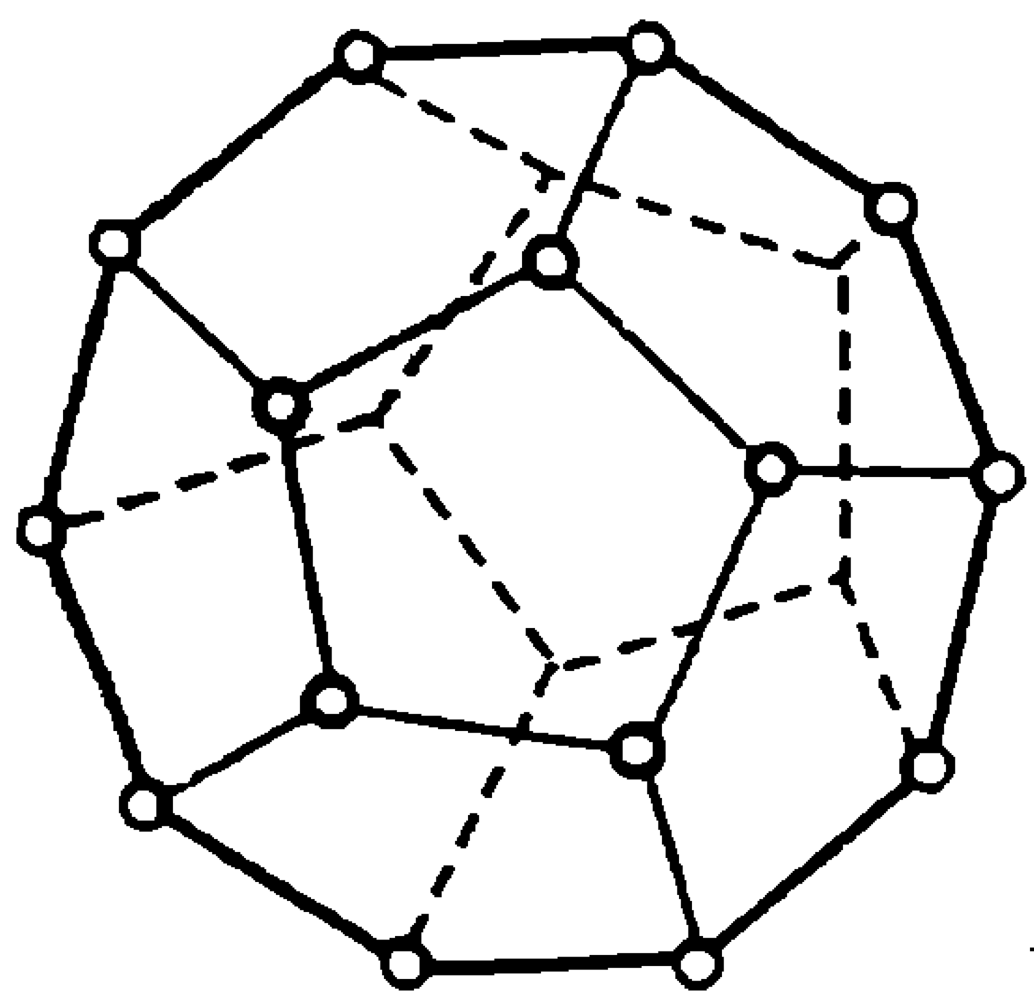


W.R. Hamilton

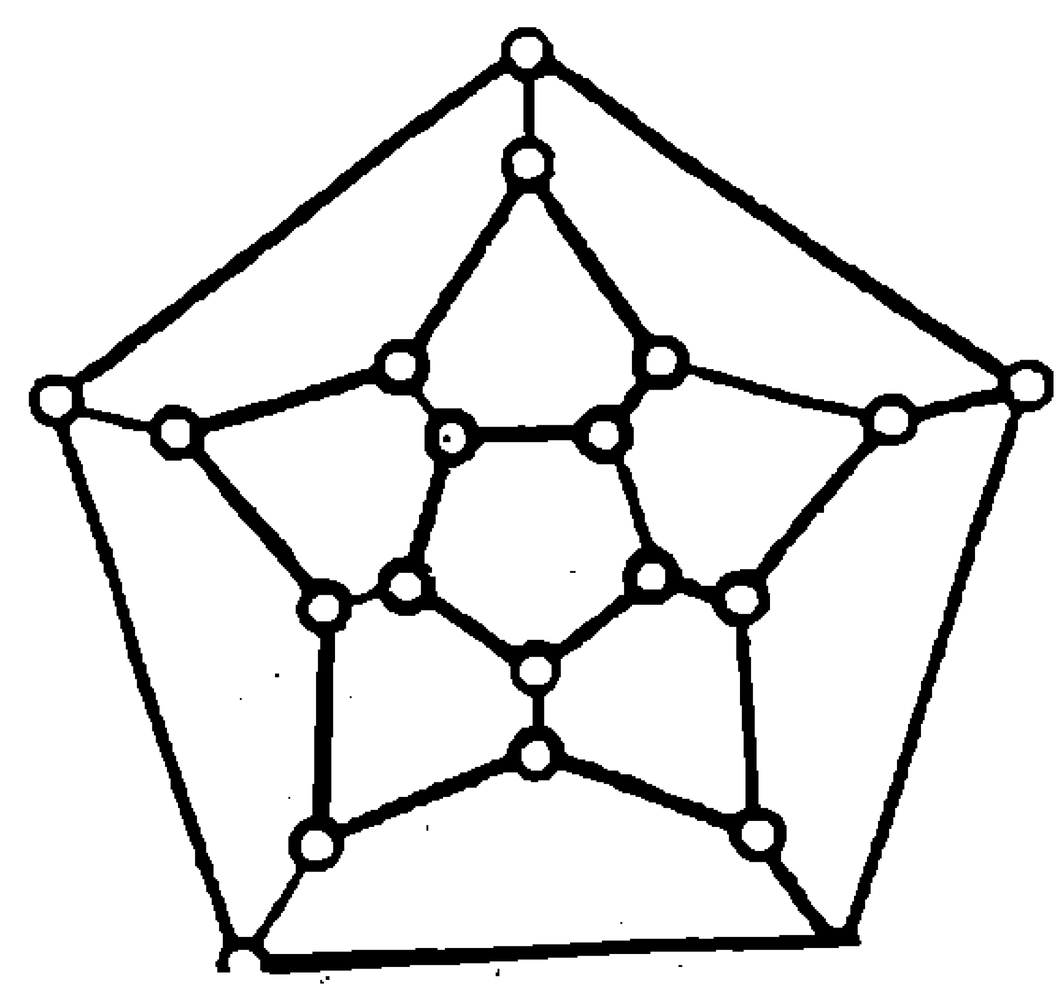
P.S de Laplace

W.R.Hamilton có trí nhớ kỳ lạ, có óc phán đoán logic, phát triển tới mức hoàn mỹ và có năng khiếu về tính nhẩm tuyệt diệu. Ông là tác giả của hơn 140 công trình khoa học đã được in.

Năm 1856, W.R.Hamilton phát minh ra một trò chơi độc đáo, gọi là "Trò chơi chu du thế giới". Phần chính của trò chơi là một khối thập nhị diện đều (khối đa diện có 12 mặt ngũ giác đều, 20 đỉnh, mỗi đỉnh có 3 cạnh quy tụ lại, hình 7-1a). Ở mỗi đỉnh có ghi tên một thành phố lớn trên thế giới. Cách chơi là: tìm một đường đi dọc theo các cạnh của khối đó và qua mỗi đỉnh (thành phố) chỉ một lần. Một đường đi như vậy gọi là một "đường đi của Hamilton" hoặc một "hành trình Hamilton". Về sau, để đơn giản ông đã thay khối đó bằng một hình topo phẳng (hình 7-1b).



a)



b)

Hình 7-1

Năm 1859, W.R.Hamilton đã cho sản xuất loại "Trò chơi chu du thế giới" này bằng gỗ để bán và trò chơi này đã thành mốt của một thời.

Mặc dù có sự giống nhau nào đó giữa "Bài toán Euler" ở mục 2 (đường đi qua mỗi cạnh) và "Hành trình Hamilton" (cũng gọi là "Bài toán Hamilton", đường đi qua mỗi đỉnh một và chỉ một lần) nhưng "Bài toán Hamilton" khó hơn rất nhiều. Bài toán này còn gọi là "Bài toán du lịch".

"Bài toán du lịch" có ý nghĩa thực tế lớn, được dùng để tìm đường đi ngắn nhất của nhân viên bưu điện đi lấy thư ở các thùng thư, tìm sơ đồ xây dựng đường ống nước, đường điện, gia công chi tiết máy tối ưu, tối ưu hoá các chương trình tính toán,...

Về mặt nguyên tắc, phải xét tất cả các hành trình có thể có (số này là hữu hạn) để chọn ra hành trình ngắn nhất. Như vậy tổng số hành trình cần phải xét là:

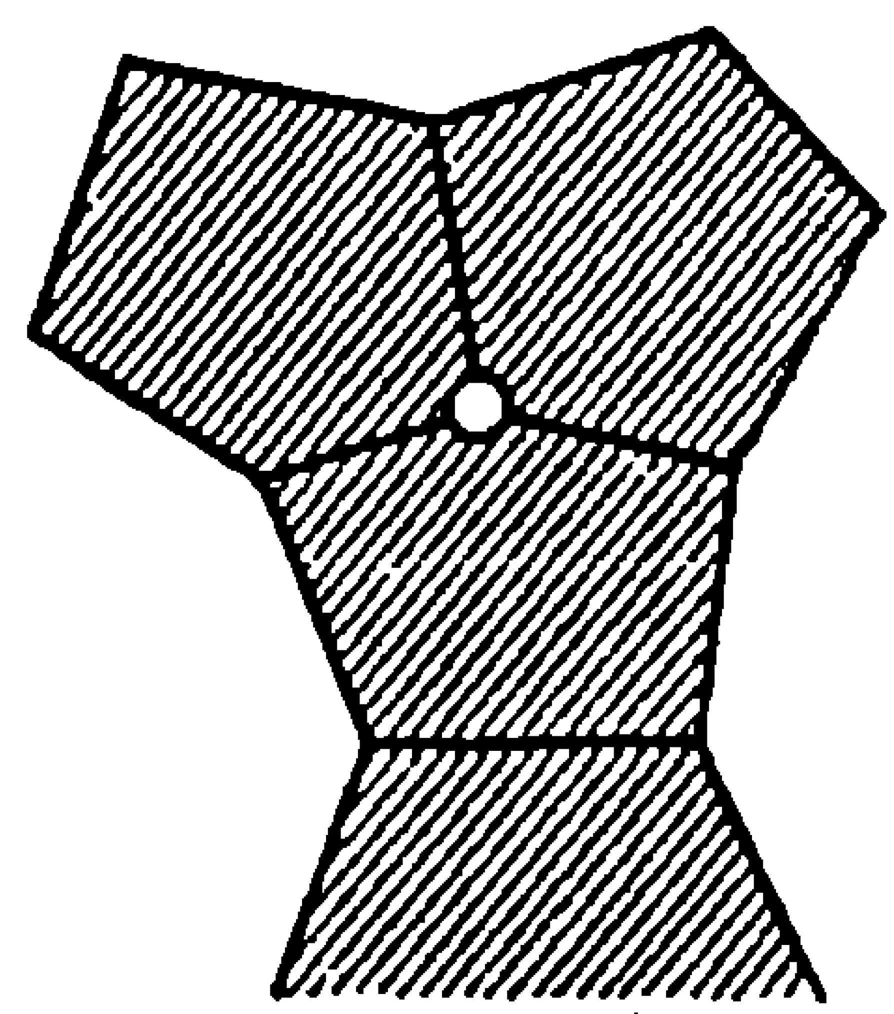
$$(n - 1) \times (n - 2)... 3 \times 2 \times 1 = (n - 1)! \qquad (7\text{-}1)$$

trong đó n là số đỉnh (thành phố) cần qua.

Chẳng hạn, với n = 11 thì số này bằng 10! Tính ra là 3628800. Nếu cần 1 phút để xét một hành trình thì ta phải mất gần 7 năm!

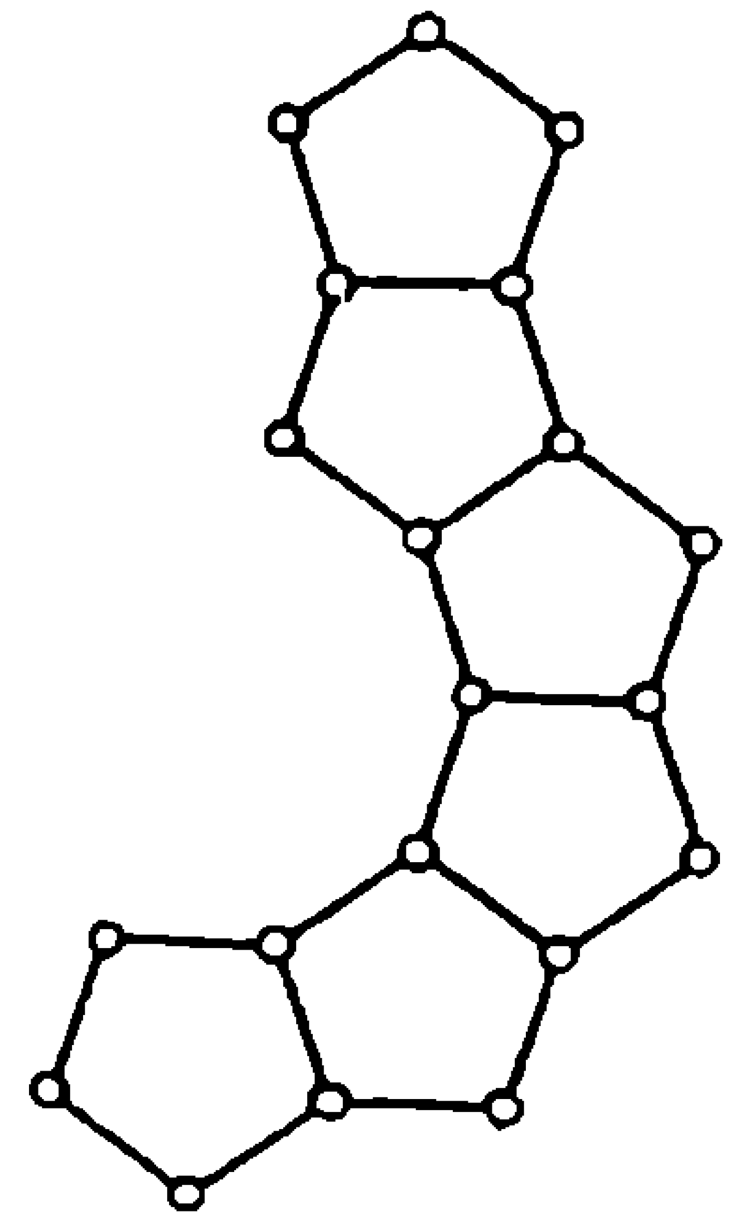
Hiện đã có rất nhiều cách giải bài toán này nhưng chưa ai vượt quá n = 70.

Bây giờ ta trở lại với hình topo phẳng của khối đa diện có 12 mặt ngũ giác đều ở hình 7-1b. Ta hãy xem một "hành trình Hamilton" cần có những điều kiện gì?

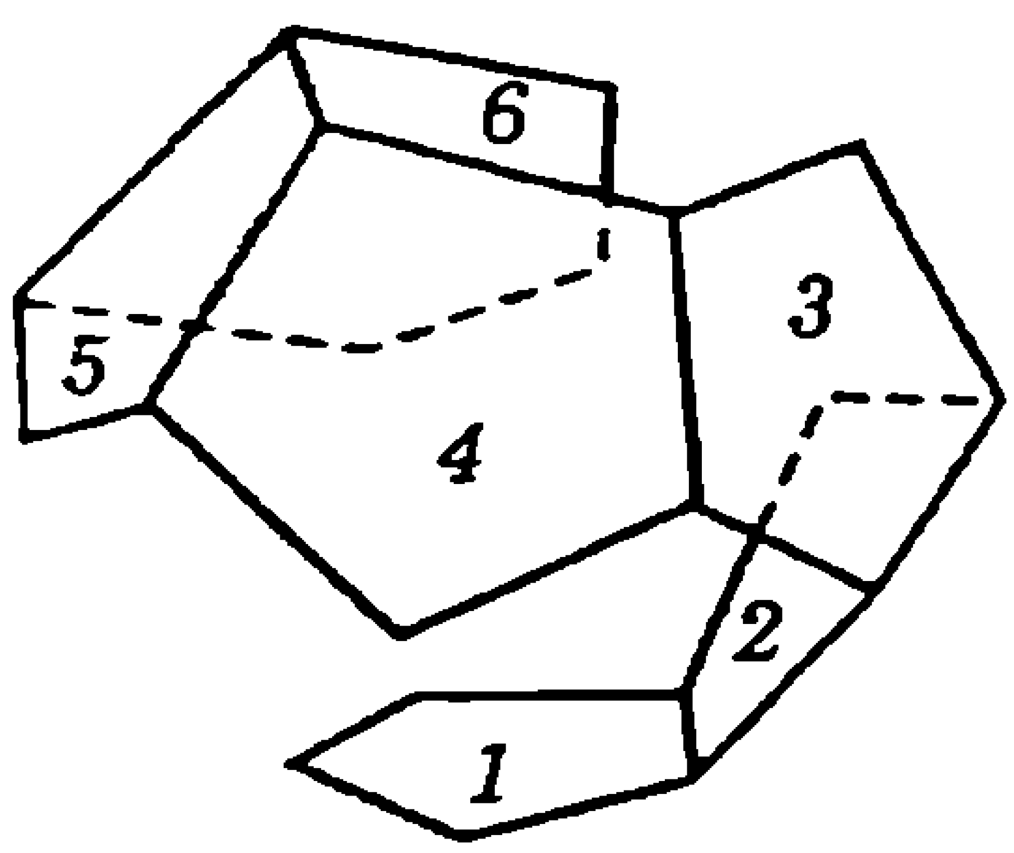


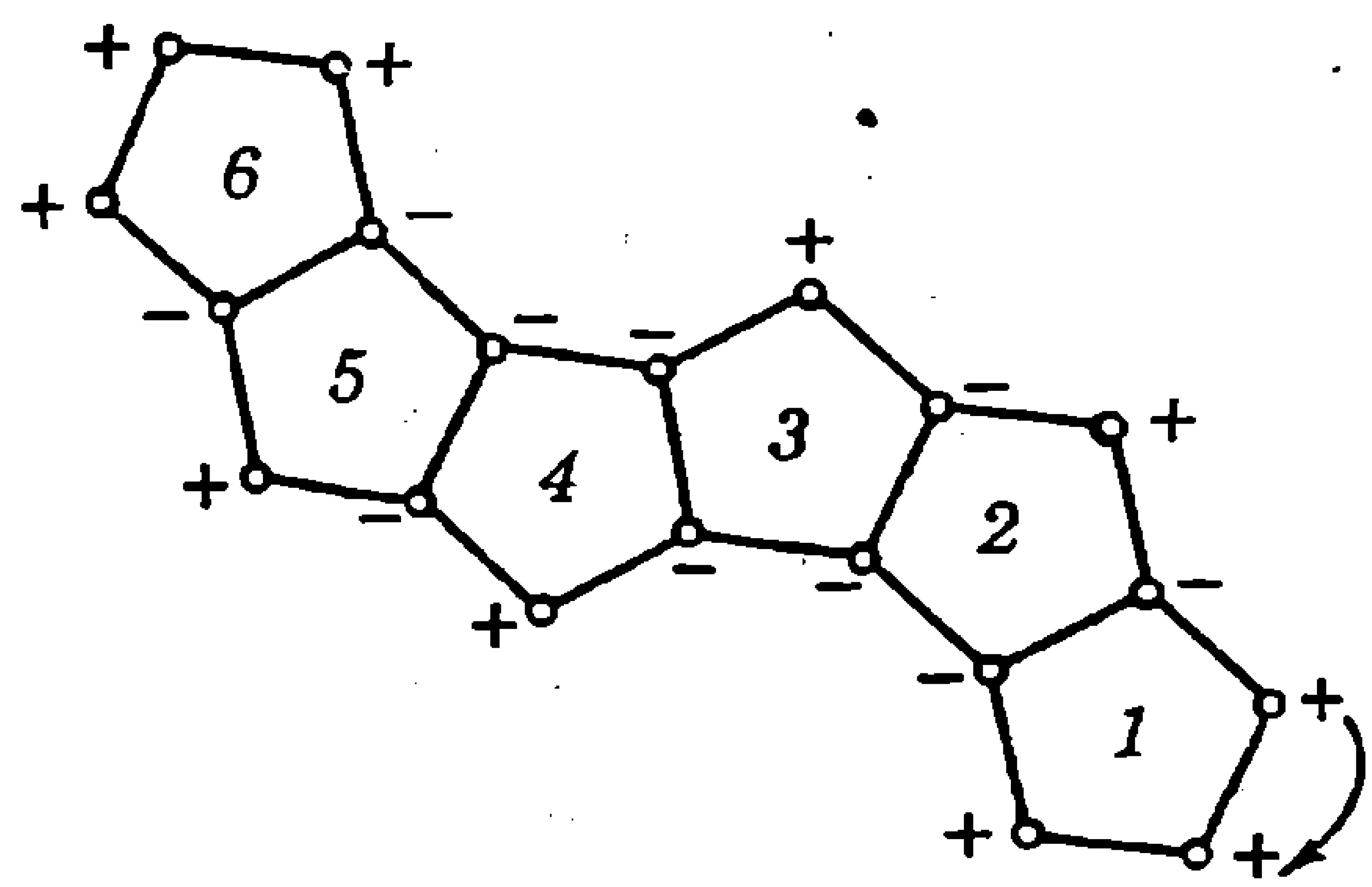
Hình 7-2

Trước tiên, do có 20 đỉnh (thành phố) và những cạnh (đường) nối giữa chúng, vì vậy điều cần là làm cho giới hạn chu vi của hình đó đơn giản. Hình 20 đỉnh này do 12 hình ngũ giác đều ghép thành, mà trong các hình ngũ giác đều này không thể có ba hình cùng điểm (đỉnh) chung. Nếu không, các điểm chung này sẽ như hình 7-2, thành điểm bên trong của hình 20 đỉnh. Từ đó cũng không thể thành điểm trên "Hành trình Hamilton" được. Điều này mâu thuẫn với "Hành trình Hamilton" bao hàm toàn bộ 20 đỉnh (điểm). Đồng thời các hình ngũ giác đều đã nói cũng không thể quây thành một hình vòng. Bởi vì, nếu như vậy thì giới hạn chu vi hình đa giác được ghép lại nhất định sẽ chia thành hai bộ phận tách rời, điều này không phù hợp với "Hành trình Hamilton". Những phân tích ở trên chứng tỏ rằng: các hình ngũ giác đều trong "Hành trình Hamilton" chỉ có thể xếp thành một chuỗi như hình 7-3.



Vấn đề ở đây là: trong hình topo phẳng của khối 12 mặt đều có thể tìm được một chuỗi hình ngũ giác đều như nói ở trên không? Câu trả lời là được! Hình 7-4 là một loại giải đáp.



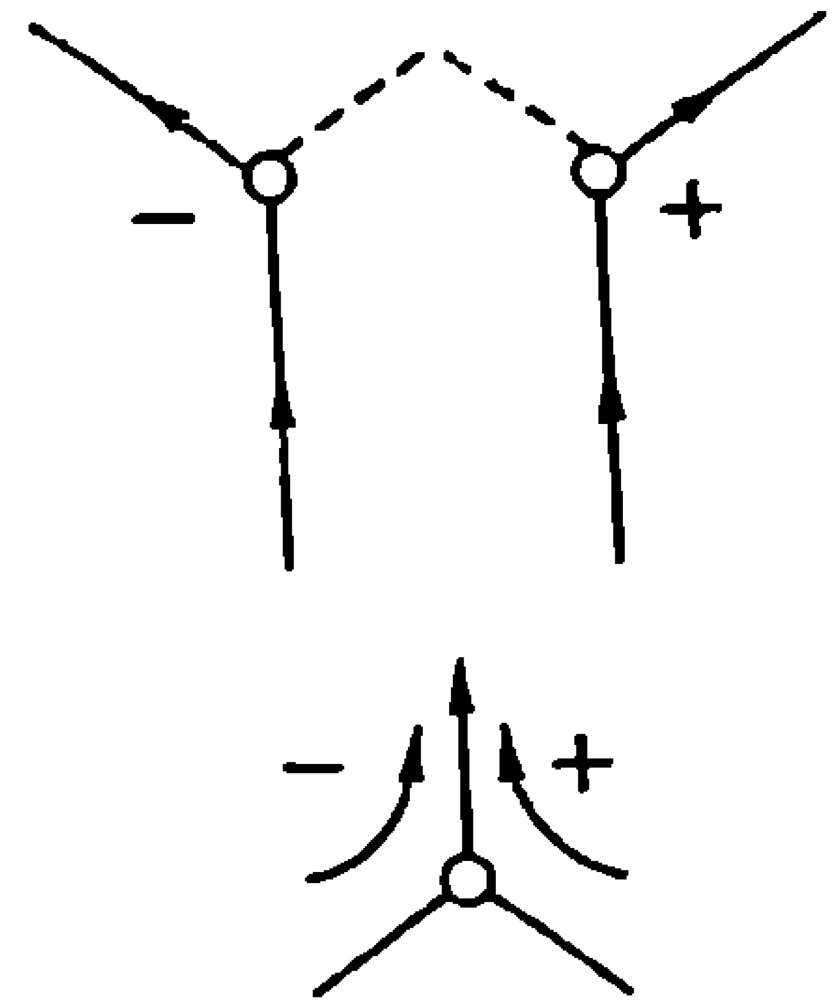


Hình 7-4

Hình 7-4a là vị trí thực tế của 6 mặt ngũ giác đều của một nửa khối 12 mặt đều. Để bạn đọc dễ theo dõi, chúng ta làm như sau: Giả sử chúng ta đi men theo một cạnh đến một đỉnh nào đó, muốn tiếp tục tiến thì sẽ có hai tình huống: rẽ phải hoặc rẽ trái. Nếu rẽ phải thì ta đánh dấu cộng "+" bên cạnh đỉnh, nếu rẽ trái thì ta đánh dấu trừ "-" bên cạnh đỉnh, như hình 7-4b. Theo hướng thuận kim đồng hồ các dấu này sẽ tuần hoàn theo chu kỳ sau đây:

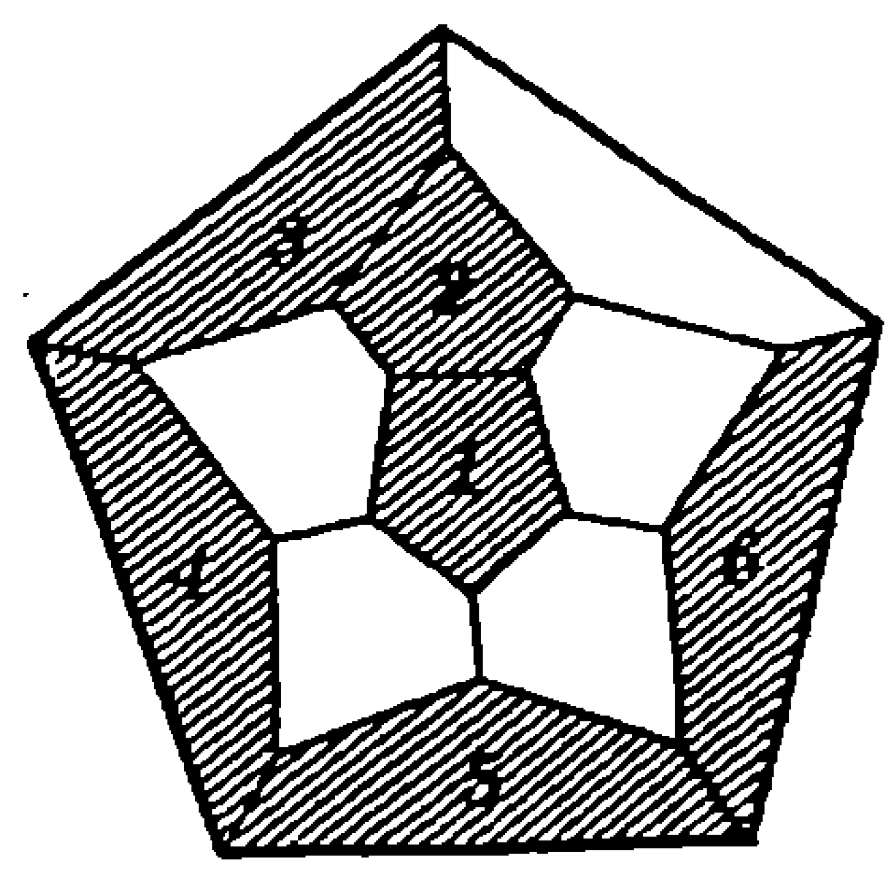
→ + + + - - - + - + - →

Bạn đọc có thể theo quy tắc này sẽ tìm được "Hành trình Hamilton" trên hình trải phẳng của khối 12 mặt đều. Hình 7-5 là một ví dụ. Ở hình 7-1b, đi theo đường nét đậm là một "Hành trình Hamilton".



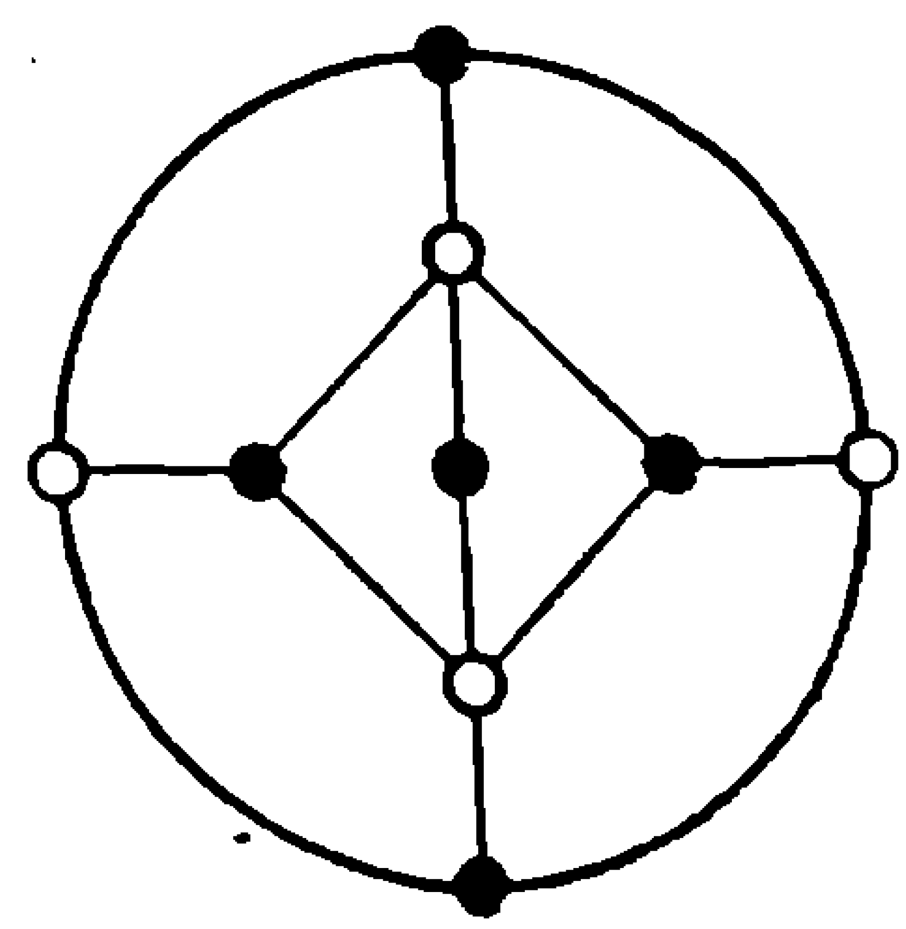
Hình 7-5

"Trò chơi chu du thế giới" của W.R.Hamilton có thể đưa được lên đa diện bất kỳ nào. Tuy nhiên, có một điều khẳng định là: không phải tất cả các hình phẳng đều tồn tại "Hành trình Hamilton". Hình 7-6 là một ví dụ không có "Hành trình Hamilton".

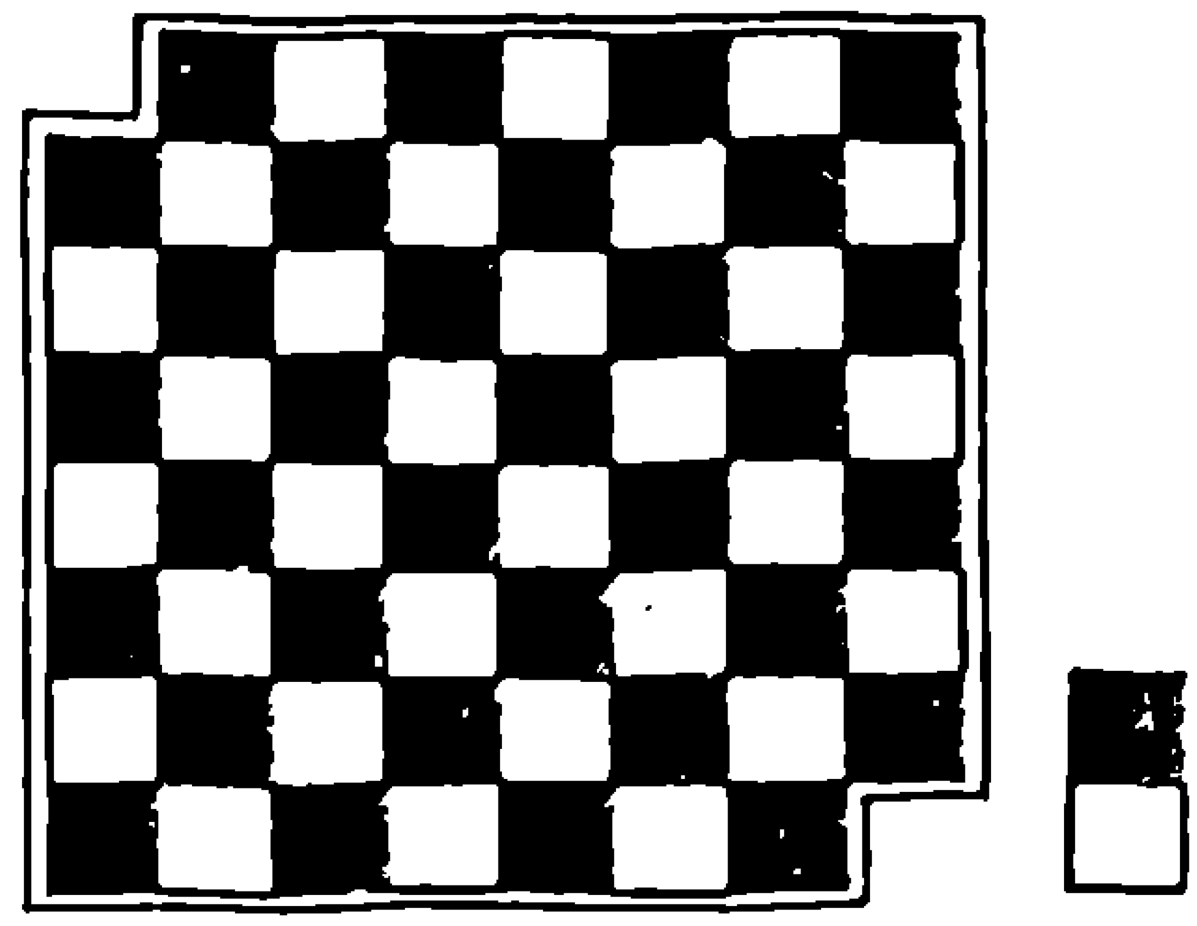


Hình 7-6

Sự thực, chúng ta có thể đánh dấu tất cả các đỉnh thành "•" và "o" như hình 7-7. Dễ nhận ra là: tất cả các đỉnh sát nhau với "•" đều là "o", còn tất cả các đỉnh sát nhau với "o" đều là "•". Như vậy, nếu "Hành trình Hamilton" tồn tại thì các đỉnh trên hành trình phải là dãy đỉnh một "•" một "o". Do dãy đỉnh đầu đuôi nối nhau như vậy, nên số đỉnh "•" và số đỉnh "o" tất phải bằng nhau. Song trong hình 7-7 lại có 5 đỉnh "•" và 4 đỉnh "o". Điều này chứng tỏ trên hình 7-7 "Hành trình Hamilton" không tồn tại.


Hình 7-7

Chứng minh như trên tương tự như trò chơi bài Domino sau đây:



Hình 7-8

Hình 7-8 là bàn cờ khuyết có 62 ô. Hỏi có thể dùng quân bài Domino 2 × 1 phủ nó được không?

Chúng ta coi quân bài Domino là do một ô trắng kết nối với một ô đen mà thành (hình 7-8). Rõ ràng là, nếu bàn cờ có thể dùng quân bài Domino phủ được thì ô trắng và đen phải nhiều như nhau. Nhưng bàn cờ cho trong trò chơi này có ô trắng và đen luôn chênh nhau 2 ô. Vì vậy, yêu cầu phủ kín bàn cờ bằng các quân bài Domino là không thể thực hiện được.

"Trò chơi chu du thế giới" của W.R.Hamilton có rất nhiều biến tướng thú vị. Câu chuyện sau đây chính là một ví dụ đặc sắc:

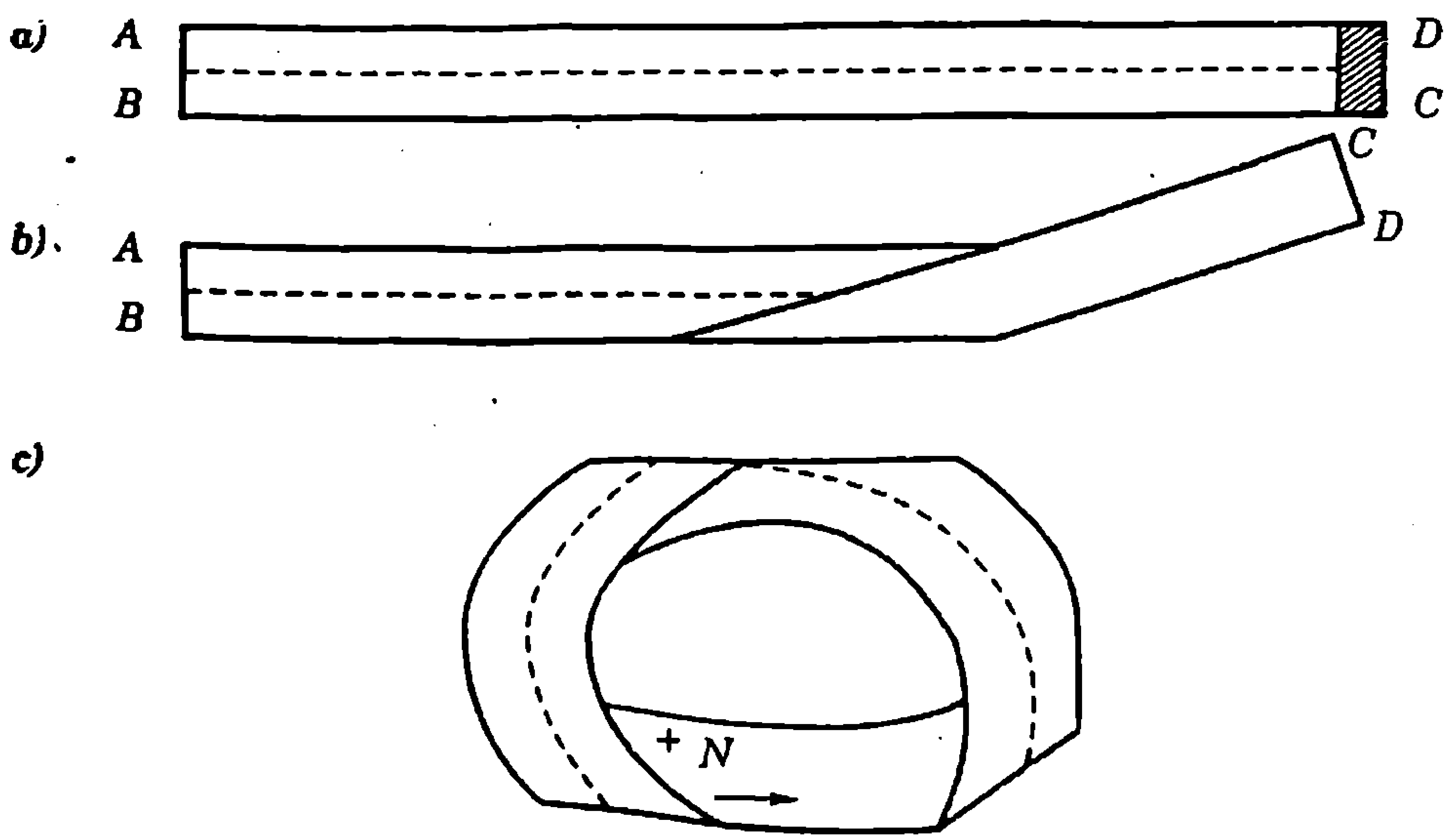
Ace (quốc vương nước Anh trong truyền thuyết) triệu kiến 2n kị sĩ trong cung. Không ngờ một kị sĩ có sự oán hận sâu sắc với nhau. Biết rằng số người oán hận của mỗi 1người không quá n - 1. Hỏi nhà vua làm sao xếp chỗ để các kị sĩ này ngồi quanh chiếc bàn tròn nổi tiếng của ông, với điều kiện là mỗi kị sĩ không ngồi cạnh người oán hận với mình?

Có thể không ít người cảm thấy khó khăn. Kỳ thực thì nếu ta coi mỗi kị sĩ là một điểm mà gạch nối giữa những người bạn hiền thành đường nét sẽ được một hình phẳng. Vấn đề bây giờ được chuyển thành: phải tìm một "Hành trình Hamilton" từ trong sơ đồ này.

8. DẢI MÖBIUS KỲ LẠ

Năm 1858, một cụ già đưa đến Viện Hàn lâm khoa học Pháp một ảo thuật toán học mang tên "mặt một phía" nhưng bị lãng quên ở kho lưu trữ. Về sau tác giả tự công bố công trình của mình và đó là một trong những ví dụ đầu tiên cho ngành toán học hiện đại: topo học. Mô hình ảo thuật này như sau:

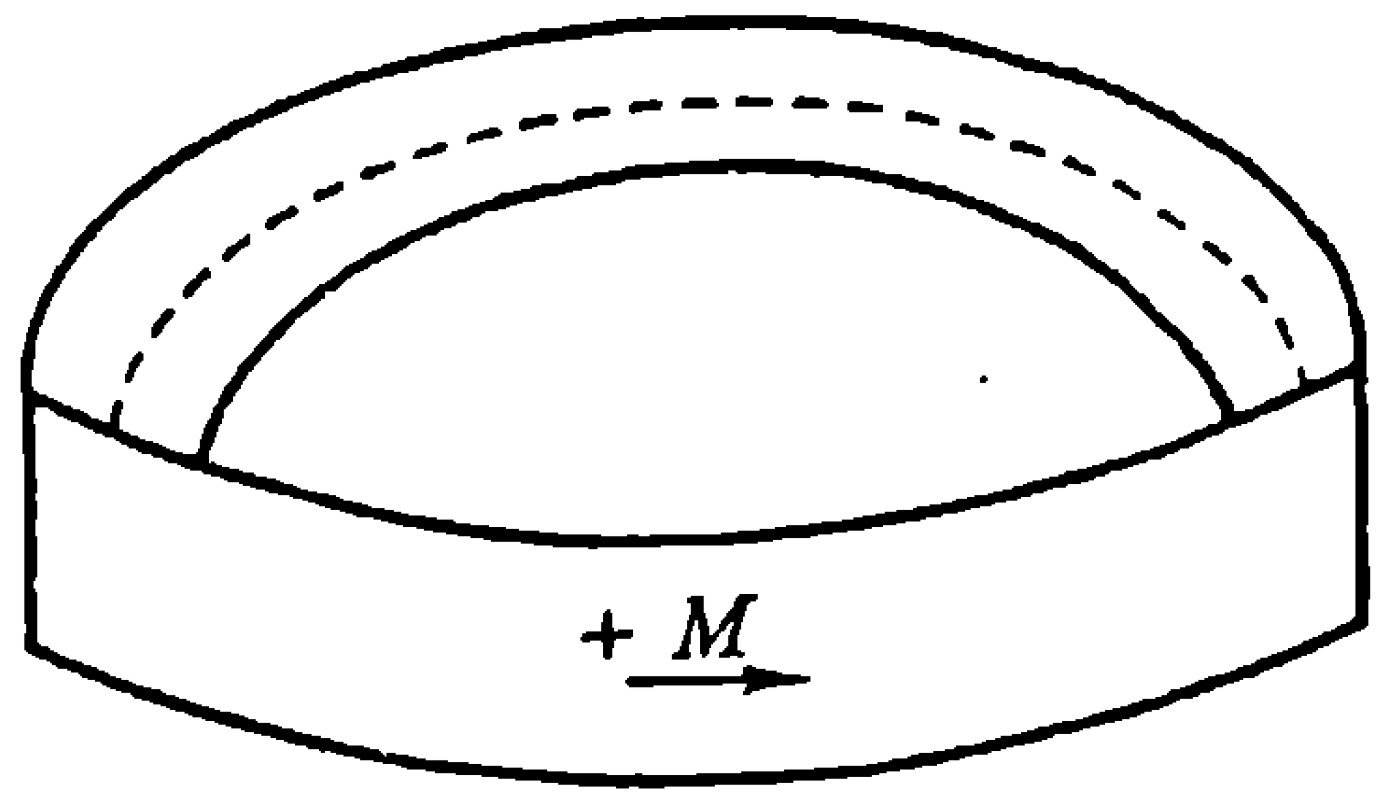
Từ băng giấy như hình 8-1a, bôi hồ vào phần gạch chéo, sau khi vặn dải giấy 180° (hình 8-1b) rồi dán cho C trùng với A, D trùng với B, ta được "mặt một phía" (hình 8-1c).



Hình 8-1

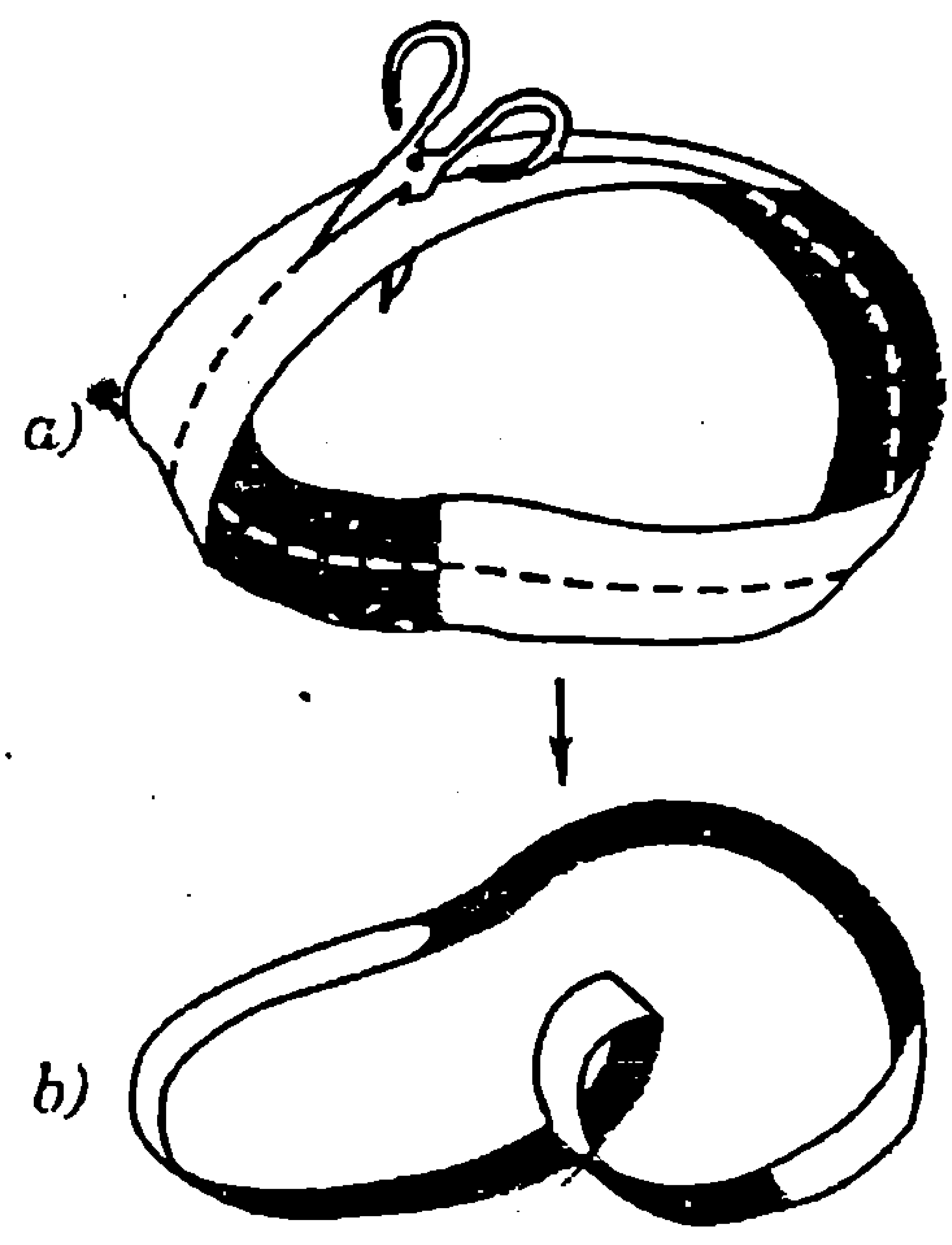
Nếu cũng từ băng giấy ở hình 8-1a, ta dán cho C trùng với B, D trùng với A (hình 8-2) thì được dải giấy bình thường như nhiều người vẫn làm để trang trí. Dải giấy này có hai mặt phân biệt:

mặt trong và mặt ngoài. Một chú kiến bò ở mặt ngoài thì bò mãi vẫn ở mặt ngoài, muốn vào mặt trong phải bò vượt qua mép, muốn bò từ điểm M một vòng rồi trở về điểm M thì chỉ bò với quãng đường bằng chu vi dải giấy (giả sử nó bò cách đều mép giấy). Các nhà toán học gọi dải giấy bình thường này là "mặt hai phía". Nó có hai phía phân biệt: phía trong và phía ngoài.



Hình 8-2

Nếu ta dùng kéo cắt theo đường nét đứt ở dải giấy "mặt hai phía" (hình 8-2) thì ta được hai dải giấy thông thường ("mặt hai phía").

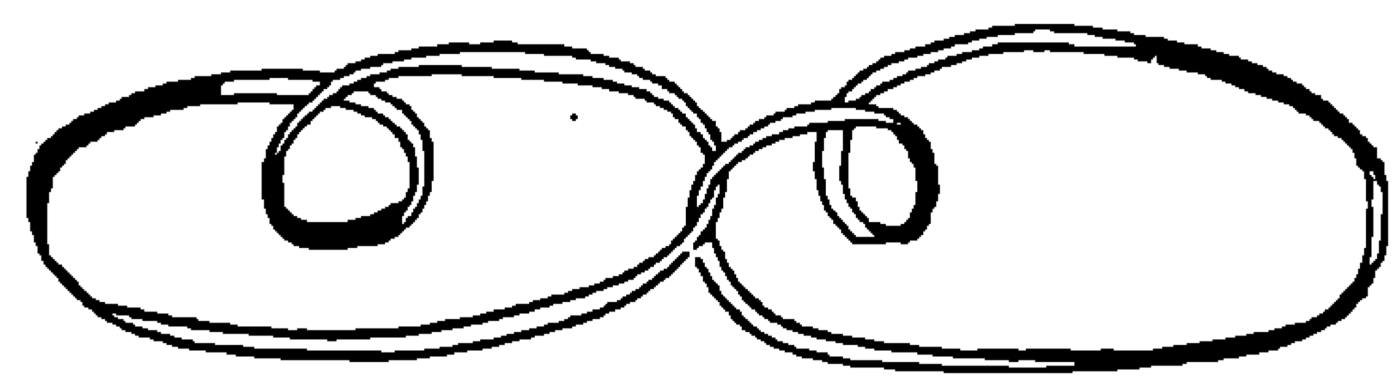


Hình 8-3

Ở dải giấy "mặt một phía" (hình 8-3a) thì nếu ta dùng kéo cắt theo đường nét đứt sẽ được một dải giấy "mặt một phía" nhưng có chu vi (chiều dài) gấp đôi chu vi dải giấy khi chưa cắt.

Nếu bạn tiếp tục cắt như vậy sẽ thấy nhiều điều thú vị nữa. Chẳng hạn, nếu cắt dọc hình 8-3b sẽ được hai dải giấy "mặt một phía" lồng vào nhau (hình 8-4).

Trên dải giấy "mặt một phía", chú kiến bò thoải mái từ trong ra ngoài, từ ngoài vào trong mà không cần phải vượt qua mép. Trên dải giấy này, nếu chú kiến bò từ điểm N (hình 8-1c), muốn trở lại điểm N thì phải bò quãng đường ít nhất bằng hai lần chu vi dải giấy. Ứng dụng tính chất này người ta đã xây dựng tiết mục xiếc đi xe đạp từ trong ra ngoài, rồi lại từ ngoài vào trong mà không cần phải vượt qua mép. Đây là một tiết mục hấp dẫn và hồi hộp.



Hình 8-4

Giá mà nhà thiết kế hệ thống đường bộ tạo được "mặt một phía" tại các ngã tư thì những người tham gia giao thông sẽ không bị ùn tắc.

Người đã tạo ra dải giấy "mặt một phía" là nhà thiên văn August Ferdinand Möbius (17/11/1790 - 26/9/1868) người Đức, lúc ông 68 tuổi (chính là cụ già đã nói ở trên). Mặt này về sau được mang tên ông, gọi là dải Mobius hoặc lá Mobius và ông được coi là một trong những người khởi xướng ra topo học.

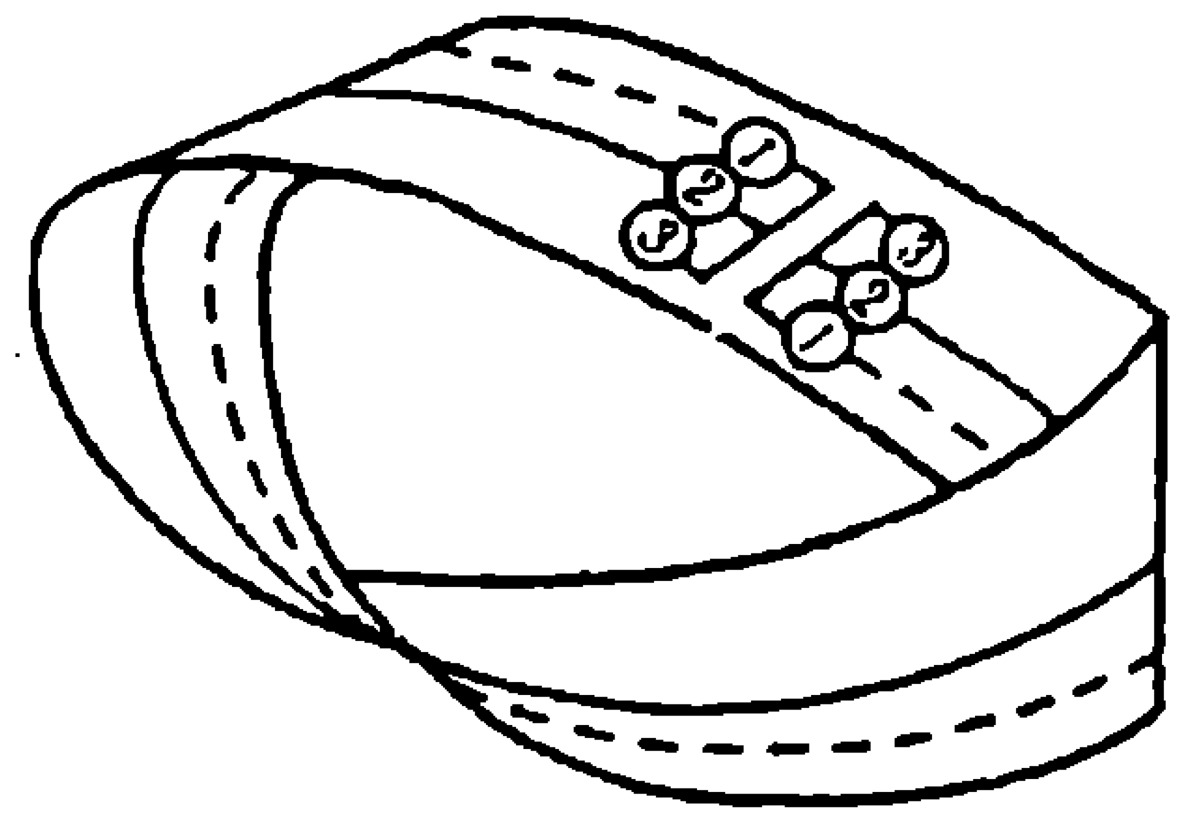
Dải Möbius có tính chất topo rõ rệt. Sau đây là một số tính chất rất kỳ lạ:

Một số vấn đề không thể giải quyết được trên mặt phẳng nhưng lại được giải quyết trên dải Möbius một cách không thể tưởng tượng được!

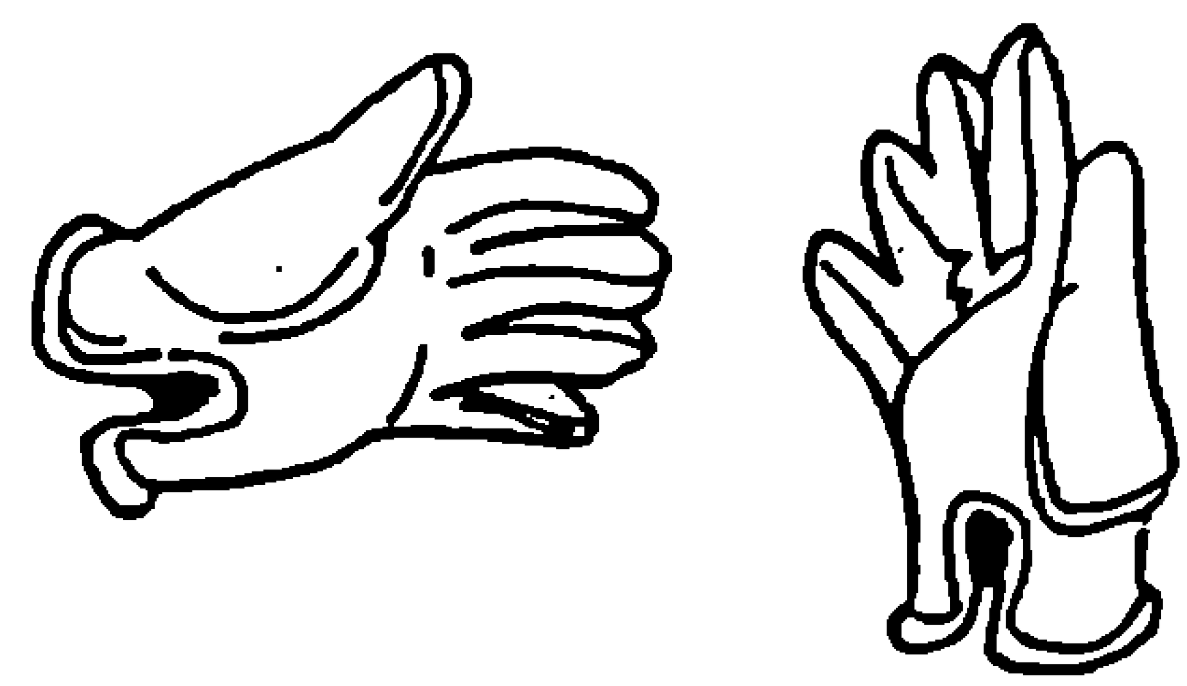
Ở mục 4 "Hình học trên màng cao su", câu chuyện truyền thuyết người thừa kế Halipha có câu đố không thể giải quyết được trên mặt phẳng nhưng nếu đưa vấn đề này vào dải Mobius thì việc giải quyết câu đố "dễ như trở bàn tay".

Hình 8-5 là một loại giải đáp, đường nối ③ - ③ trong hình dành để bạn đọc luyện tập, tự bổ sung vào.

Một vấn đề khác không có cách gì thực hiện được trong không gian thông thường là "đổi chỗ găng tay": găng tay phải và găng tay trái tuy rất giống nhau (hình 8-6) nhưng lại có sự khác nhau về bản chất. Ta không thể lấy găng tay trái xỏ đúng vào tay phải được, cũng không thể lấy găng tay phải xỏ đúng vào tay trái được. Dù bạn có xoay đi xoay lại thế nào thì găng tay trái luôn luôn là găng tay trái và găng tay phải luôn luôn là găng tay phải.



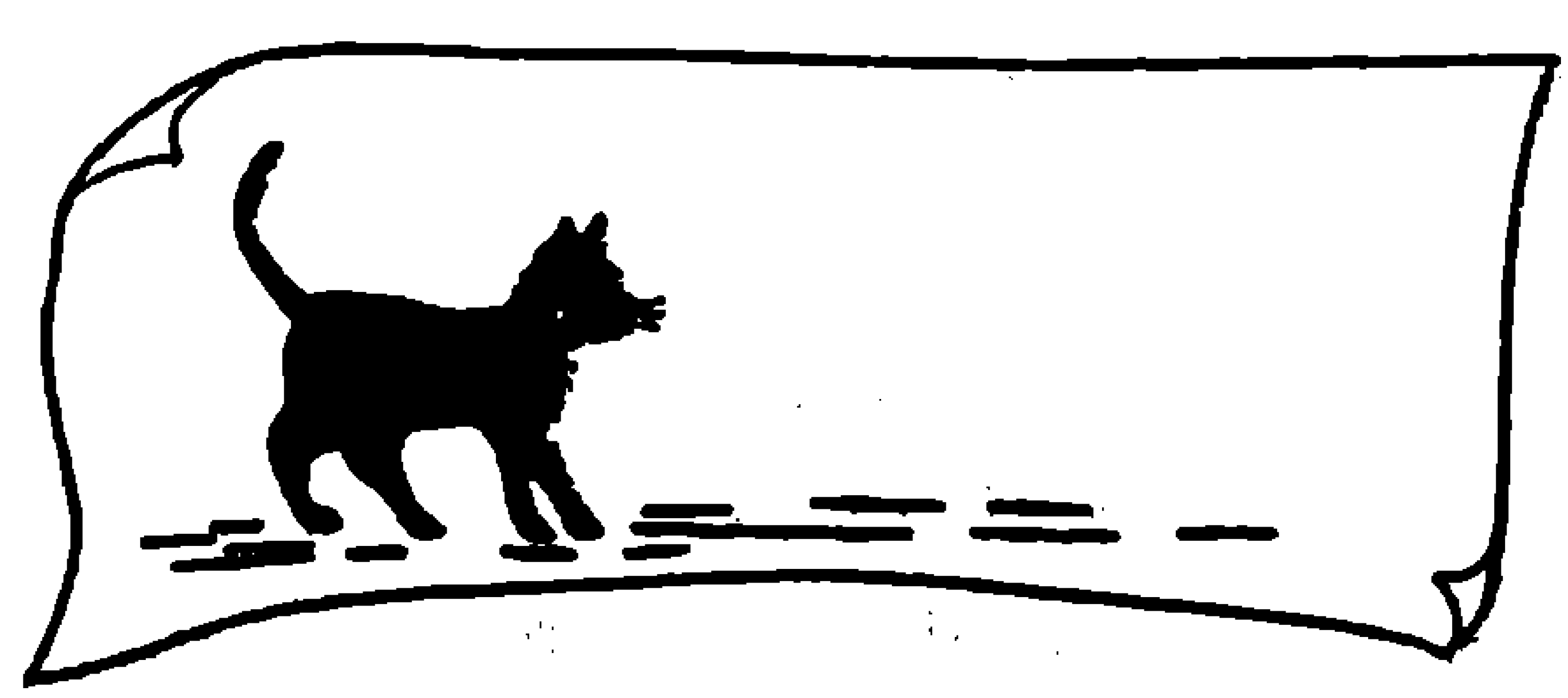
Hình 8-5



Hình 8-6

Trong tự nhiên có rất nhiều vật có tính chất tương tự như găng tay, bản thân chúng có các bộ phận đối xứng hoàn toàn giống nhau, nhưng một cái là bên trái, cái kia là bên phải thì giữa chúng có cái khác nhau rất lớn. Điển hình là đôi giày của bạn, bạn không thể đổi chỗ: chân trái đi chiếc giày bên phải được.

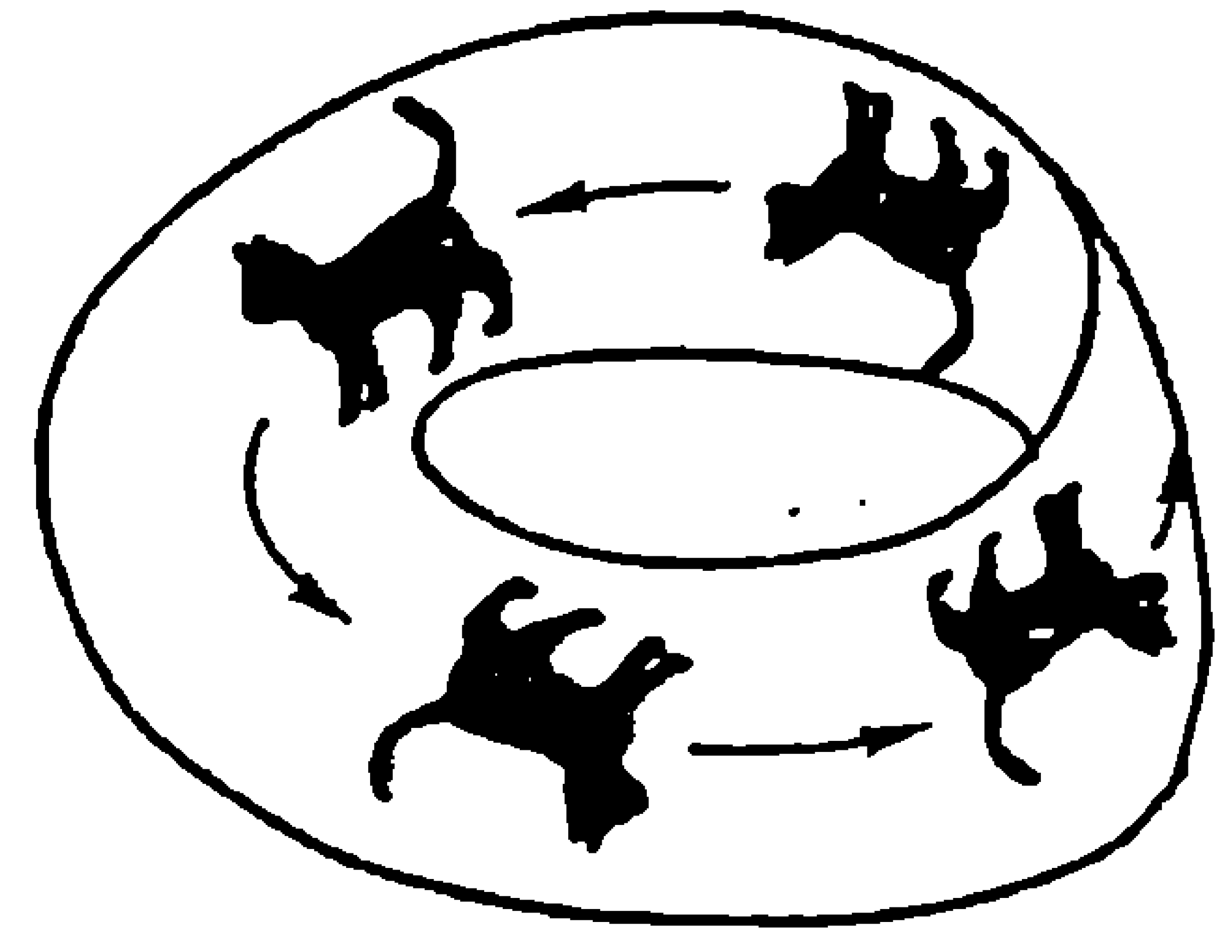
Hình 8-7 vẽ một con "mèo dẹt". Quy định là con mèo này đang dán chặt trên mặt giấy. Bây giờ đầu con mèo này đang quay về bên phải. Bạn đọc dễ hình dung là chỉ cần con mèo này



Hình 8-7

dán chặt vào mặt giấy thì dù đi như thế nào, đầu của nó chỉ có thể quay về bên phải. Cho nên chúng ta gọi nó là "mèo dẹt bên phải".

Đầu "mèo dẹt bên phải" sở dĩ luôn quay về bên phải là vì nó không thể rời mặt giấy. Giả sử cho phép nó chạy vào trong không gian thì bất cứ bạn đọc nào cũng đều có thể dễ dàng lật lại rồi đặt trở về mặt giấy, biến thành "mèo dẹt bên trái" đầu quay về bên trái.



Hình 8-8

Bây giờ chúng ta hãy xem, trên dải Möbius, cảnh ngộ của "mèo dẹt" như thế nào? Hình 8-8 vẽ một con "mèo dẹt bên trái", nó được dán chặt vào dải Möbius, mà đi, đi mãi, cuối cùng lại thành "mèo dẹt bên phải".

Câu chuyện "mèo dẹt" gợi ý cho chúng ta rằng: trên một mặt đã bị vặn, vật thể bên phải và bên trái có thể thực hiện chuyển đổi. Bạn hãy tưởng tượng không gian của chúng ta ở rìa mép nào đó của vũ trụ, hiện ra sự uốn cong kiểu dải Möbius thì chắc hẳn có một sớm mai nào đó nhà du hành vũ trụ giữa các vì sao xuất phát mang theo trái tim bên lồng ngực trái, lại trở về Trái Đất với trái tim bên lồng ngực phải!

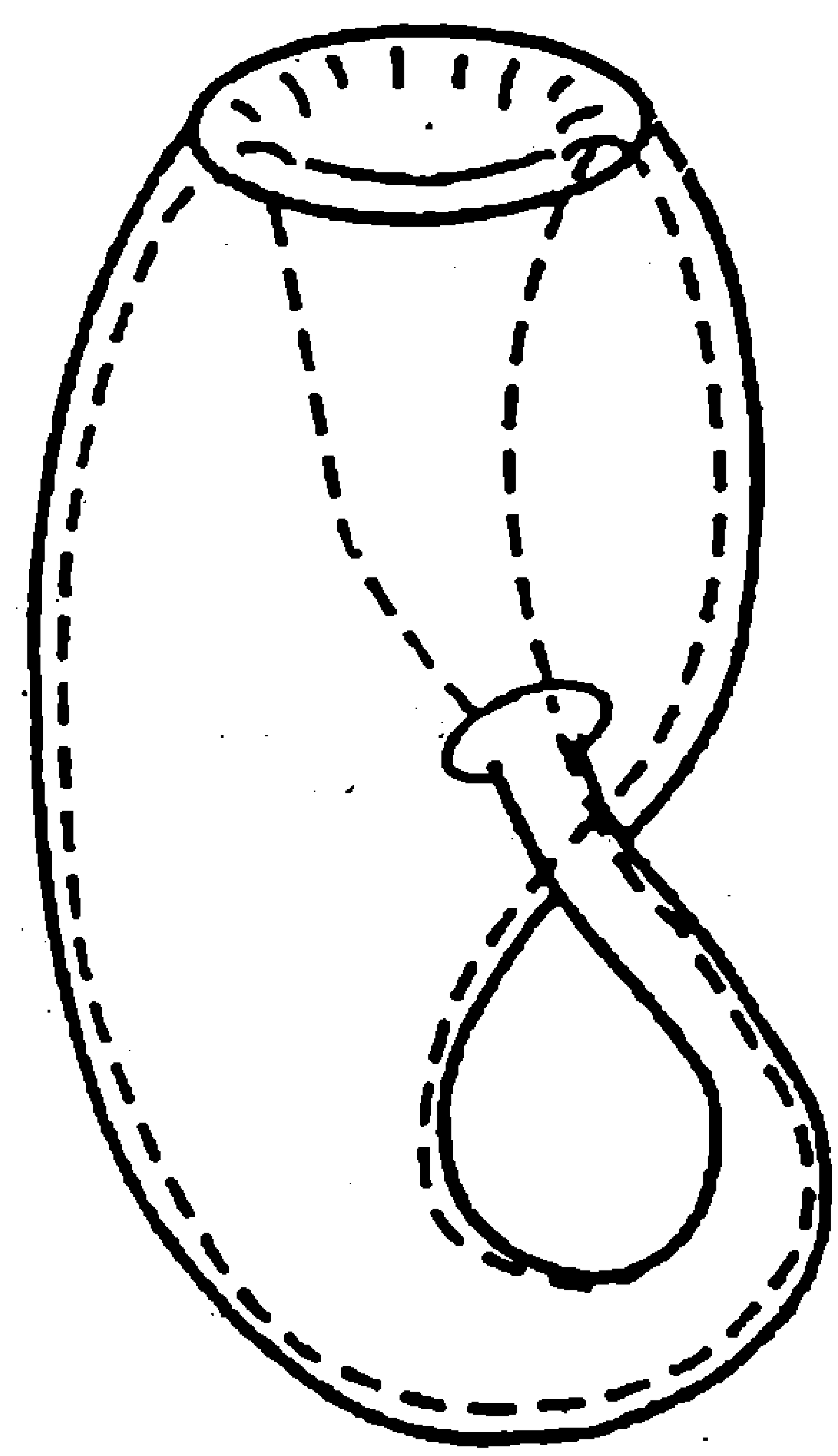
Sau đây là câu chuyện lý thú khác:

Đồn rằng thời Cổ Đại có một vị quốc vương già có 5 người con trai. Trước khi lâm chung, quốc vương để lại một bản di chúc, yêu cầu chia đất nước ra 5 miền, mỗi người con trai được một miền. Nhưng mỗi miền phải liền với 4 miền còn lại, để cho người ở trên mỗi miền đất đều có thể đến bất cứ miền đất nào mà không phải qua miền đất thứ ba. Còn về độ rộng lớn của mỗi miền đất thì do các con tự bàn bạc giải quyết.

Sau khi quốc vương băng hà, các vương tử không thể làm cách nào để thực hiện được di chúc của phụ vương. Ẩn ý của quốc vương là muốn 5 người con đoàn kết, nhất trí, giúp đỡ nhau. Thế nhưng với điều kiện của di chúc thì không có cách nào thực hiện được trên mặt đất.

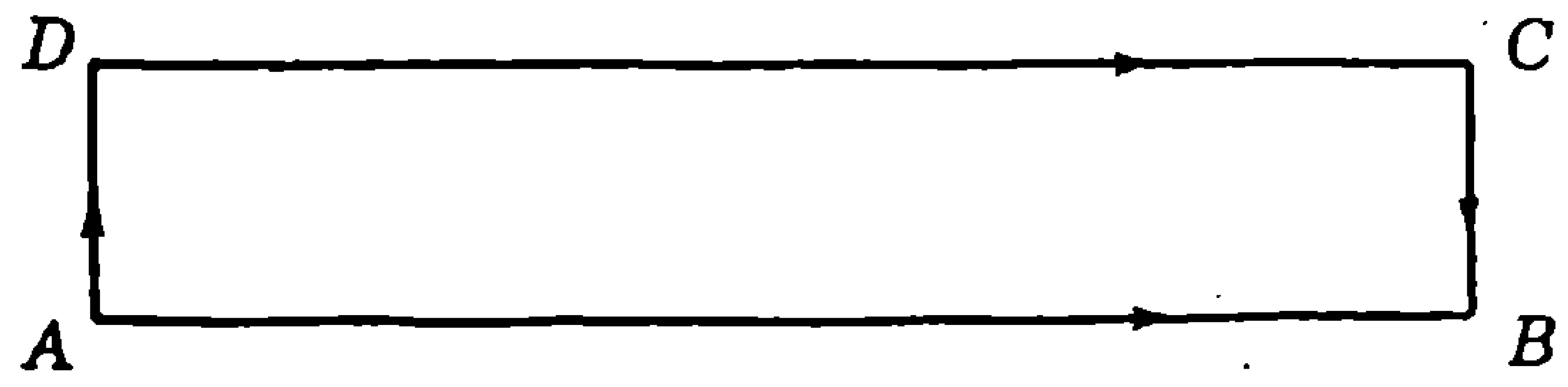
Bạn có thể biết lý do tại sao không? Giả sử đất nước trong di chúc ở trong dải Möbius thần kỳ thì bạn có thể giúp các vị vương tử này thực hiện được bản di chúc của quốc vương không?

Bây giờ chúng ta trở lại thảo luận trên dải Möbius. Hẳn bạn đọc cũng thấy được là dải Mõbius có một đường biên giới rất rõ ràng. Điều đó nảy sinh những hạn chế. Năm 1882, nhà toán học Christian Felix Klein (25/11/1849 - 22/6/1925) người Đức đã tìm được một loại mô hình tự đóng kín mà không có biên giới rõ rệt, được gọi là "chai Klein" (hình 8-9). Loại bình kỳ lạ này có thể coi là do một đôi dải Möbius dán lại theo đường biên giới (mép) tạo nên.



Hình 8-9

"Chai Klein" thường được hình dung như sau: Lấy một miền hình chữ nhật ABCD (hình 8-10), dán cạnh AB với cạnh CD (A gắn với D, B gắn với C), rồi dán cạnh AD với cạnh CB (A gắn với C, D gắn với B) thì được "chai Klein".



Hình 8-10

Thực chất "chai Klein" (mặt Klein) cũng là một loại "mặt một phía".

9. ĐỊNH LÝ TÔ MÀU TRÊN MẶT XUYẾN

Bạn đọc chắc còn nhớ bản di chúc của quốc vương trong câu chuyện ở mục 8. Ở đó ta đã nói: Trên mặt phẳng, để 5 vùng đất mà mỗi vùng phải liền với 4 vùng còn lại là không thể thực hiện được. Nhưng bản di chúc không có cách gì thực hiện được này lại có quan hệ trực tiếp với "Bài toán 4 màu" đã nói ở mục 14 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic".

"Bài toán 4 màu" là một trong ba bài toán khó của toán học cận đại. Hai bài toán kia là "Bài toán Goldbach" (đã nói ở mục 11 của cuốn sách vừa nêu) và "Bài toán Fermat" (đã nói ở mục 13 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về phương trình").

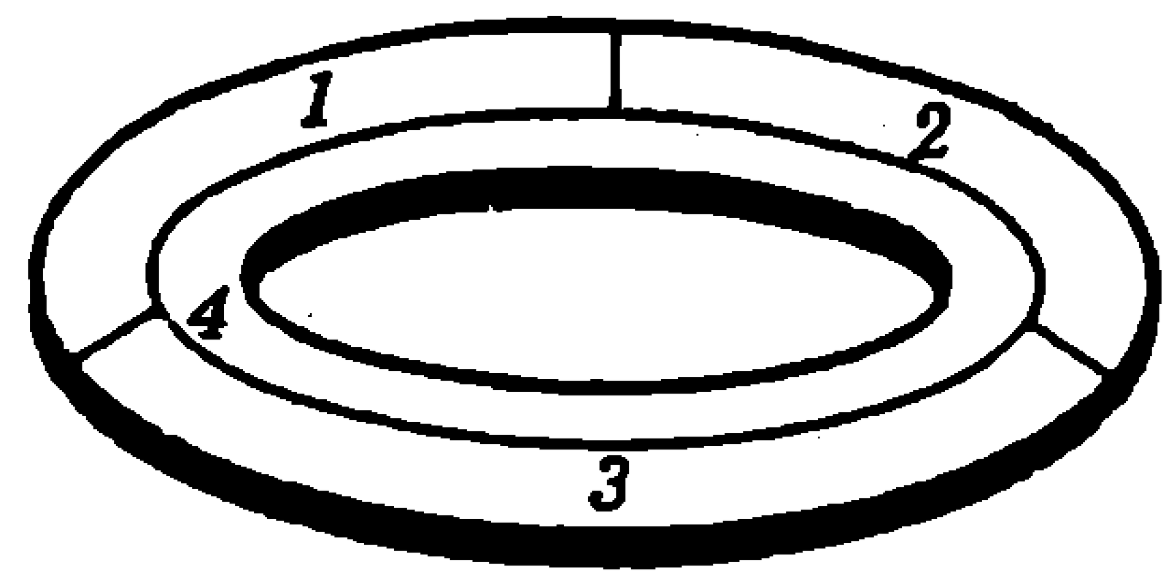
"Bài toán 4 màu" khó ở chỗ nào? Hoá ra khó ở chỗ số khả năng logic có thể xảy ra cực lớn: có khoảng hai nghìn tỷ khả năng. Trong khi cuộc đời của một người nếu sống đến 100 tuổi cũng chỉ được hơn 3 tỷ giây! Do vậy phải dùng các máy tính có tốc độ tính toán cực lớn mới giải quyết được. Cho nên sau 136 năm tính từ khi bài toán được đặt ra, tháng 9-1976 người ta mới giải quyết được "Bài toán 4 màu".

Bây giờ chúng ta trở lại câu chuyện di chúc của quốc vương ở mục 8. Nếu bản di chúc có thể thực hiện được thì có nghĩa là tồn tại 5 vùng mà mỗi vùng phải liền với 4 vùng còn lại. Nhưng bản đồ của 5 vùng như vậy không tô 5 màu được! Điều này mâu thuẫn với "Bài toán 4 màu".

Tuy vậy, ở trên chúng ta đã nói, nhờ dải Möbius giúp đỡ mà bản di chúc thực hiện được trên dải Möbius.

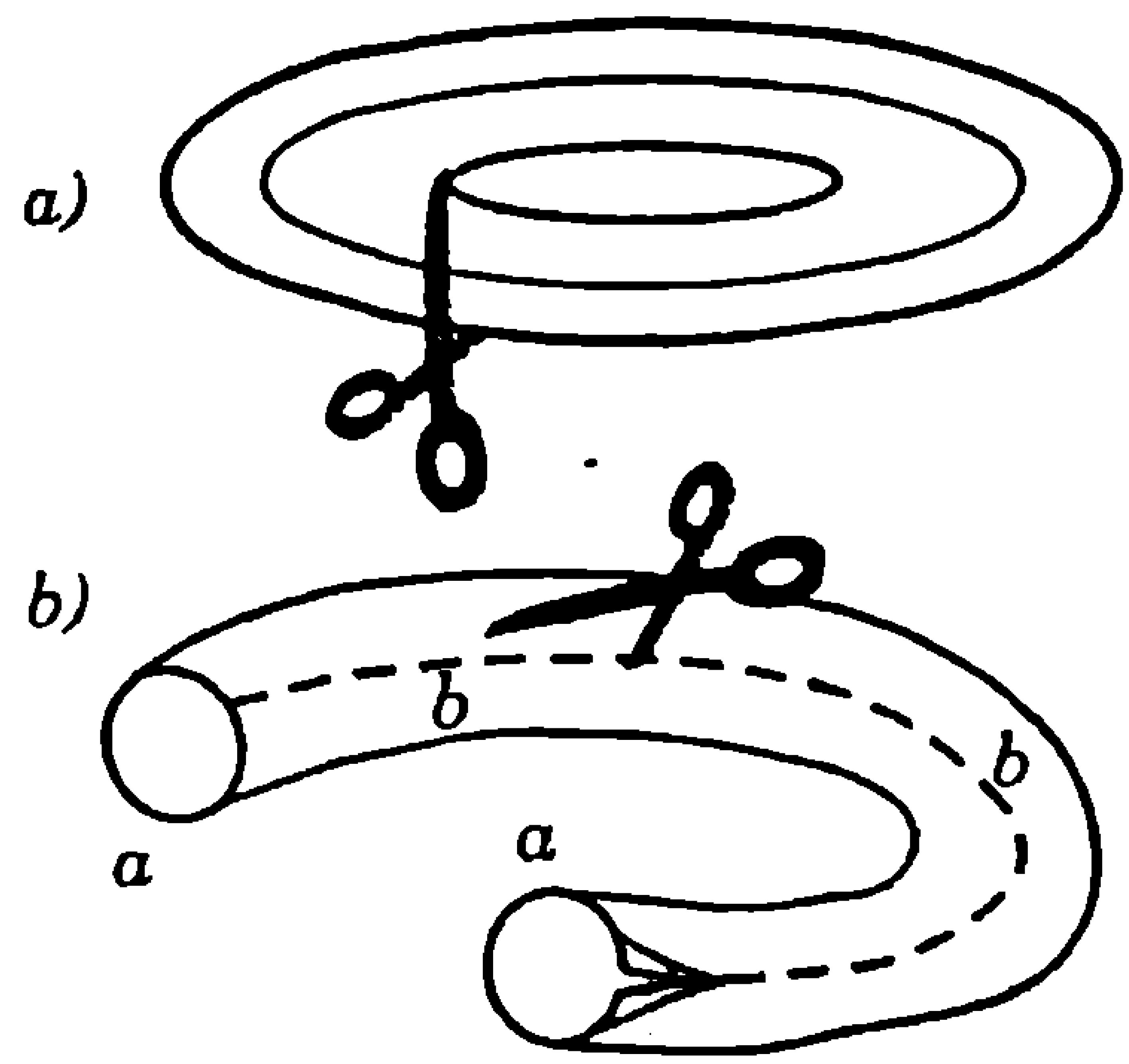
Bây giờ ta thử nhờ một loại mặt cong khác thường gặp hơn, có thể thực hiện được bản di chúc của quốc vương hay không? Sự thực là, trên một mặt xuyến như phao cấp cứu thì di chúc của quốc vương cũng có thể thực hiện được. Ví dụ như hình 9-1, nửa dưới của mặt xuyến là 1 miền, còn nửa trên là 4 miền, 5 miền như vậy có từng miền liền với 4 miền còn lại.

Điều cần chú ý là trên mặt xuyến không những có thể giải quyết được vấn đề thực hiện di chúc của quốc vương cho 5 người con, mà cho dù con của quốc vương có nhiều thêm hai người con trai nữa thì vấn đề cũng có thể giải quyết như vậy được. Điều đó chứng tỏ rằng: trên mặt xuyến ta tìm được 7 miền mà mỗi miền liền với 6 miền còn lại. Để bạn đọc thấy rõ điều này, chúng ta tìm cách xử lý mặt xuyến như sau:



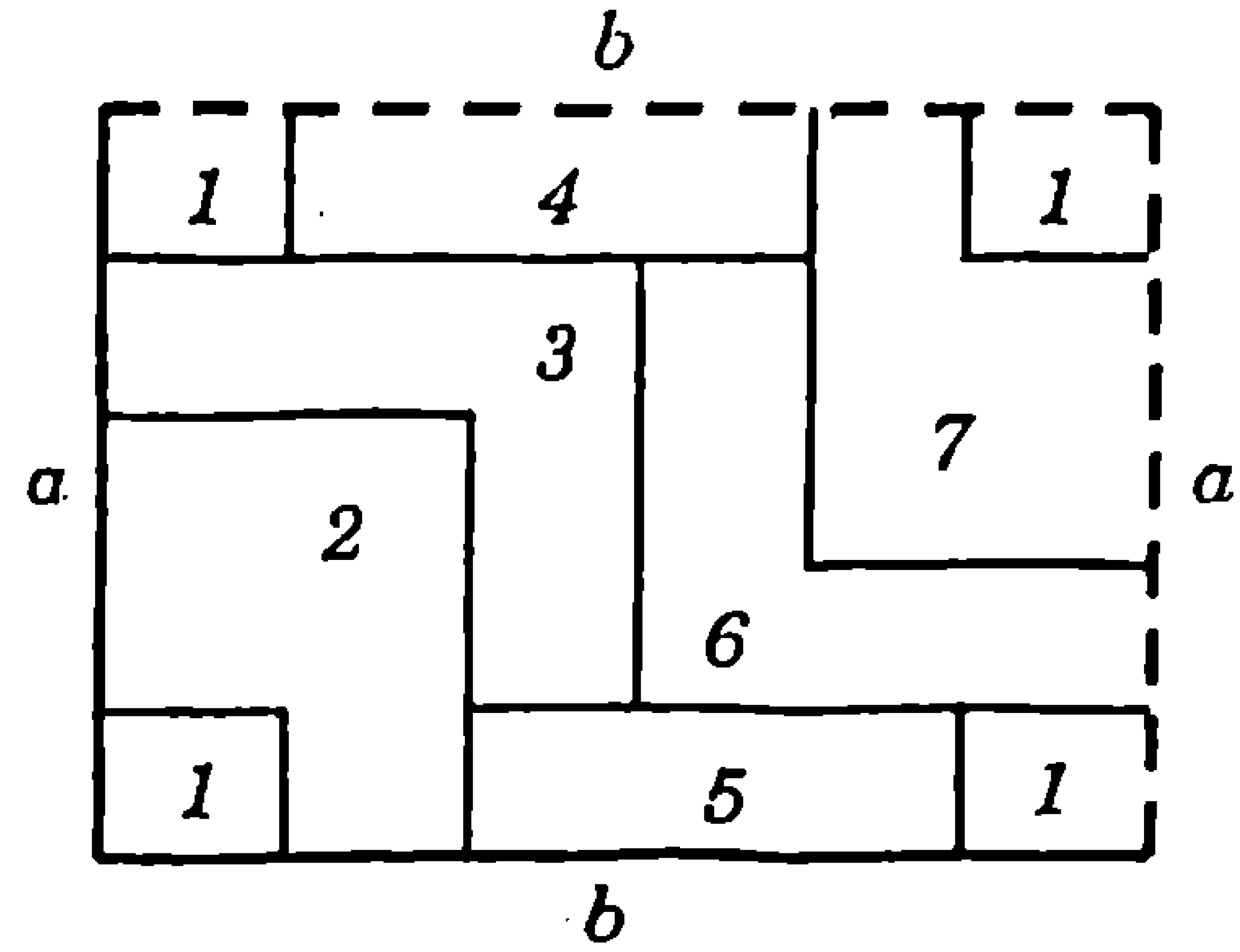
Hình 9-1

Hãy cắt mở mặt xuyến ra (hình 9-2) để thành một hình phẳng. Hiển nhiên, chỉ cần cắt hai lần: một lần cắt ngang (hình 9-2a) và một lần cắt dọc (hình 9-2b). Nhưng, ta cần ghi nhớ là: các biên giới trên - dưới và biên giới phải - trái của hình sau khi cắt ra, ban đầu vốn là một.

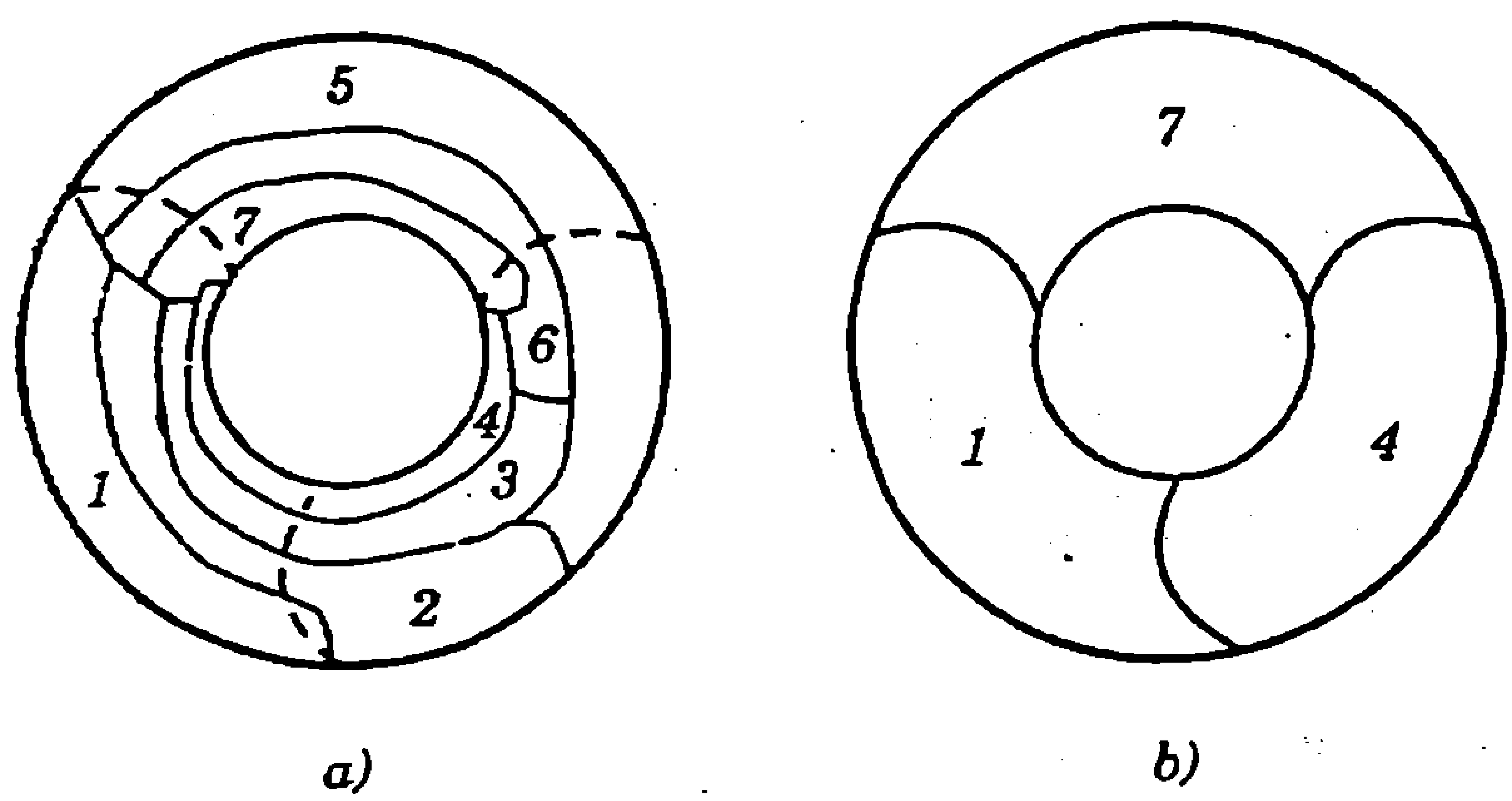


Hình 9-2

Hình 9-4 thể hiện 7 miền tương ứng ở mặt xuyến: hình 9-4a là mặt phải, hình 9-4b là mặt trái. Ranh giới các miền của mặt trái là nét đứt ở hình mặt phải. Bạn đọc chỉ cần tỉ mỉ đối chiếu một chút là sẽ phát hiện được 7 miền trong hình 9-4 đúng là mỗi miền liền với 6 miền còn lại.



Hình 9-3



Hình 9-4

Sự thực nêu trên chứng tỏ rằng: Đối với bản đồ trên mặt xuyến, ít nhất phải dùng 7 màu mới có thể phân biệt được các miền khác nhau.

Sau đây chúng ta sẽ chứng minh rằng:

Phân biệt các miền khác nhau trên mặt xuyến, dùng 7 màu là đủ. Đây chính là "Định lý 7 màu" (Bài toán 7 màu) trên mặt cong nổi tiếng.

Có thể có bạn đọc nghĩ rằng: "Bài toán 4 màu" đã làm cho mọi người hết sức lúng túng rồi, nay "mặt phẳng" lại đổi thành "mặt xuyến" phức tạp hơn, "bốn màu" lại đổi thành "bảy màu" thì càng phức tạp.

Xin đừng lo ngại! Kỳ thực, chứng minh "Định lý 7 màu" không khó.

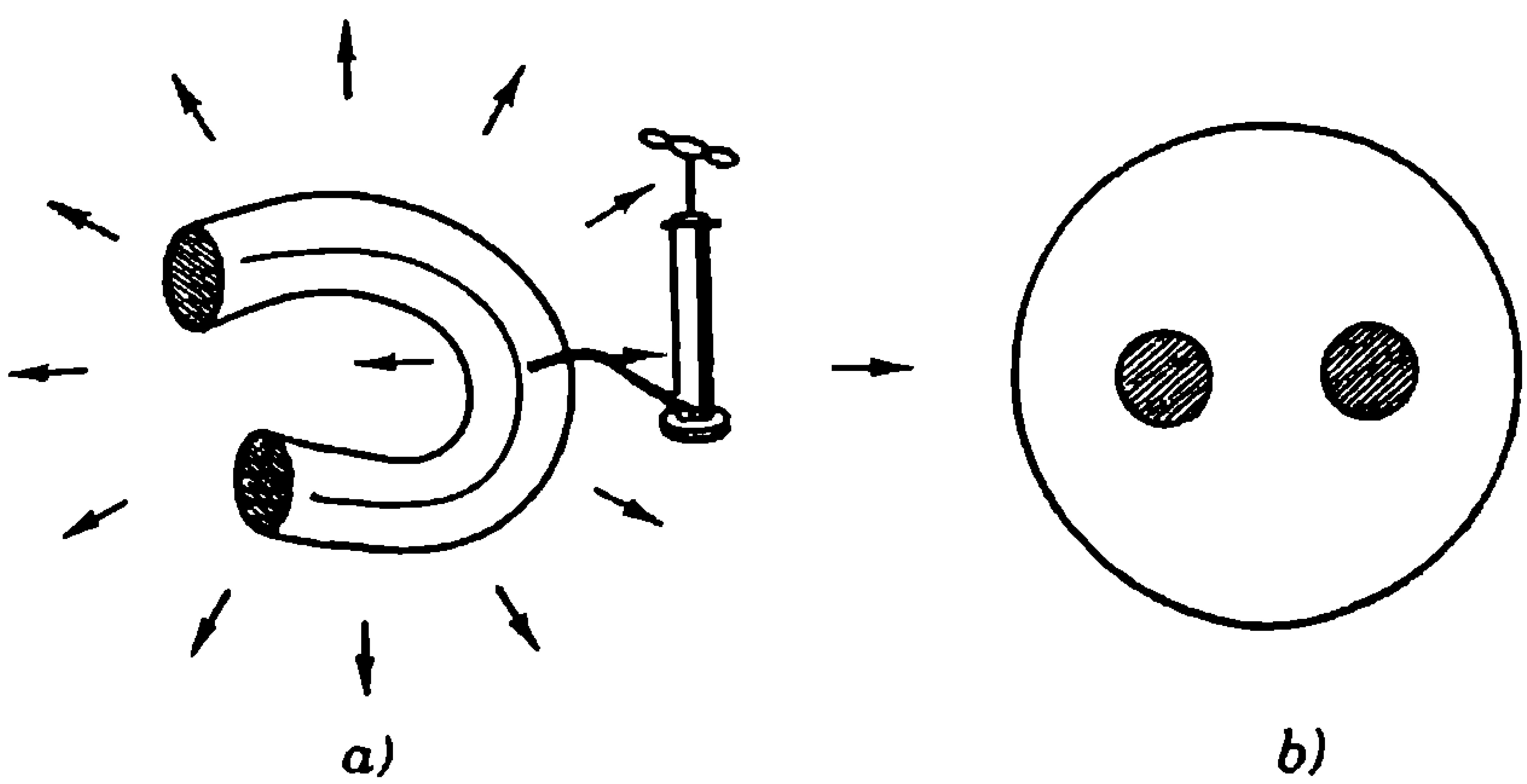
Tuy vậy, trước tiên cần nói về "đặc số Euler" của mặt xuyến.

Ta đã thấy ở các câu chuyện ở trên (chẳng hạn ở mục 14 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic", mục 5 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về hàm số"): giữa số đỉnh d, số miền f và số đường biên giới c đối với mạng lưới liên thông trên mặt cầu, tồn tại quan hệ theo công thức Descartes - Euler:

$$d + f - c = 2 \qquad (9\text{-}1)$$

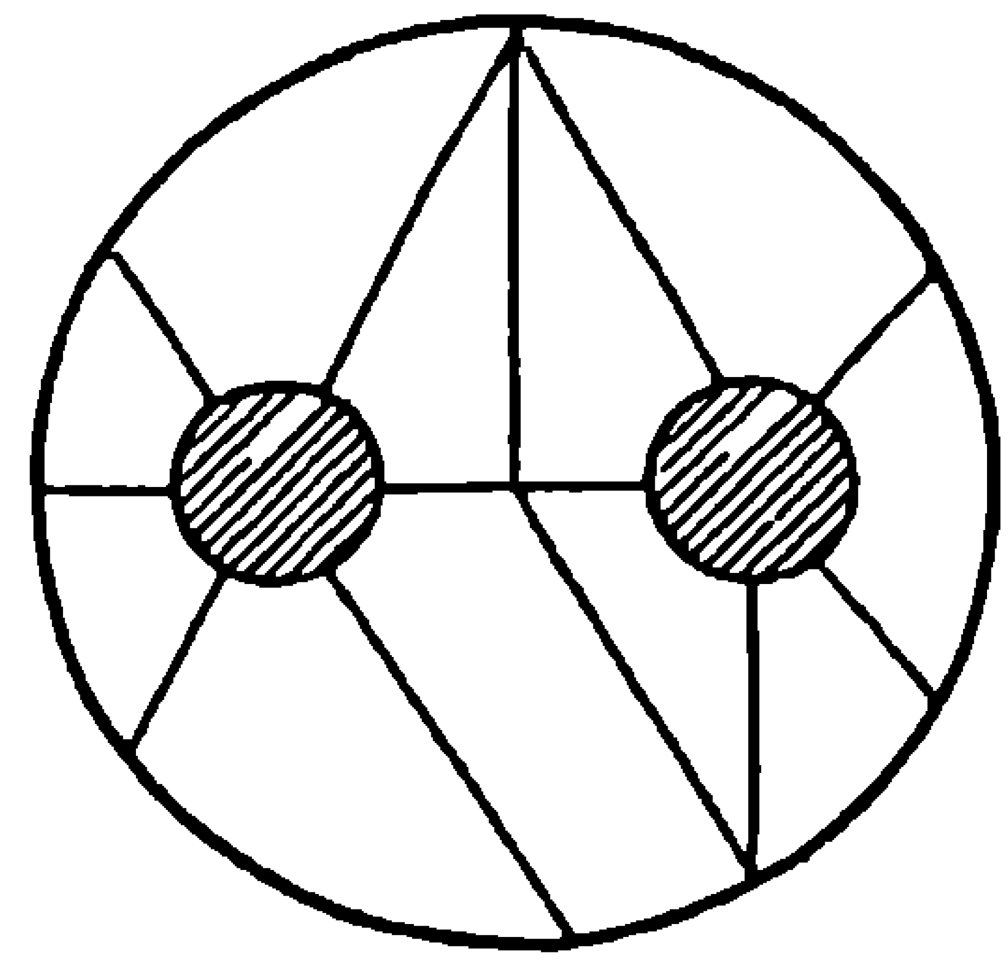
trong đó 2 là đại lượng không đổi trên mặt cầu, gọi là "đặc số Euler" trên mặt cầu.

Vậy trên mặt xuyến thì tình hình sẽ như thế nào? Chúng ta hãy xem, mặt cầu và mặt xuyến có quan hệ với nhau ra sao?



Hình 9-5

Một mặt xuyến có thể dùng phương pháp sau đây để biến thành mặt cầu: Cắt đứt mặt xuyến thành hình ống hai đầu hở (hình 9-5a). Bây giờ dùng hai mặt (phần gạch chéo) bịt kín hai đầu của ống tròn, sau đó bơm lên để nó trở thành hình cầu (hình 9-5b). Ta thấy trên mặt cầu có hai miền giống như hai mắt trên mặt người, điều này không có trên mặt xuyến ban đầu. Vì thế, một mạng lưới liên thông trên mặt xuyến, khi biến thành mạng lưới liên thông trên mặt cầu bơm hơi, số miền nhiều hơn hai miền. Từ đó đối với mạng lưới liên thông trên mặt xuyến (hình 9-6), giữa số đỉnh d, số miền f và số đường biên giới c của nó có quan hệ:

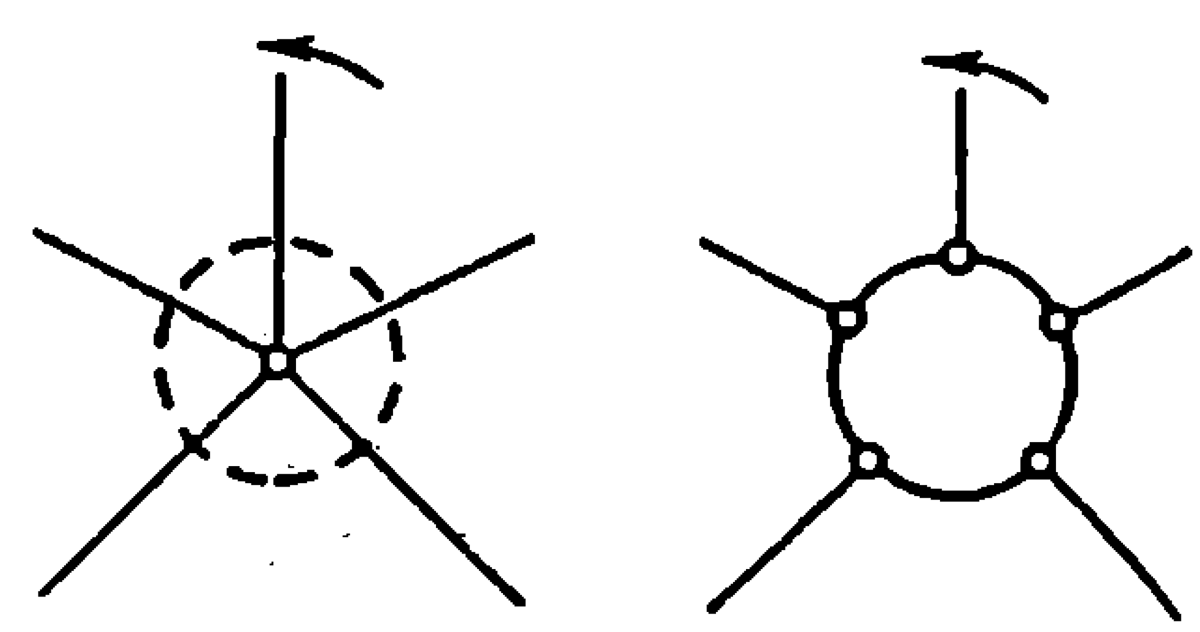


Hình 9-6

$$d + f - c = 0 \tag{9-2}$$

tức là "Đặc số Euler" trên mặt xuyến bằng 0.

Sau đây chúng ta hãy chuyển sang chứng minh "Định lý 7 màu" của mặt xuyến:



Hình 9-7

Giả sử bản đồ trên mặt xuyến đã được tiêu chuẩn hoá, tức là mỗi đỉnh trên bản đồ đều có ba nhánh (nếu không phải là ba nhánh thì ta vẽ thêm các miền nhỏ để các đỉnh đều có ba nhánh). Như vậy mỗi đỉnh đều có ba đường biên giới và mỗi đường biên giới đều có hai đỉnh (mút). Từ đó, ta có:

$$3d = 2c \tag{9-3}$$

Thay (9-3) vào (9-2), ta được:

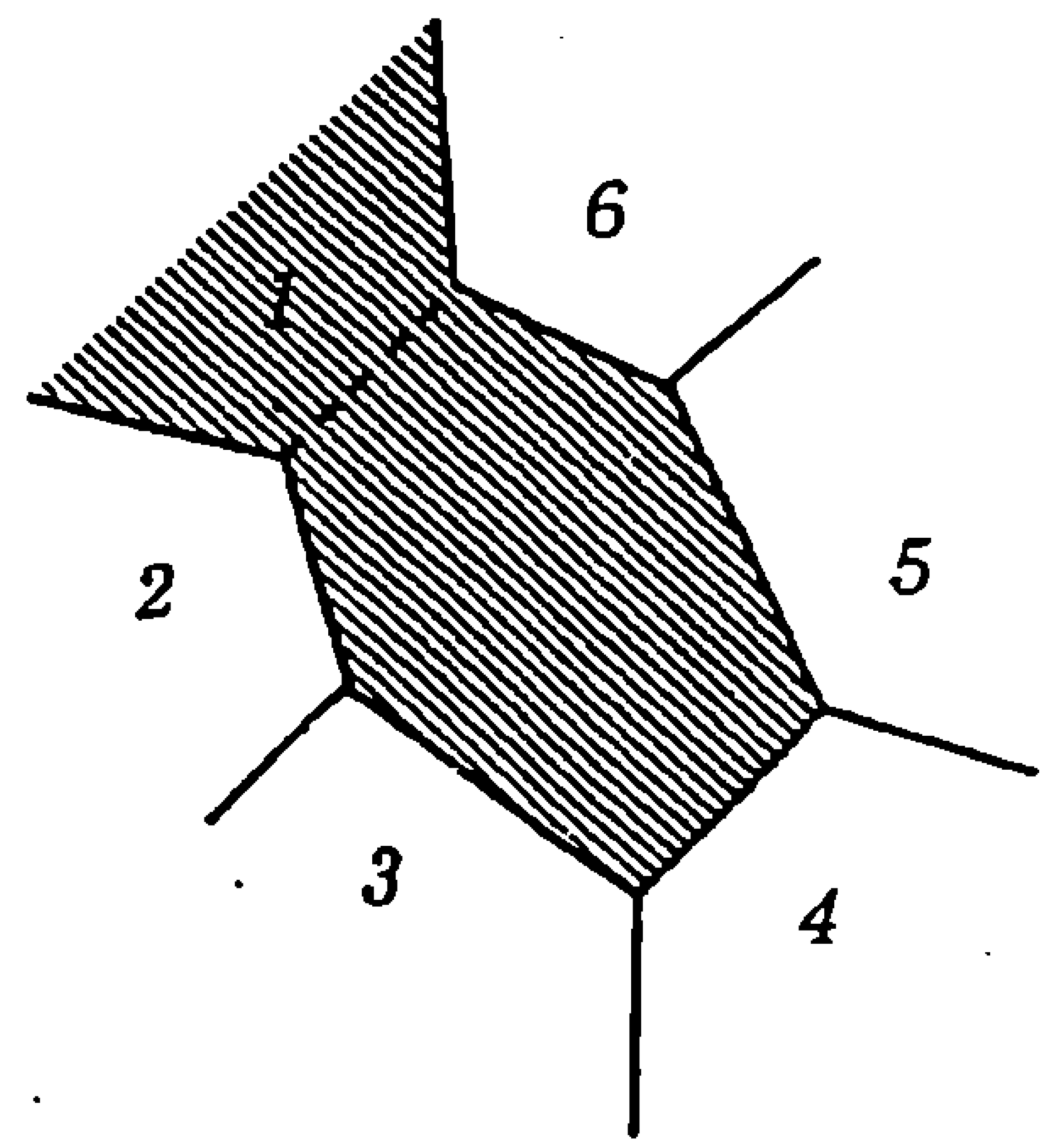
$$c = 3f. \tag{9-4}$$

Biểu thức (9-4) chứng tỏ rằng: trong bản đồ tiêu chuẩn hoá trên mặt xuyến, phải có một miền mà số đường biên giới nhỏ hơn 7. Bởi vì, nếu tất cả các đường biên giới của miền đều không nhỏ hơn 7 thì ta có:

$$2c \geq 7f > 6f = 2c \qquad (9\text{-}5)$$

Từ (9-5) ta thấy mâu thuẫn!

Do bản đồ trên mặt xuyến phải có một miền mà số đường biên giới nhỏ hơn 7, cho nên chúng ta có thể dỡ bỏ một đường biên giới của một miền, như hình 9-8, được một bản đồ mới. Nếu bản đồ mới có thể dùng 7 màu để tô thì bản đồ ban đầu sau khi thêm đường biên giới đã dỡ bỏ, rõ ràng cũng có thể dùng 7 màu để tô. Chẳng qua, bản đồ mới đã ít hơn bản đồ ban đầu một miền. Đối với bản đồ mới như vậy, đương nhiên cũng tồn tại một miền ít hơn 7 đường biên giới, do đó cũng có thể dỡ bỏ một đường biên giới để được một bản đồ mới hơn.



Hình 9-8

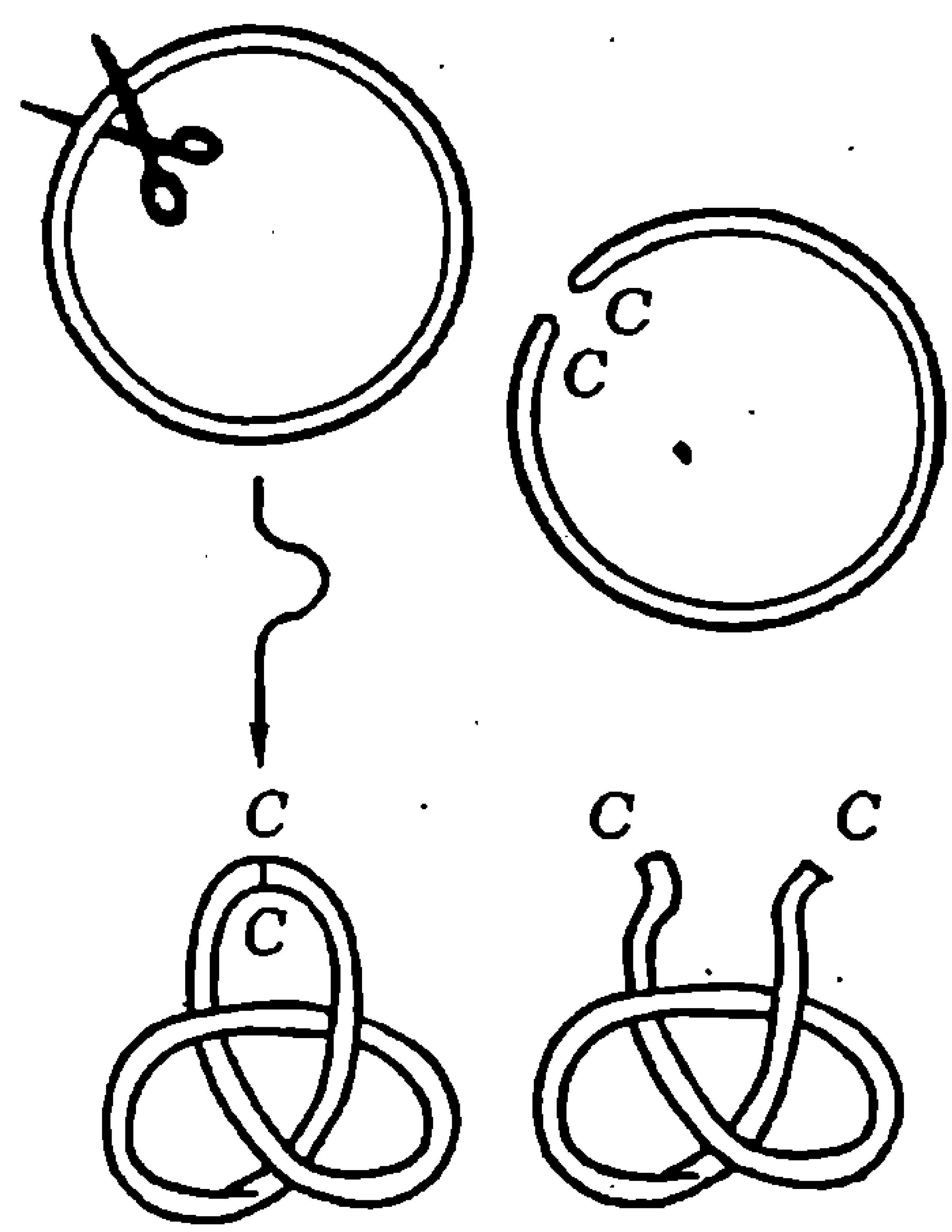
Nếu bản đồ mới hơn này có thể dùng 7 màu để tô thì bản đồ mới và từ đó bản đồ ban đầu cũng chắc chắn có thể dùng 7 màu để tô.

Các bước vừa nói ở trên có thể tiến hành mãi, số miền không ngừng giảm bớt, cuối cùng ít đến mức chỉ có 7 miền và đương nhiên có thể dùng 7 màu để tô. Như vậy là bản đồ ban đầu có thể dùng 7 màu để tô.

10. KHOA HỌC NẶN ĐẤT DẺO CAO SU

Ở trên chúng ta đã biết, topo học là một môn hình học nghiên cứu sự thay đổi liên tục một đối một. Năm 1902, nhà toán học Felix Hausdorff (8.11.1868 - 26.1.1942) người Đức dùng khái niệm lân cận thay thế khoảng cách, được một bộ lý thuyết hoàn chỉnh. Trong lý thuyết này, thay đổi topo là một loại thay đổi liên tục một đối một, không biến đổi quan hệ lân cận của điểm.

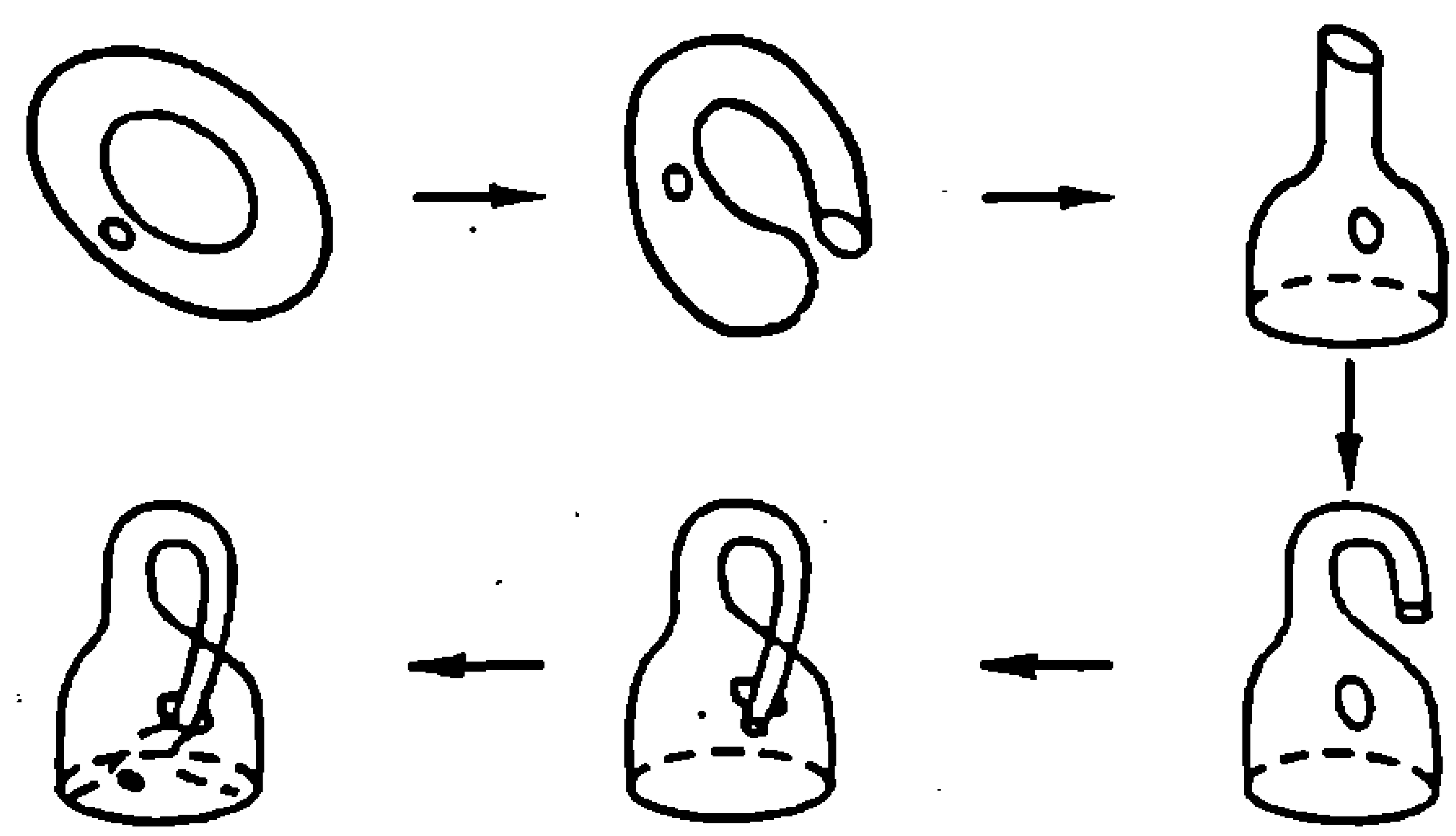
Ở mục 4 "Hình học trên màng cao su", bạn đọc đã thấy hình vẽ trên màng cao su, thông qua kéo, uốn và nén, chỉ cần không kéo đứt hoặc ghép lại các bộ phận tách ra thì có thể giữ nguyên một đối một và quan hệ lân cận của điểm, hình vẽ trước sau thu được là tương đương topo. Cũng vậy, một cục đất dẻo cao su, chỉ cần không xé rách, cắt, chồng ghép hoặc đục lỗ thì có thể nặn thành một khối lập phương, quả táo, ông phỗng, con voi hoặc các vật khác phức tạp hơn, nhưng lại không thể nặn được một cái vòng hay cái cúc áo thông thường. Bởi vì, vòng hoặc cúc áo đều có lỗ.



Hình 10-1

Hiển nhiên, nặn đất dẻo cao su nói ở trên là một loại biến đổi topo, giữ nguyên quan hệ lân cận của điểm với điểm. Nhưng thay đổi topo không phải đều có thể đạt được thông qua phương pháp nặn đất dẻo cao su. Hình 10-1 là cắt đứt một vòng tròn làm bằng đất dẻo cao su, sau đó thắt một cái nút, rồi dán vết cắt lại, làm sao cho điểm giống nhau tại vết cắt ban đầu, sau khi dán lại vẫn cùng một điểm. Thay đổi như vậy đương nhiên cũng là thay đổi topo, nhưng không phải thực hiện được nhờ thông qua biện pháp dán đất dẻo cao su.

Chắc bạn đọc còn nhớ "Bình Klein" (hình 8-9) ở mục 8. Chúng ta tưởng tượng rằng, trước tiên cắt đứt một cái săm ôtô và kéo thẳng thành một hình viên trụ, sau đó lại vành to một đầu để làm đáy, đầu kia thì vặn nhỏ như cổ chai. Tiếp đó, uốn đầu nhỏ cong lại như hình 10-2, rồi cắm vào lỗ van hơi, cuối cùng banh to đầu nhỏ rồi nối với đầu kia. Loại nối này đòi hỏi phải "không sai lệch một tý nào", để cho các điểm giống nhau trước khi cắt vẫn là các điểm sau khi nối liền.

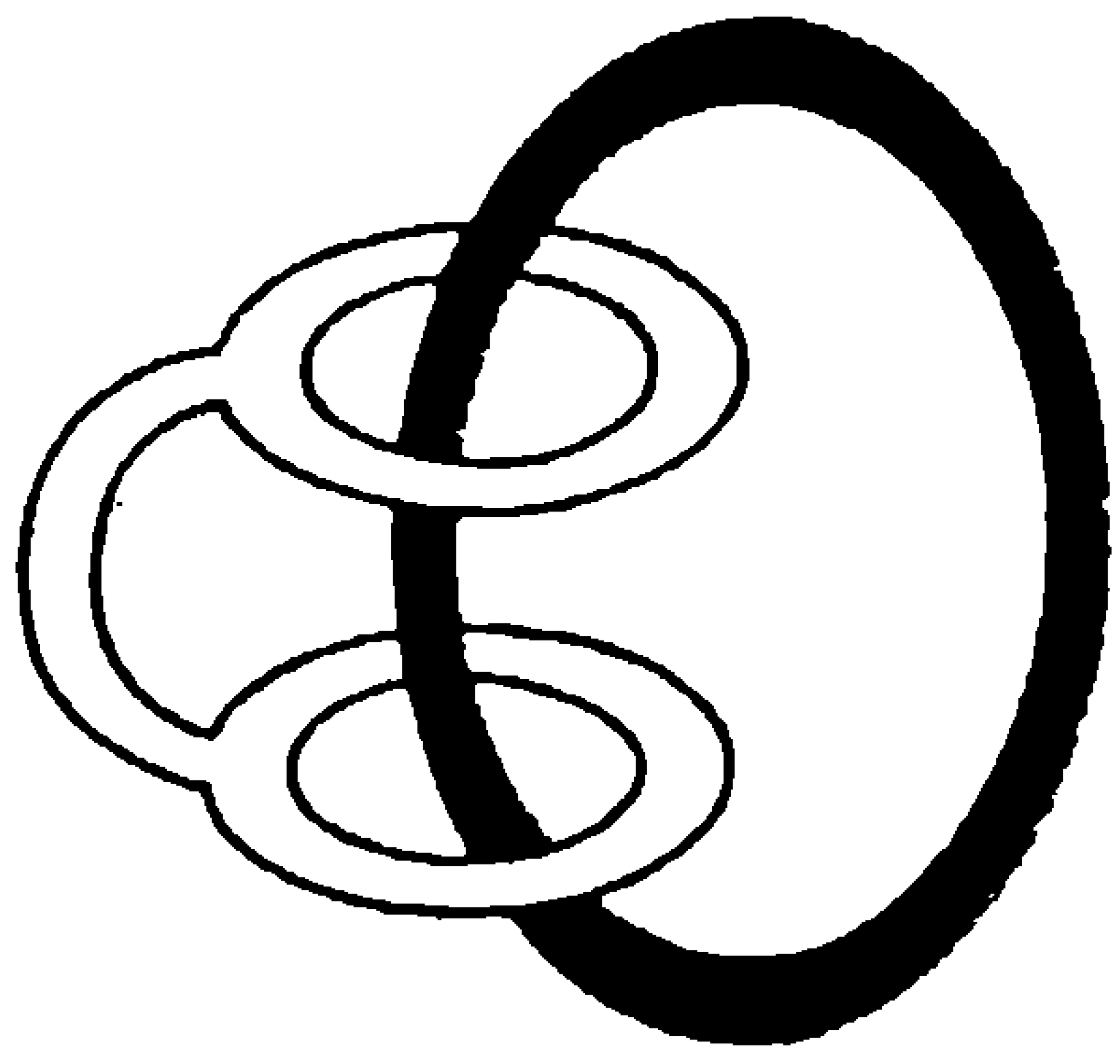


Hình 10-2

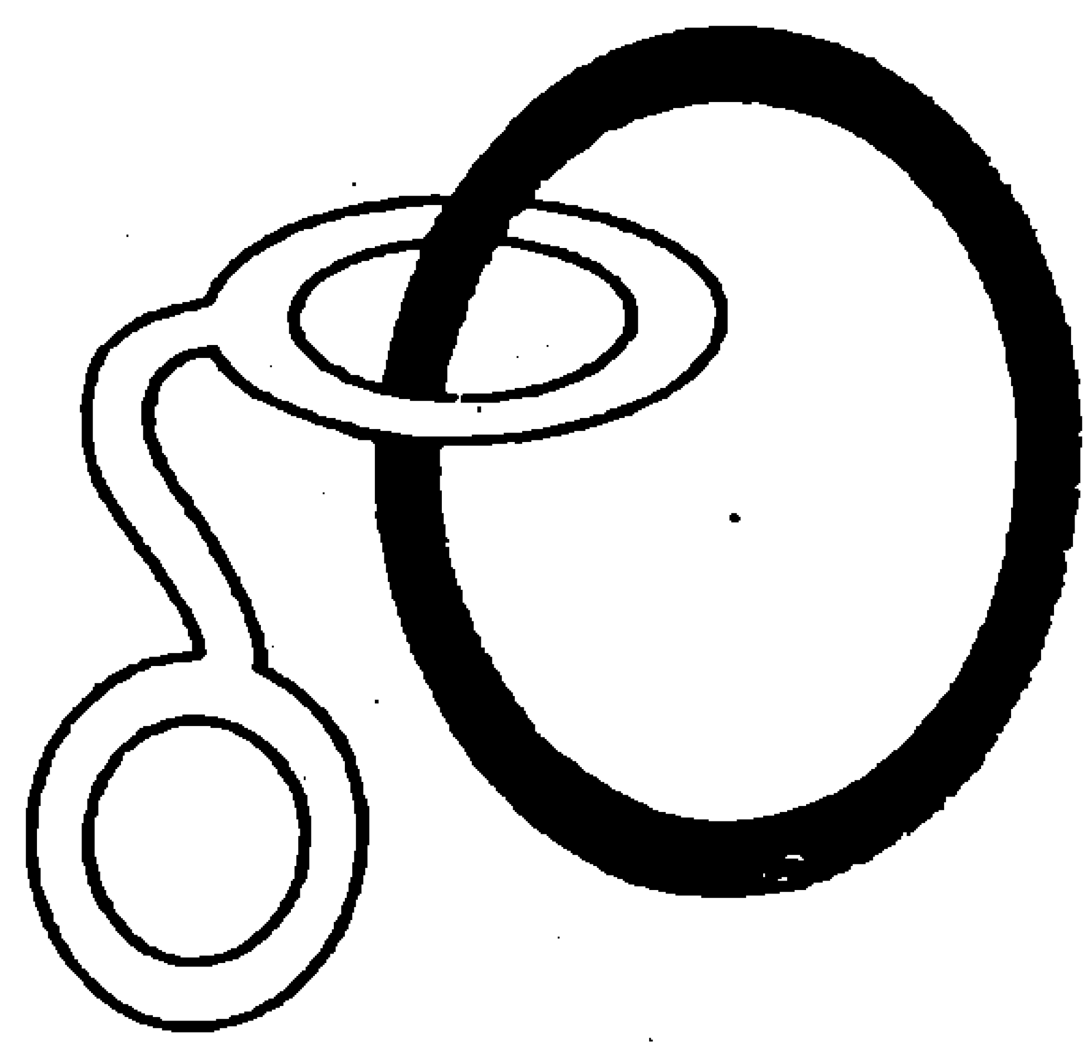
Làm như vậy, cho dù về mặt khách quan chưa chắc đã có thể làm được, nhưng trong topo học là cho phép.

Khoa học nặn đất dẻo cao su kỳ lạ mà lý thú, có những vấn đề cho dù người có sức tưởng tượng phong phú đến đâu, cũng đều phải bỏ ra nhiều công sức.

Sau đây là một vấn đề huyền diệu mà kỳ cục: Có ba vòng làm bằng đất dẻo cao su, lồng vào nhau như hình 10-3, trong đó một vòng to lồng qua hai vòng nhỏ nối với nhau. Mời bạn hãy dùng biện pháp dán đất dẻo cao su (*Chú ý:* Vừa không được kéo đứt, cũng không cho phép ghép lại các phần bị tách ra) làm cho một vòng nhỏ thoát ra khỏi vòng lớn, biến thành hình 10-4.

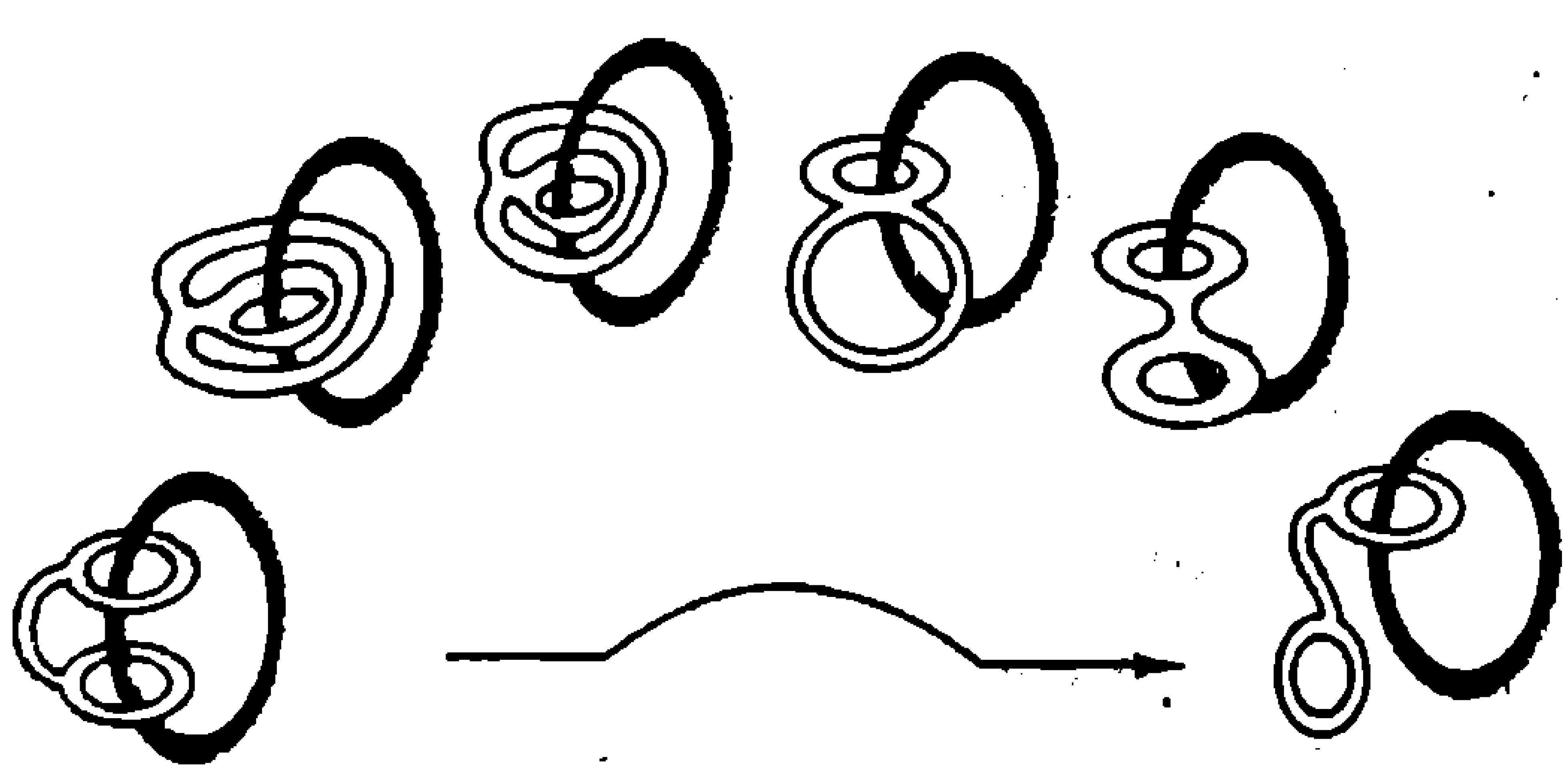


Hình 10-3



Hình 10-4

Bạn đọc mới học có thể cảm thấy không sao hiểu nổi! Hình 10-5 sẽ làm cho bạn đọc thấy được một phép nặn tinh xảo có một không hai. Chỉ có trong topo học mới có dịp hiểu được cái kỳ tích hiếm thấy trên thế gian này.



Hình 10-5

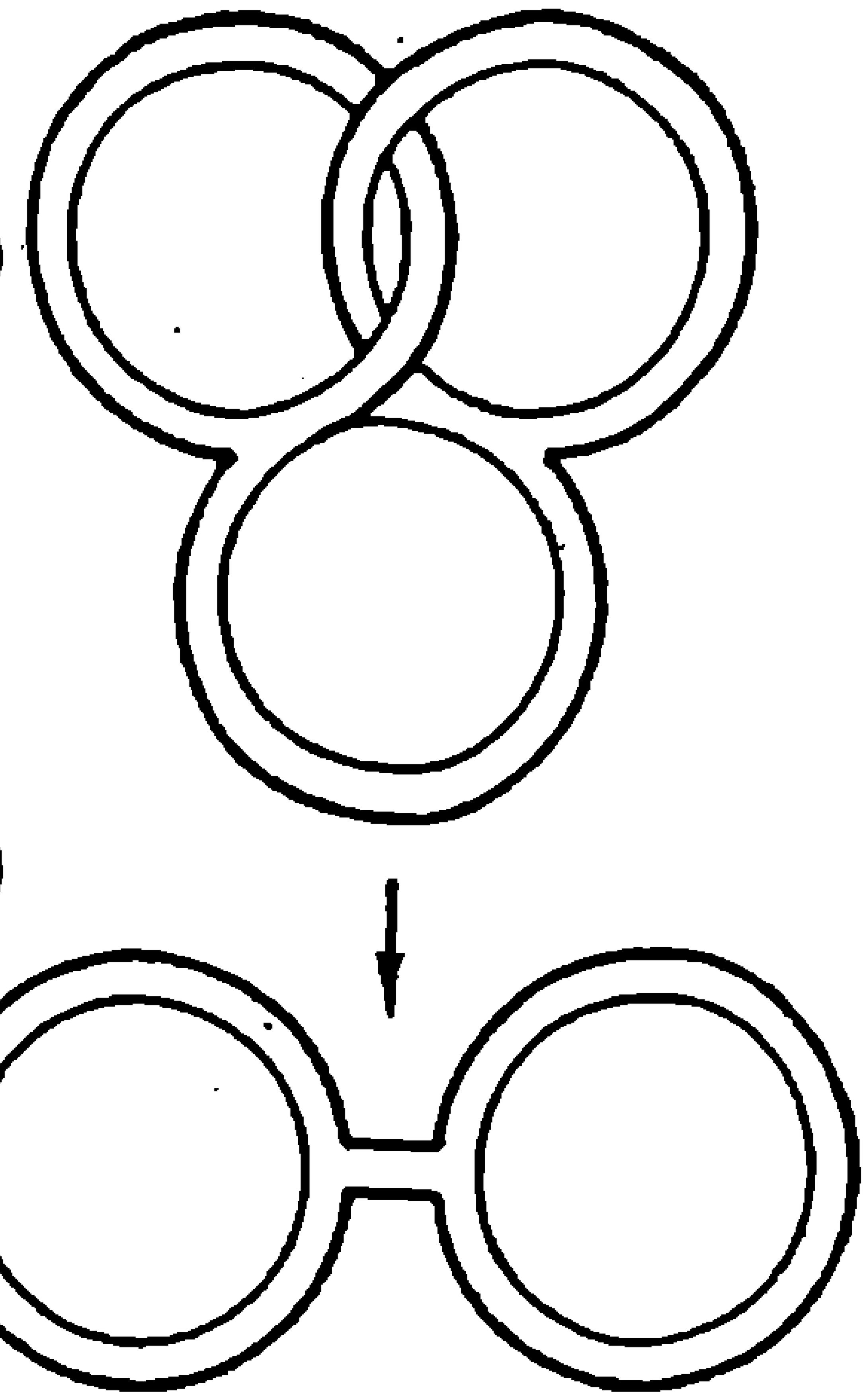
Sau đây lại là một ví dụ kỳ diệu:

Có ba vòng mà một vòng nối với hai vòng lồng vào nhau (hình 10-6a), làm bằng đất dẻo cao su. Hỏi bạn có thể dùng biện pháp nặn đất dẻo cao su mà nặn thành hai vòng nối liền nhau như hình 10-6b không?

Để sức tưởng tượng của bạn đọc có dịp phát huy hết, chúng tôi cố ý để lời giải ở cuối mục. Nhưng cần nói với bạn đọc rằng: yêu cầu này chắc chắn là thực hiện được.

a)

b)



Hình 10-6

Có thể có bạn đọc hỏi: Trong topo học đã cho phép một hình thể không gian nắn đi nắn lại, giống như đất dẻo cao su thì trong không gian mà ta đang sống, hai hình thể như thế nào được gọi là hai hình thể không giống nhau về bản chất? Nghĩa là, cần phải phân loại topo như thế nào đối với hình không gian? Đây đúng là một vấn đề mới và thú vị.

Trước tiên ta hãy xem một ví dụ đơn giản trên mặt phẳng. Mọi người đều biết rằng: Trong 26 chữ cái tiếng Anh viết hoa, có một số chữ cái có thể từ chữ này biến thành chữ khác thông qua uốn cong và co giãn đàn hồi như dây chun. Những chữ cái như vậy, chúng ta quy về cùng một loại. Như vậy 26 chữ cái tiếng Anh viết hoa có thể chia thành nhiều loại. Giữa các loại khác nhau thì không thể biến đổi được. Ví dụ, các hàng chữ cái sau đây lần lượt thuộc các loại khác nhau:

C	L	M	N	S	U	V	W	Z;
K	X;							
E	F	J	T	V;				
D	O;							

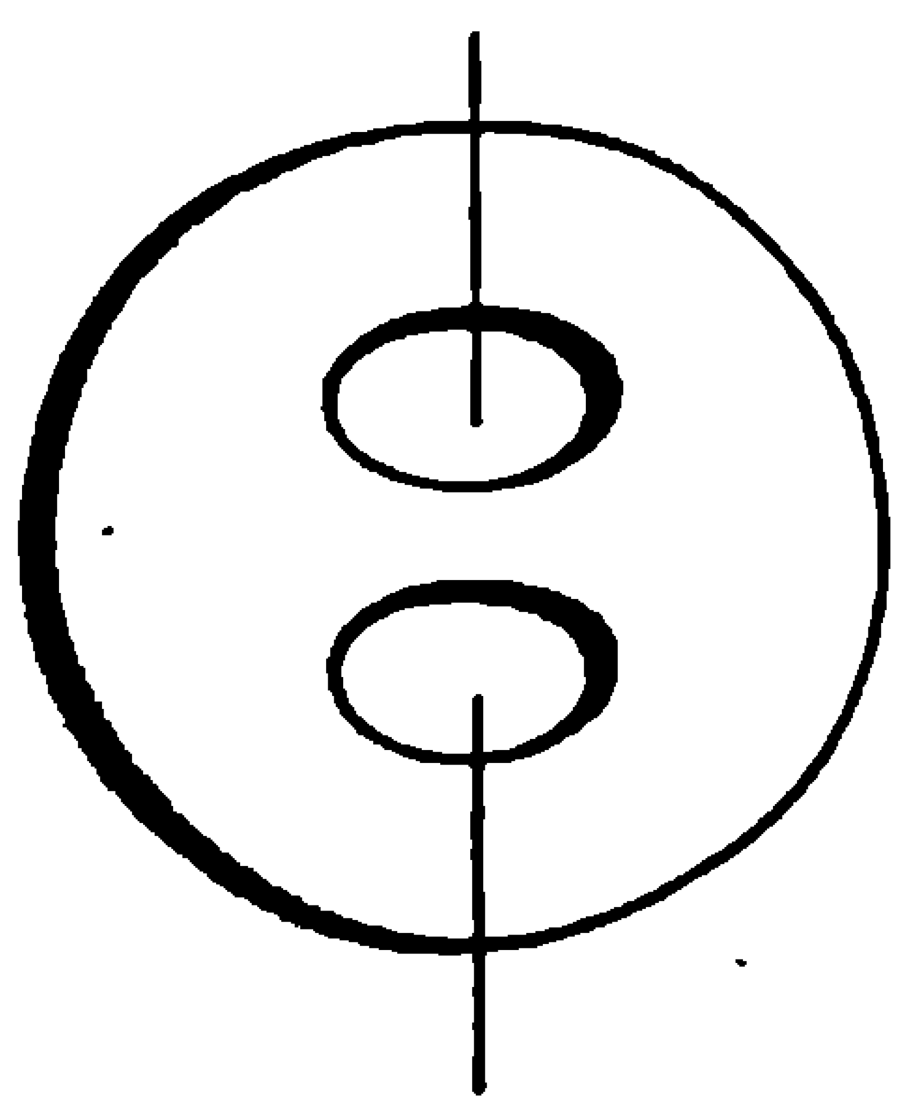
...

Bạn đọc hoàn toàn có thể tự viết tiếp bảng chữ cái ở trên và nghiên cứu một chút các loại chữ cái có đặc trưng gì chung? Chắc bạn đọc thông minh sẽ không khó phát hiện quy luật trong đó.

Tình hình trong không gian đương nhiên là phức tạp hơn nhiều. Nhưng có một điểm khẳng định là hai hình có thể nhờ phương pháp nặn đất dẻo cao su thay đổi để đạt được, đều thuộc cùng một loại topo.

Xét số lớn nhất đường khép kín đơn không cắt nhau trên một mặt trong không gian mà khi cắt theo các đường này, mặt vẫn còn dính nhau. Số đó gọi là *giống* của mặt.

Giống của mặt cầu là 0. Giống của mặt xuyến là 1. Giống của hình 10-7a và hình 10-7b đều bằng 2. Hai mặt cùng một loại topo thì giống của chúng phải bằng nhau.

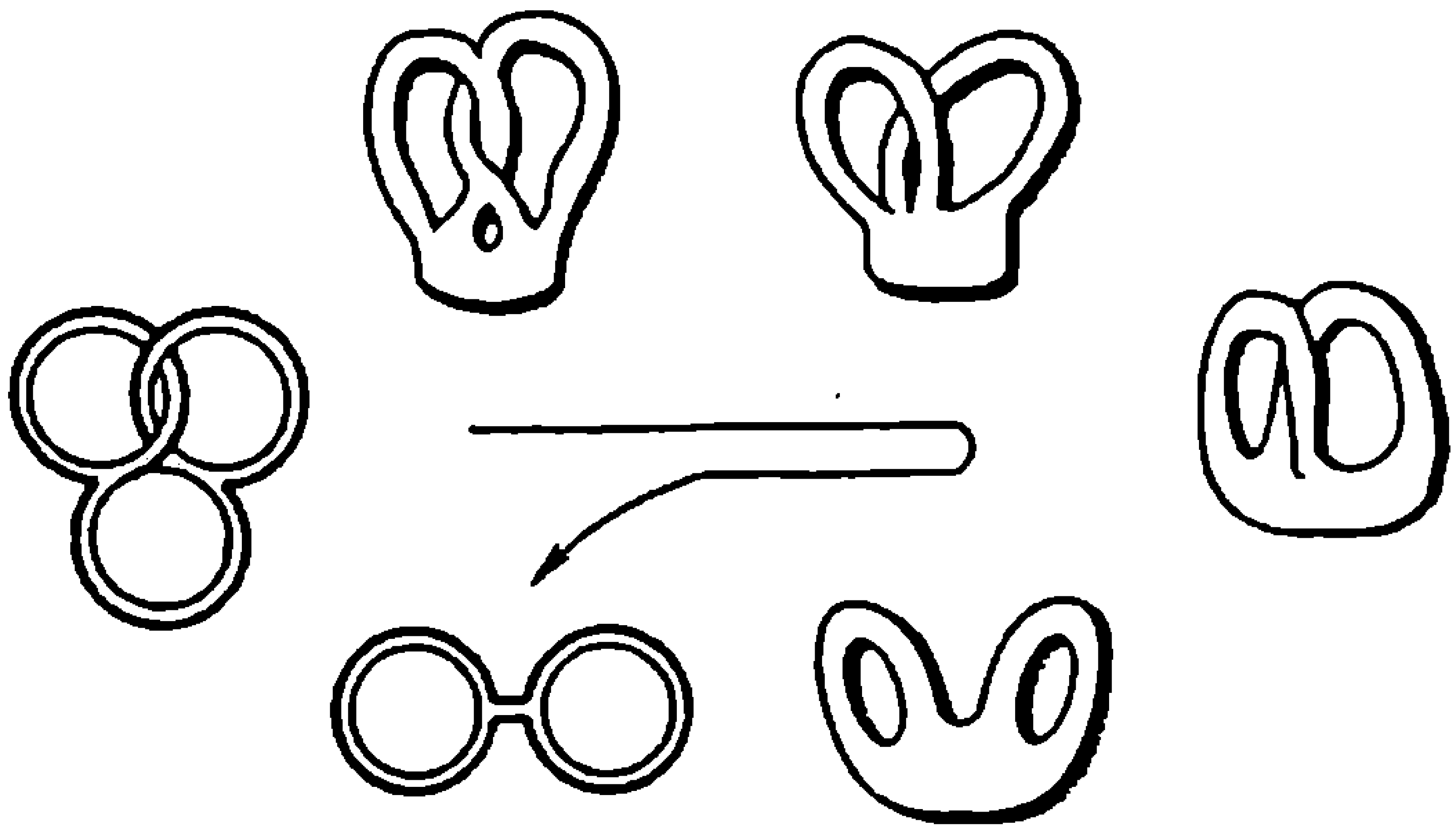


a)

b)

Hình 10-7

Cuối cùng chắc bạn đọc rất muốn biết, mình có thể tưởng tượng đúng với vấn đề khéo nặn đất dẻo cao su "ba vòng biến thành hai vòng". Giải đáp ở hình 10-8 có thể giúp các bạn đối chiếu. Chúc các bạn thành công!

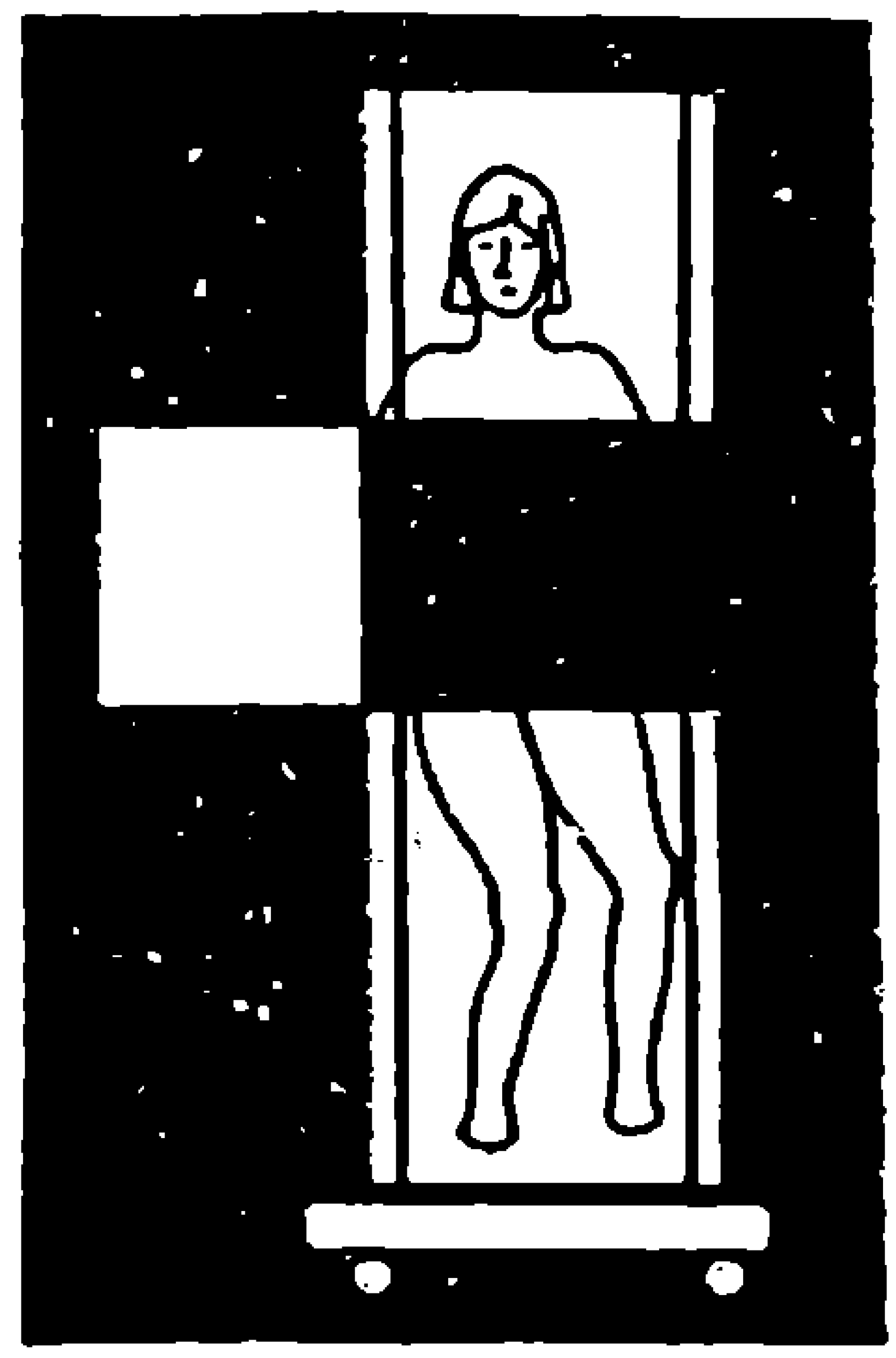


Hình 10-8

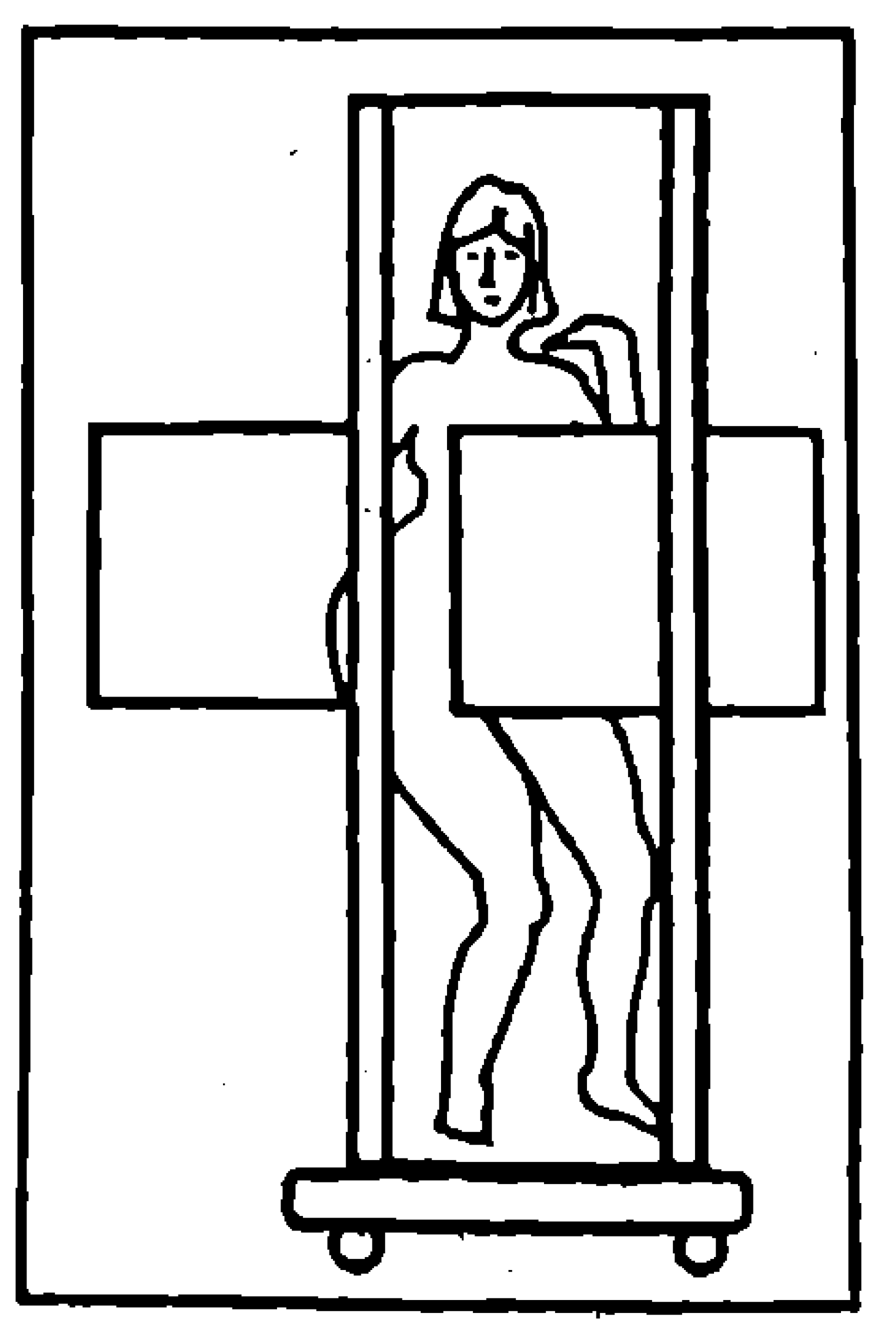
11. TRÒ ẢO THUẬT BỆN THỪNG LÝ THÚ

Các trò ảo thuật mà chúng ta thường thấy, phần lớn là dùng cách "che mắt" khán giả. Thông qua các đạo cụ tinh xảo, thủ pháp thành thạo, dùng phương thức biểu diễn nghệ thuật, che dấu hình dạng thật đi khiến khán giả xem một loại dáng vẻ giả, rung động lòng người mà nghĩ mãi không ra.

Có một trò ảo thuật làm khán giả rất thán phục, suýt nữa được giải vàng của cuộc thi ảo thuật thế giới. Đó là "Tủ chia ba cơ thể" do nhà ảo thuật bậc thầy Jang Rosas người Pháp biểu diễn. Khi biểu diễn, ông để một cô gái xinh đẹp, mảnh mai đứng trong một cái tủ, sau đó cắm hai tấm dao thép vào ngang lưng, đúng là cắt ngang nữ diễn viên thành ba đoạn. Tiếp theo lại đẩy đoạn giữa sang một bên, giống như hình 11-1 mà bạn đọc nhìn thấy. Vì khán giả tận mắt nhìn thấy đầu, tay và chân của cô gái tuy chia làm ba phần nhưng vẫn còn cử động nên không ai là không tin. Trên sân khấu trước mắt có phải đã xảy ra vụ án mạng không? Kỳ thực nếu xem hình 11-2 thì bạn đọc hoàn toàn yên tâm.



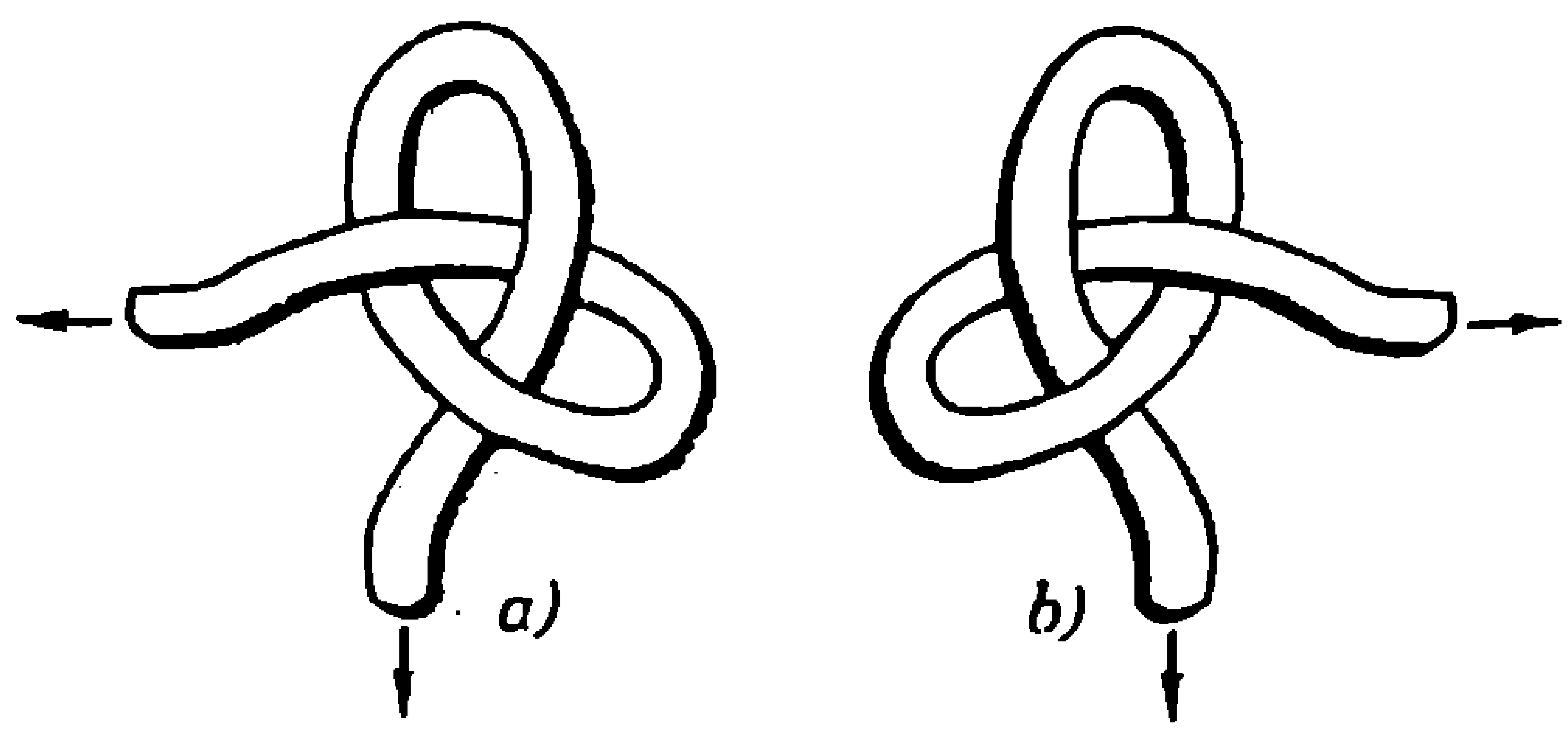
Hình 11-1



Hình 11-2

Có điều là, trò ảo thuật buộc dây thừng sau đây không phải là hình giả như trò ảo thuật "Tủ chia ba cơ thể" vừa nói, mà là khoa học thực thụ; tất cả đều là kết quả tất nhiên. Ở đây chỉ là sự thay đổi topo phức tạp, vượt khỏi trình độ tưởng tượng của khán giả mà thôi.

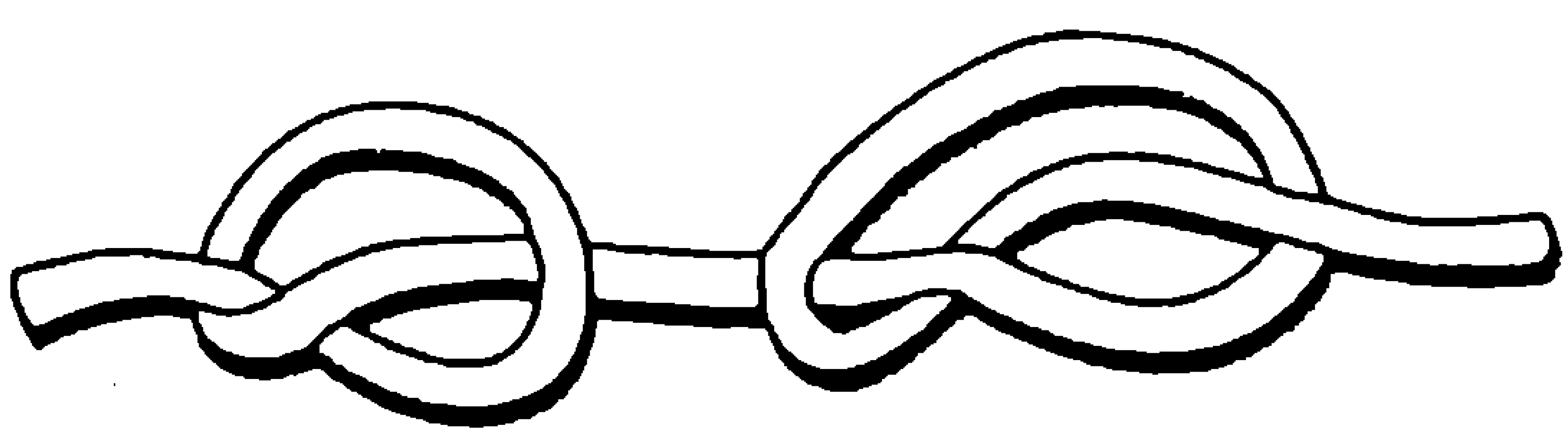
Bạn đọc có kinh nghiệm đều nhận thức được rằng: một sợi dây thừng hai đầu nối lại với nhau, nếu trước khi nối không thắt nút thì sau khi nối lại sẽ không có nút. Ngược lại, lúc đầu nếu đã thắt nút thì sau khi nối lại, cái nút này mãi mãi tồn tại.



Hình 11-3

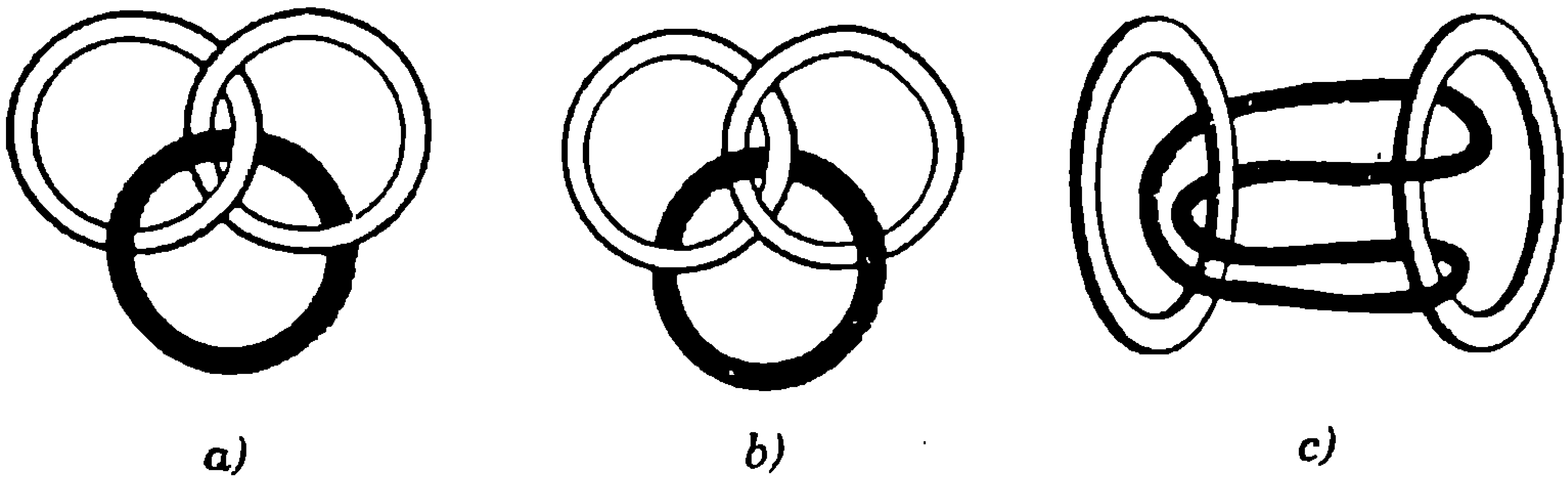
Nút dây thừng đơn giản nhất có hai loại. Để bạn đọc nhìn rõ hơn, ta thắt hai loại nút thừng rất lỏng, như hình 11-3. Hai nút dây thừng này là ảnh trong gương của nhau.

Có thể có người tưởng rằng: đem hai loại nút dây thừng này thắt trên một dây thừng, sau đó dịch chúng lại một chỗ (hình 11-4), sẽ triệt tiêu nhau. Bạn đọc thử một chút sẽ biết, điều đó là không thể được. Các nhà toán học đã tìm được một chứng minh nghiêm túc của thử nghiệm đó.



Hình 11-4

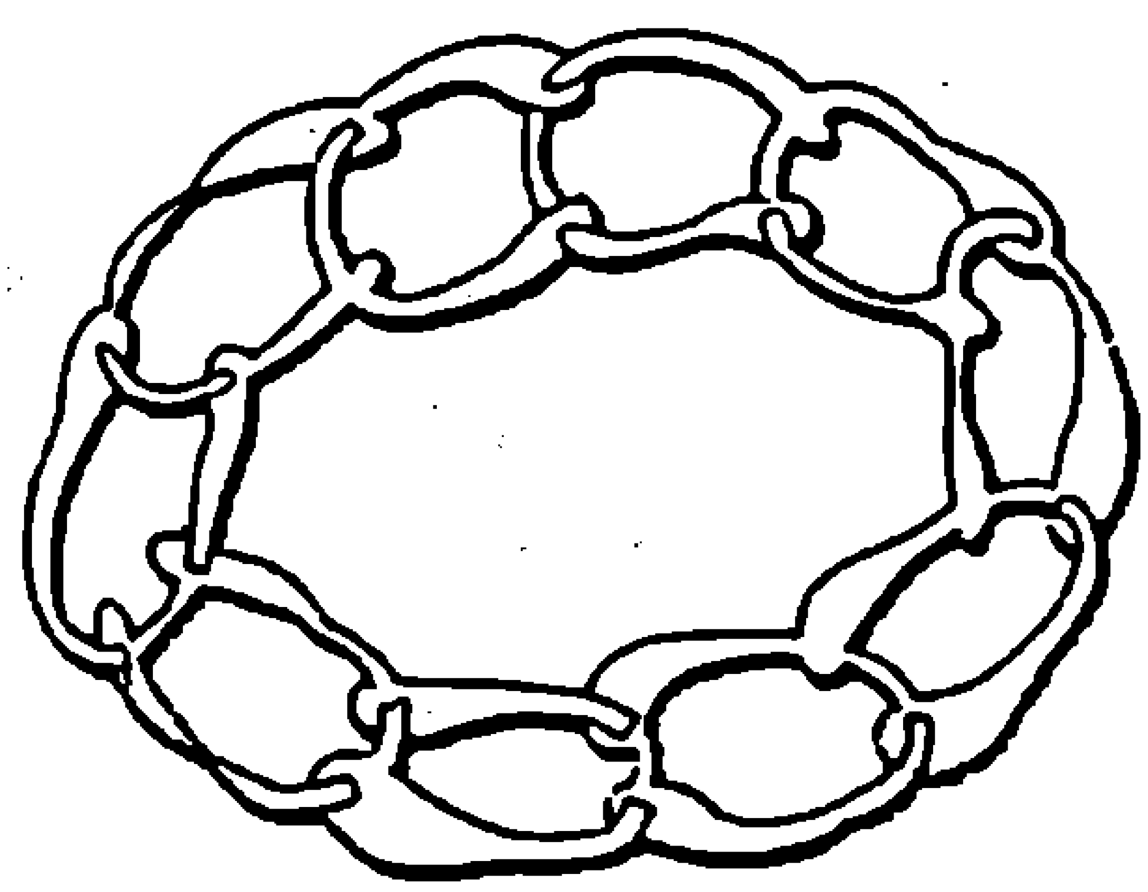
Ba vòng dây thừng ở hình 11-5a lồng vào với nhau. Nếu bạn cắt đứt bất cứ một vòng nào trong đó thì hai vòng còn lại vẫn lồng vào nhau. Hình 11-5b lại khác, ba vòng dây thừng tuy cũng lồng vào với nhau, nhưng chỉ cần cắt một trong ba vòng, ba vòng sẽ rời nhau ngay (tức là không móc vào nhau nữa).



Hình 11-5

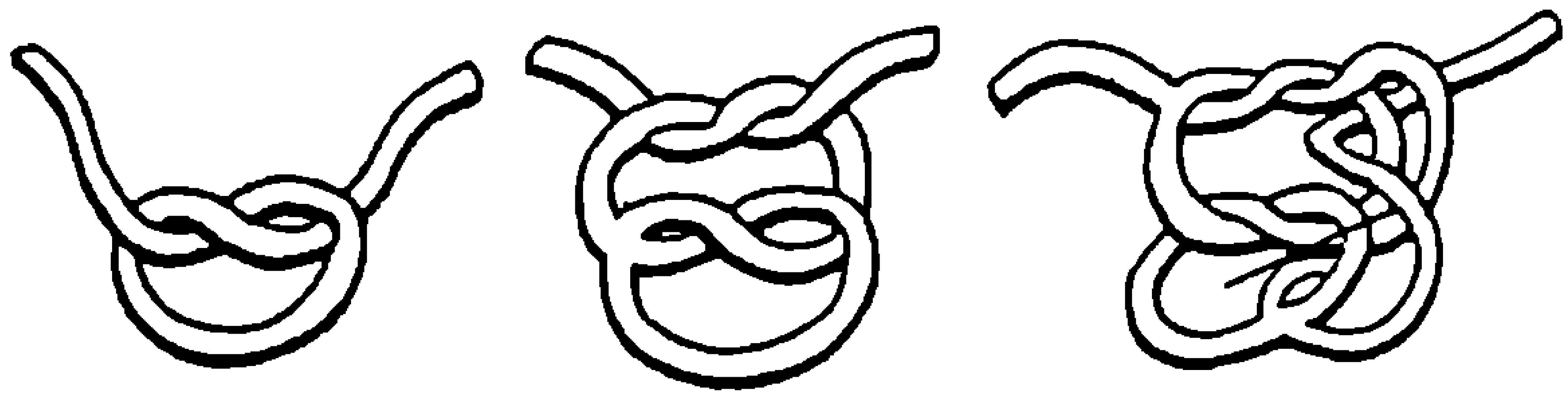
Bạn đọc hãy làm ba vòng dây thừng như hình 11-5b, sau đó kéo hai vòng không tô đen ra phía ngoài, kết quả là vòng tô đen biến dạng như hình 11-5c.

Cách lồng của vòng dây thừng tô đen trong hình 11-5c để một cái lồng vào một cái khác thì chắc chắn có thể nối thành một sợi dây xích hình vòng kín như hình 11-6. Chúng ta chỉ cần tuỳ ý cắt đứt một vòng bất kỳ thì cả vòng dây xích sẽ tan rã, mỗi vòng nhỏ đều tự rời nhau ra.



Hình 11-6

Có một loại thắt nút rất nổi tiếng gọi là "Nút Siphaco". Đây là một loại nút giả, thường được dùng trong trò ảo thuật thắt nút. Cách thắt "Nút Siphaco" (hình 11-7): Đầu tiên thắt một nút thuận (hình 11-7a), rồi lại thắt một nút ngược (hình 11-7b), sau đó vòng lồng lại như hình 11-7c. Lúc này nếu cầm hai đầu dây kéo ra, ta sẽ được ngay một sợi dây như ban đầu.

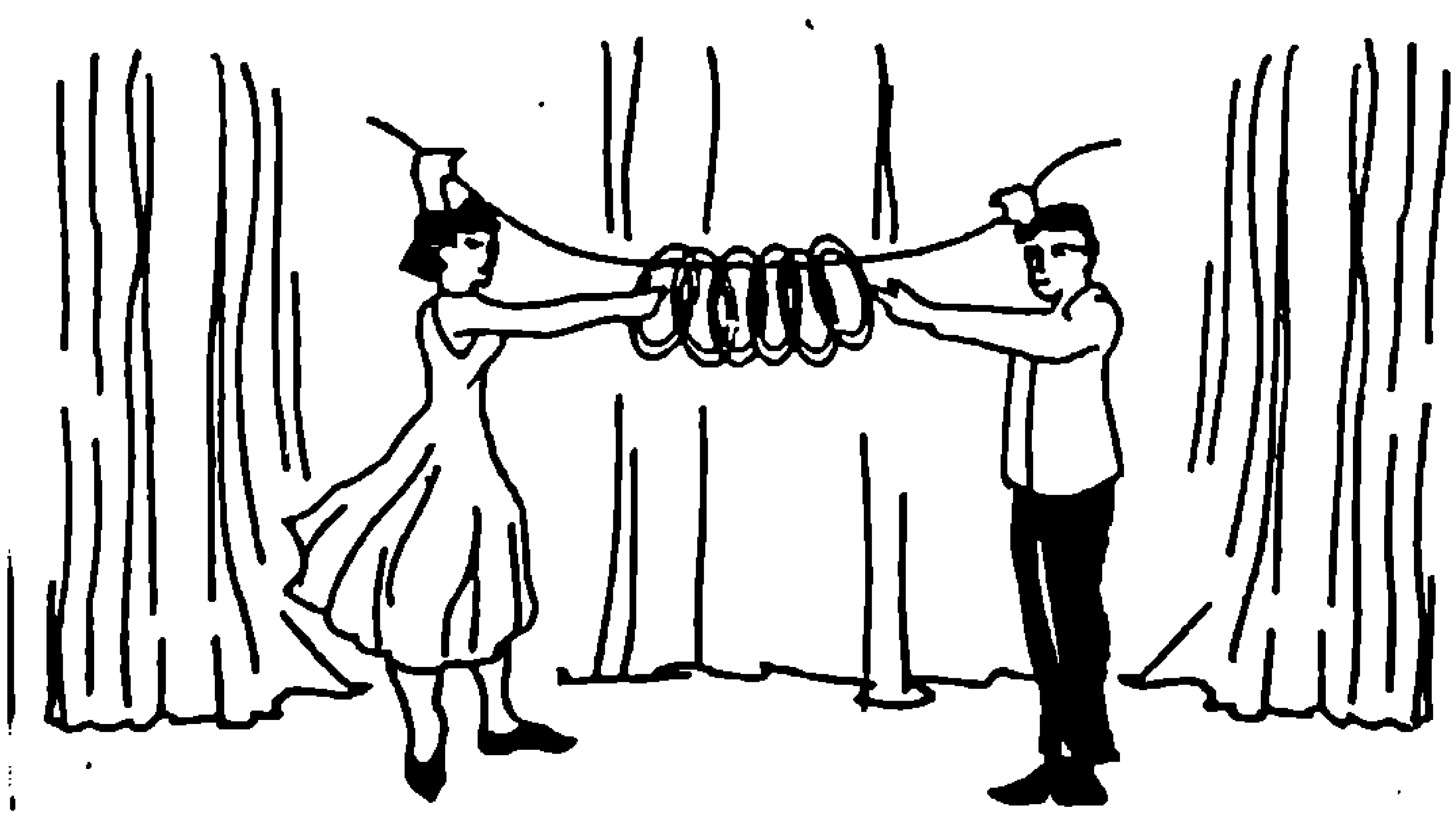


a) b) c)

Hình 11-7

Sau đây chúng ta hãy thưởng thức một số trò ảo thuật thắt dây thừng khác. Bạn đọc nhanh chóng phát hiện những kiến thức topo học mà ta đã biết trong mấy mục trước, làm sao có thể len lỏi một cách khéo léo vào những trò ảo thuật này.

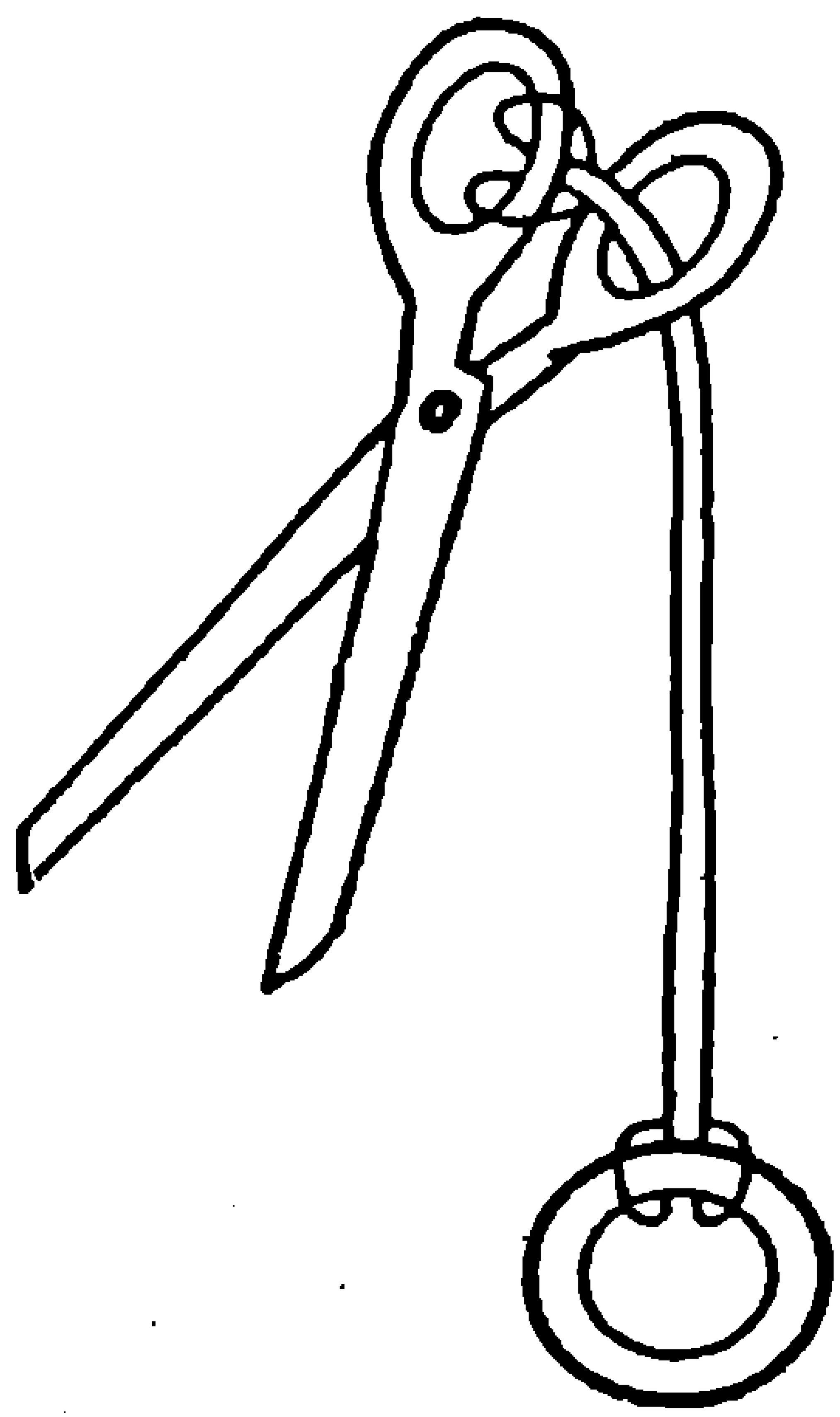
Có một trò chơi topo rất đơn giản nhưng quả thật có ích cho việc rèn luyện tư duy cho con người, đặc biệt là các bạn trẻ. Dùng một sợi dây thừng xâu sáu vòng sắt, hai đầu sợi dây mở tự do như hình 11-8.



Hình 11-8

Bạn có thể lấy ra hai vòng sắt ở giữa, mà không để các vòng sắt ở hai đầu rời khỏi dây thừng không? Chắc rằng bạn đọc thông minh có thể nghĩ ra, nhưng chúng ta hãy để cách giải trò này cũng với trò sau đây ra cuối mục.

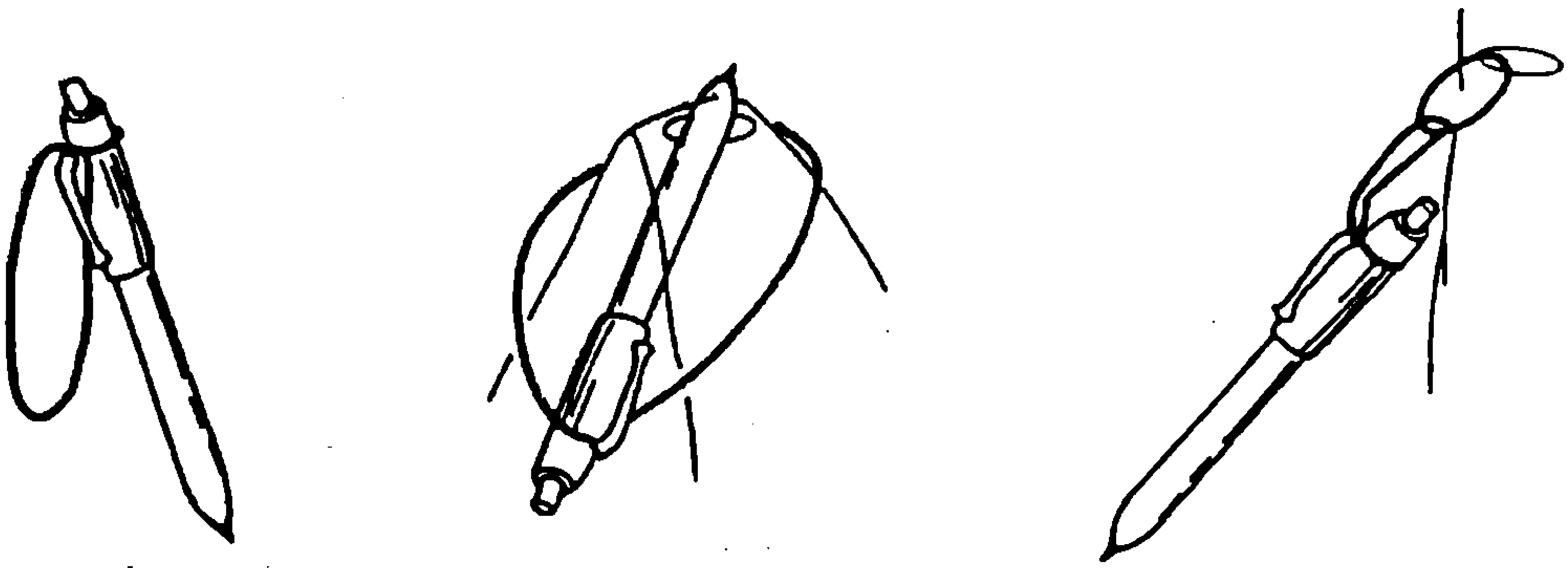
Một trò ảo thuật vô cùng tinh xảo khác gọi là "Cái kéo khéo giải". Buộc một sợi dây mảnh vào cái kéo như hình 11-9. Cán kéo là một vòng kín, đầu sợi dây luồn qua lỗ cán kéo và buộc với một vòng thể thao, ý là không được để một đầu dây luồn qua lỗ cán kéo. Hỏi, với điều kiện không cắt sợi dây, bạn có thể lấy sợi dây ra khỏi kéo được không?



Hình 11-9

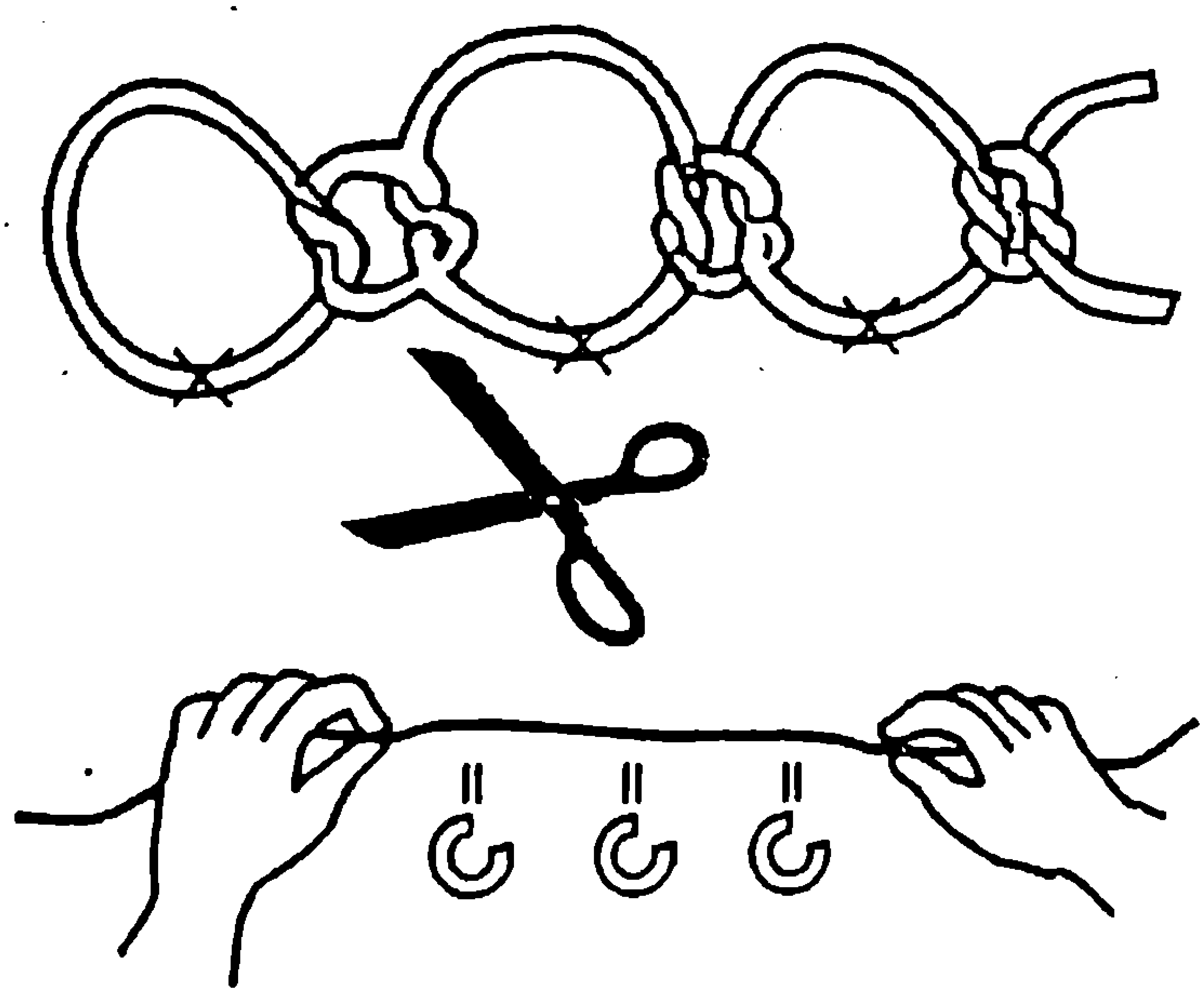
Có thể có một số bạn chưa quen với trò ảo thuật này, vậy hãy làm một trò đơn giản hơn nhưng rất giống trò ảo thuật vừa nói, có thể bạn sẽ nắm chắc hơn cách giải trò ảo thuật ở hình 11-9.

Buộc một sợi dây mảnh vào một cái bút bi, thành một vòng, sau đó luồn qua lỗ khuy áo như hình 11-10. Sau khi kéo chặt sợi dây biến thành hai nút chết rất giống như trong "Cái kéo khéo giải". Bây giờ bạn thử tháo nó ra xem, sẽ dễ dàng thực hiện được, bởi vì chỉ cần hoàn nguyên trở lại. Song, hoàn nguyên như vậy sẽ có gợi ý nhiều cho việc thực hiện trò ảo thuật "Cái kéo khéo giải".



Hình 11-10

Còn có một trò khiến người ta mở rộng tầm mắt: Lấy một sợi dây dài khoảng 1m, thắt sợi dây này thành ba - bốn nút như hình 11-11 (phải thắt nút đúng như hình vẽ), sau đó lấy kéo cắt đứt những chỗ đánh dấu "x", rồi kéo sợi dây ra hai phía, kỳ tích sẽ xuất hiện ngay: sau khi các đầu mẩu dây rơi, trước mắt là một sợi dây hoàn chỉnh (liền).

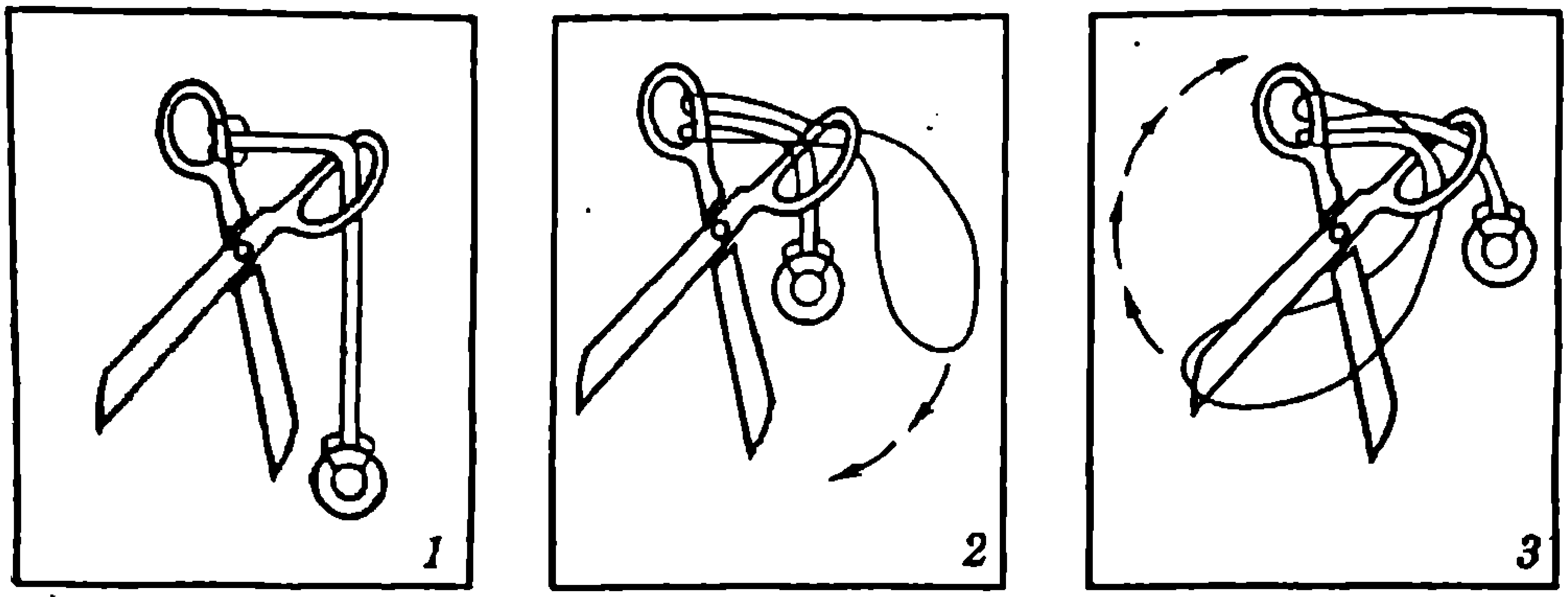


Hình 11-11

Trả lời hai trò ảo thuật ở trên:

1. *Lấy vòng ở giữa:* Nối hai dây lại, chuyển hai vòng sắt ở một đầu sang đầu kia, sau đó mở dây ra, lấy hai vòng sắt ở giữa ra rất dễ dàng.

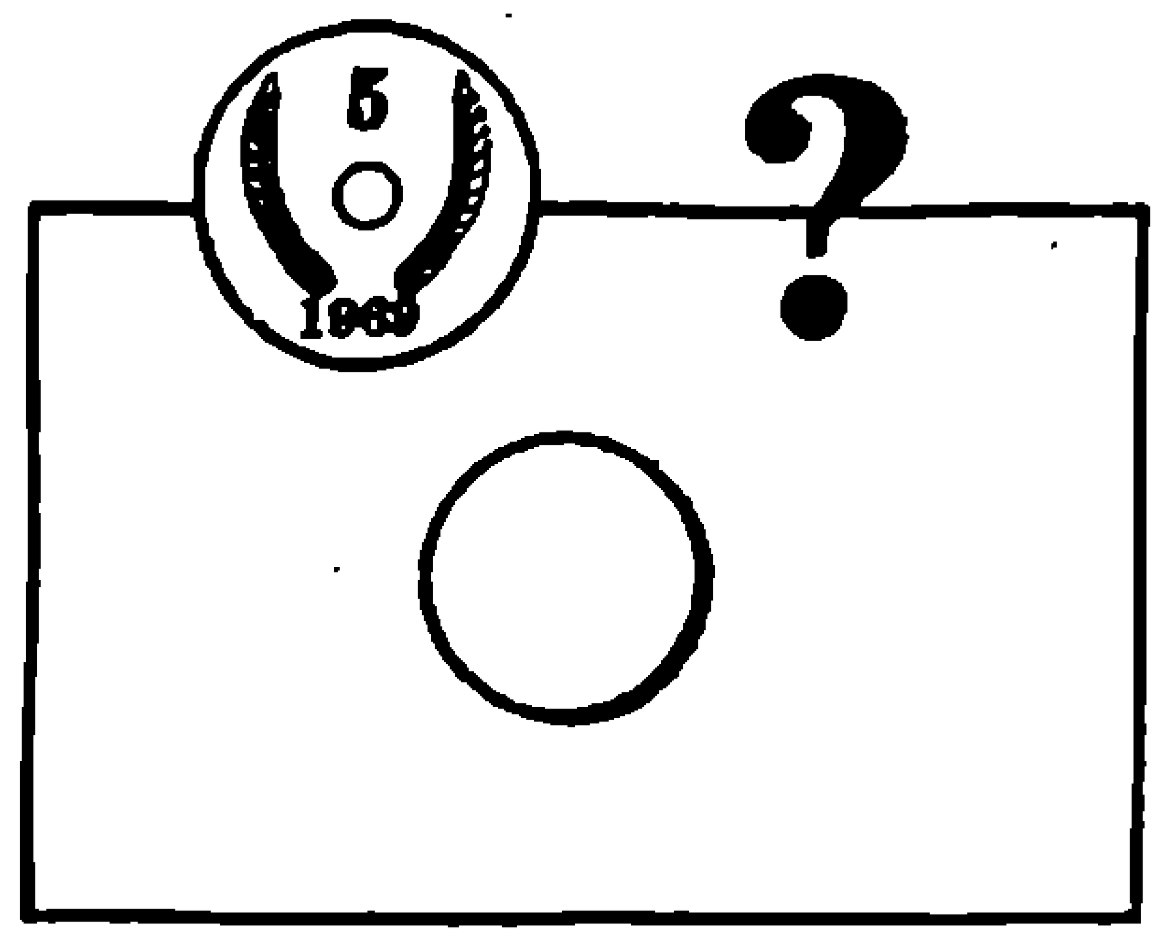
2. *"Cái kéo khéo giải":* Cách giải như hình 11-12.



Hình 11-12

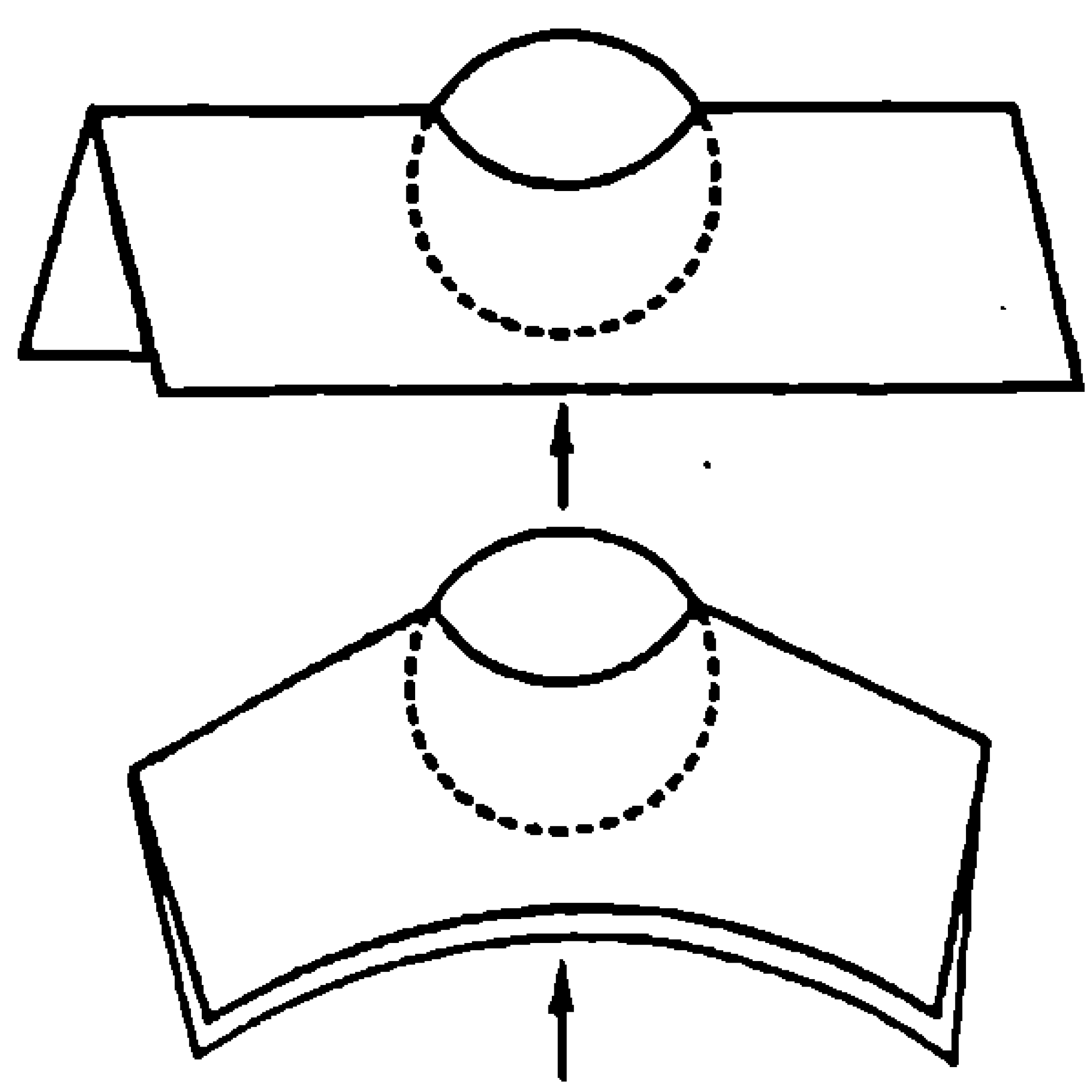
12. ẢO THUẬT TOPO KỲ DIỆU

Ảo thuật topo có hiệu quả lạ lùng: Lúc đầu khán giả cảm thấy không thể tưởng tượng nổi, thậm chí không thể tin được. Nhưng khi khán giả nhìn thấy tận mắt thì họ tự tin và nếu họ tự làm lấy thì lại cộng thêm niềm vui sướng của sự thành công. Không ít bạn đã trở thành "nhà ảo thuật" nhỏ. Trên tờ giấy có một lỗ tròn (hình 12-1), hỏi có đồng xu đường kính lớn hơn lỗ tròn thì có thể lọt qua lỗ tròn này được không? Đương nhiên, tờ giấy không được xé ra. "Đồng tiền to lọt qua lỗ tròn nhỏ"? Bạn đọc có thể cảm thấy không thể hiểu nổi, bởi vì đồng tiền to làm sao có thể lọt qua lỗ tròn nhỏ hơn được?



Hình 12-1

Có điều là, chỉ cần đường kính của đồng tiền không vượt quá 1,5 lần đường kính lỗ thì có thể thực hiện được yêu cầu nêu trên. Bí quyết của trò ảo thuật topo đơn giản này chỉ cần xem sơ đồ giải là rõ (hình 12-2).



Hình 12-2

Moliere (1622 - 1673, tên thật là Jean Baptiste Poquelin) nhà viết kịch lớn, bậc thầy hài kịch của Pháp đã viết đoạn văn sau đây:

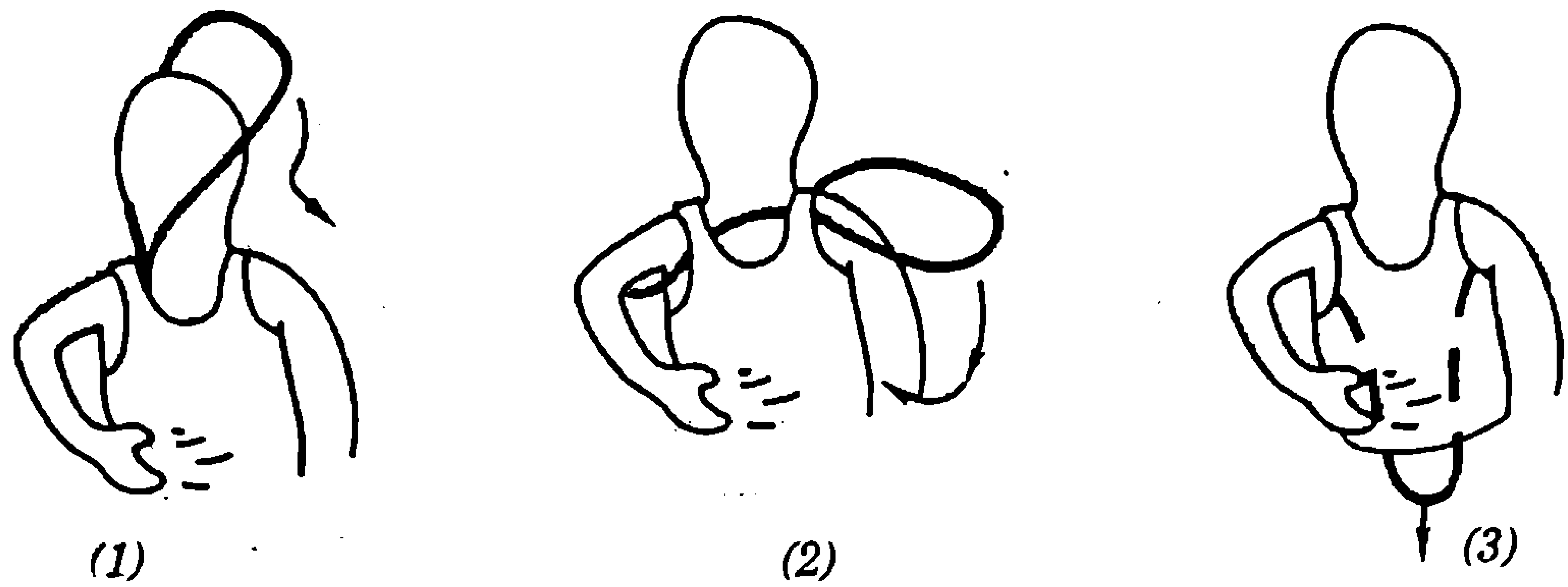
"Khi tôi đến miền Nam nước Pháp, ở đó thấy một người thắt một sợi dây dài chừng hơn 1 mét thành một cái vòng, treo vào cổ tay, mà tay này lại nắm chặt vạt áo (hình 12-3). Anh ta tuân theo hai quy định một cách nghiêm ngặt: một là sợi dây không được cởi ra, cũng không được cắt đứt; hai là áo lót không được cởi ra, cũng không được cắt rách. Vậy mà chỉ mấy phút, anh ta đã lấy được vòng dây treo ở tay ra".

Hình 12-3

Đoạn văn của Moliere tả một người làm trò ảo thuật, thường được gọi là "Vấn đề Moliere". Nhìn bề ngoài tựa hồ trò ảo thuật này không thể thực hiện được, song chỉ cần xem kỹ một chút sẽ phát hiện ra rằng: tay phải của người biểu diễn ảo thuật nắm chắc vạt áo lót nhưng giữa áo và thân người thực tế là ở trạng thái tách rời nhau. Do đó sợi dây lồng ở cổ tay hoàn toàn có thể lợi dụng không gian giữa áo và thân người mà lấy ra được. Hình 12-4 là các động tác của quá trình lấy sợi dây ra.

Nếu trong ảo thuật này được cởi áo lót thì thực hiện càng dễ hơn. Bởi vì, nếu người biểu diễn cởi áo lót ra, lúc này chẳng khác gì trên tay anh ta cầm áo lót, lại giữ một sợi dây chẳng có liên quan gì. Bây giờ muốn lấy sợi dây ra là việc "dễ như trở bàn tay".

Từ trò ảo thuật đơn giản này làm cơ sở, bạn đọc tìm bí mật ảo thuật sau đây cũng sẽ không khó khăn lắm.



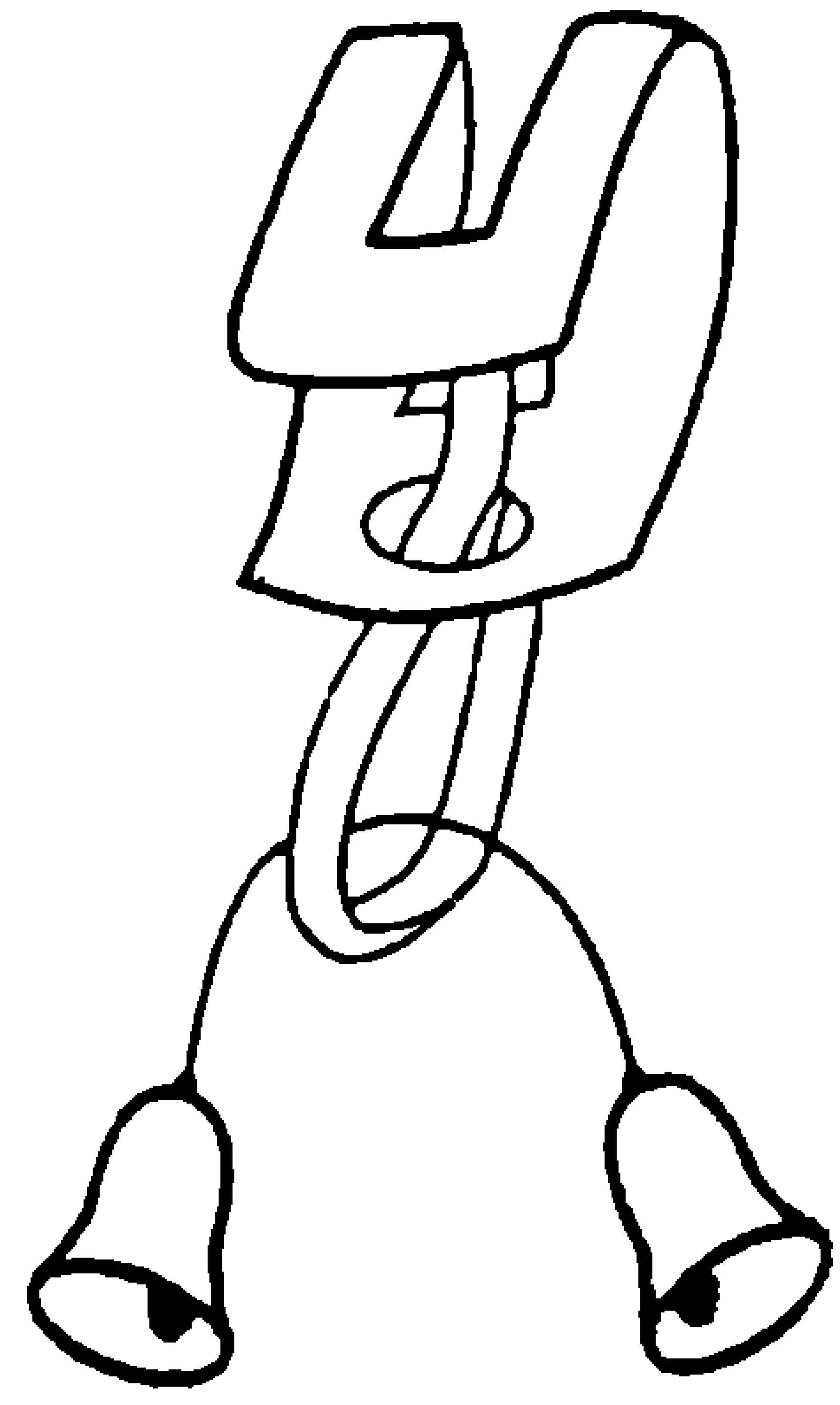
Hình 12-4

Ảo thuật đòi hỏi người biểu diễn mặc áo lót và bên ngoài mặc chiếc áo khoác. Để biểu diễn thuận tiện và cũng để khán giả nhìn được rõ hơn, tốt nhất là áo khoác không cài cúc. Mục đích cuối cùng của ảo thuật này là: Trước mặt khán giả, vẫn mặc áo khoác mà cởi được áo lót ra. Giải đáp ảo thuật này cũng dành cho bạn đọc.

Một ảo thuật topo thú vị khác gọi là "Trộm chuông". Một tấm da mỏng ở trên đó có hai đường thủng, phía dưới có một lỗ, một sợi dây vô cùng chắc xuyên qua lỗ và hai đường thủng này như hình 12-5 và hai đầu sợi dây buộc hai quả chuông. Bây giờ bạn hãy nghĩ cách lấy chuông và sợi dây buộc chuông cùng ra khỏi tấm da mỏng.

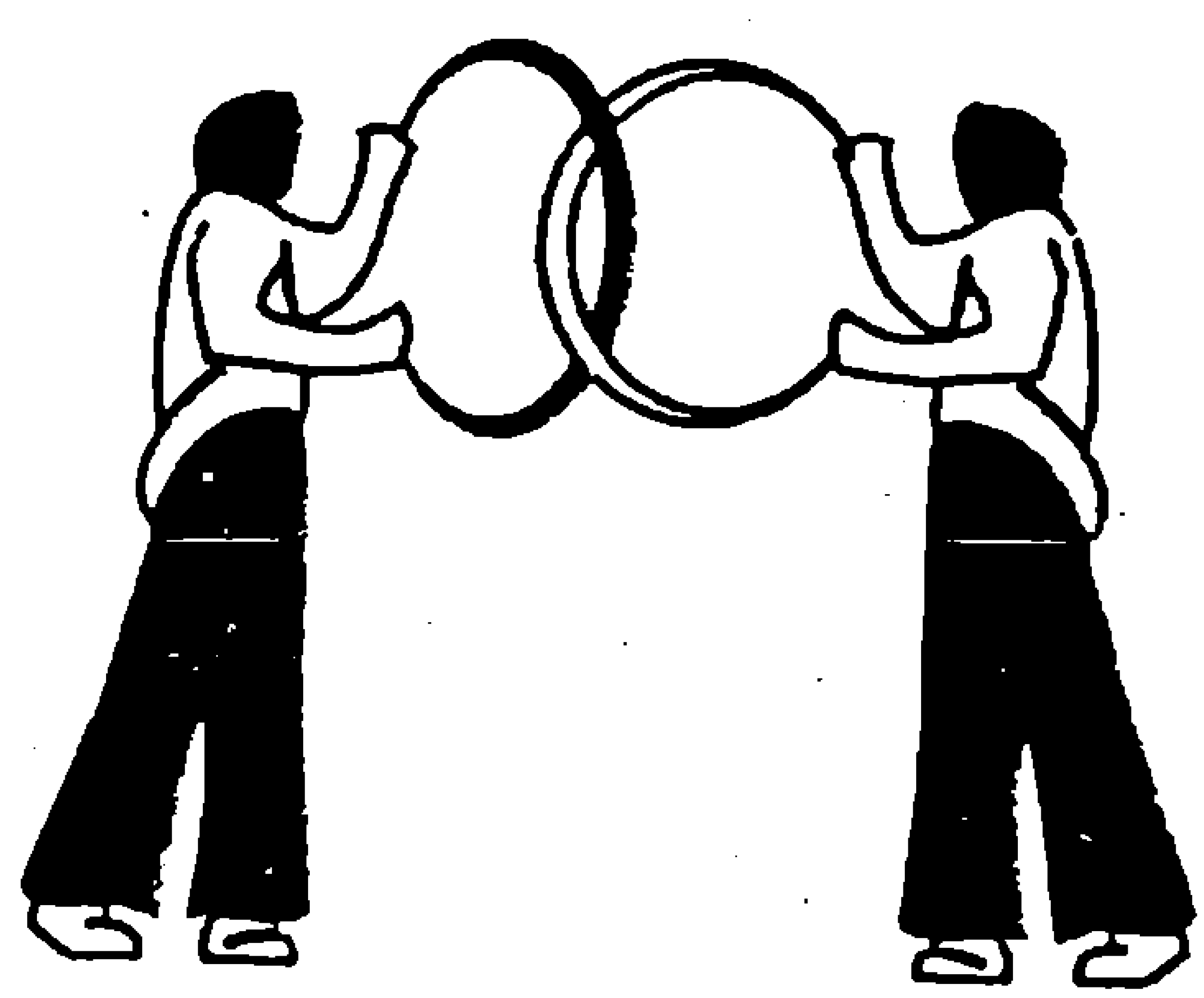
Hình 12-5

Bạn đọc chớ vội cho rằng trò này cũng giống như trò "Đồng tiền to lọt qua lỗ tròn nhỏ" đã nói ở trên. Thực tế chuông ở đây lớn hơn lỗ rất nhiều, muốn tìm cách để chuông lọt qua lỗ là không thể được. Muốn diễn trò ảo thuật này cần khắc phục những thiên kiến của thói quen. Nhiều người so sánh sợi dây mềm với tấm da mỏng, thường suy nghĩ là cần kéo đi kéo lại sợi dây để lấy chuông ra. Kỳ thực chỗ cần suy nghĩ lại chính là tấm da mỏng chứ không phải sợi dây.



Hình 12-6

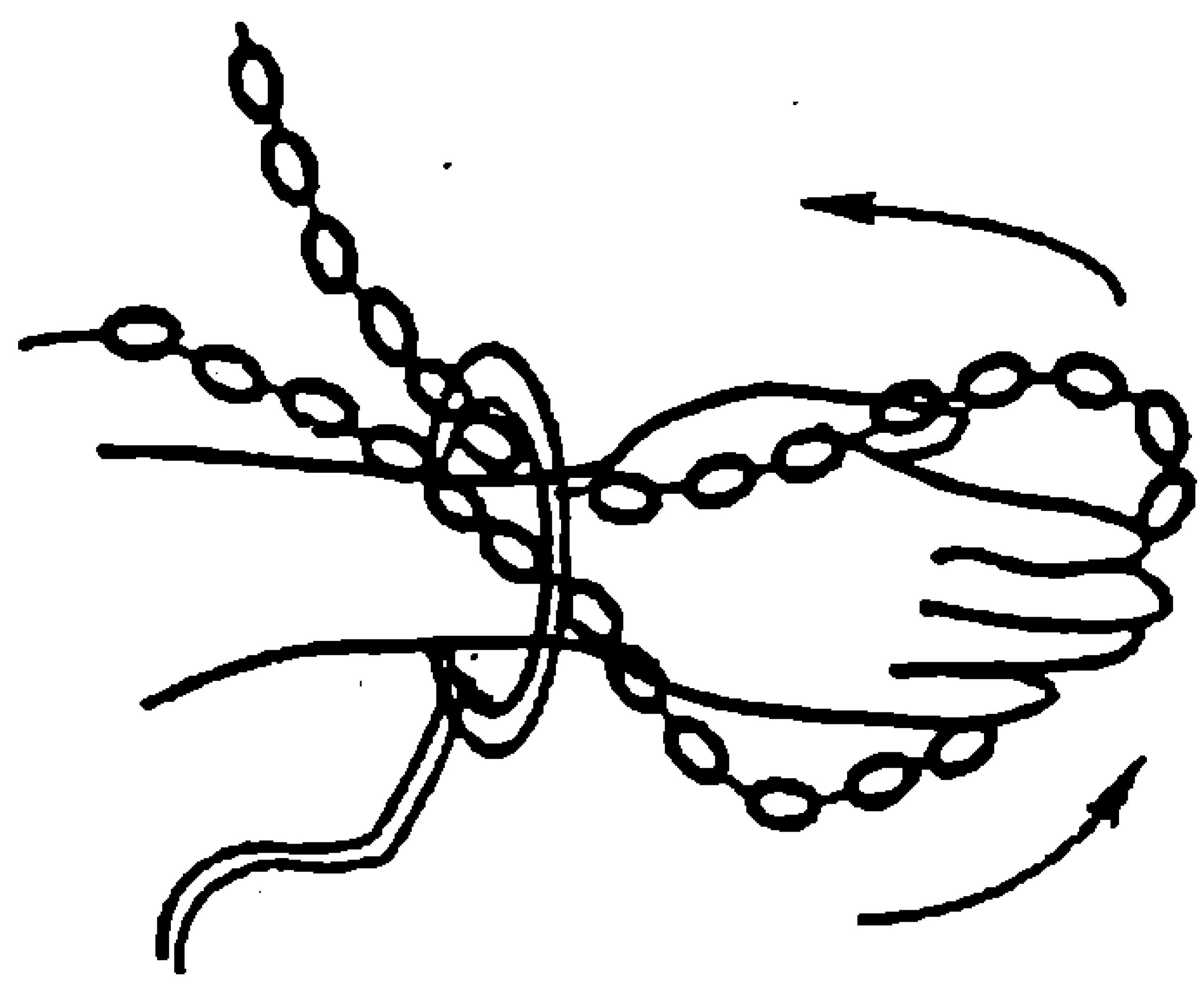
Trong "Vấn đề Moliere" chúng ta đã biết một phương pháp gọi là "Dây không động, áo lót động". Phương pháp này có từ một suy nghĩ phá bỏ lệ thường. Phương pháp của ảo thuật "Trộm chuông" cũng là cách nghĩ khác thường. Chỗ đặc sắc của nó là làm biến dạng một chút cái tấm da mỏng như hình 12-6, để cho băng da nhỏ dài ở giữa hai đường thủng của tấm da mỏng luồn qua lỗ nhỏ xuống dưới, còn sợi dây đeo chuông lại vẫn treo như cũ. Biện pháp tháo chuông tiếp theo như thế nào chắc bạn đọc đã rõ.



Hình 12-7

Có một ảo thuật topo gắn với một câu chuyện gọi là "Phạm nhân trốn thoát". Chuyện kể rằng: Ngày xưa có một vị quốc vương lệnh bỏ tù hai kẻ phản nghịch với tội danh bịa đặt. Chân tường phòng giam có một lỗ mà một người có thể bò qua được. Để ngăn ngừa phạm nhân trốn, quốc vương ra lệnh dùng còng tay và xích sắt khoá hai tay cả hai người lồng vào nhau như hình 12-7. Bây giờ hai kẻ phản nghịch đứng trước tình huống là làm thế nào để hai người tách nhau ra, sau đó từng người một bò qua lỗ chân tường.

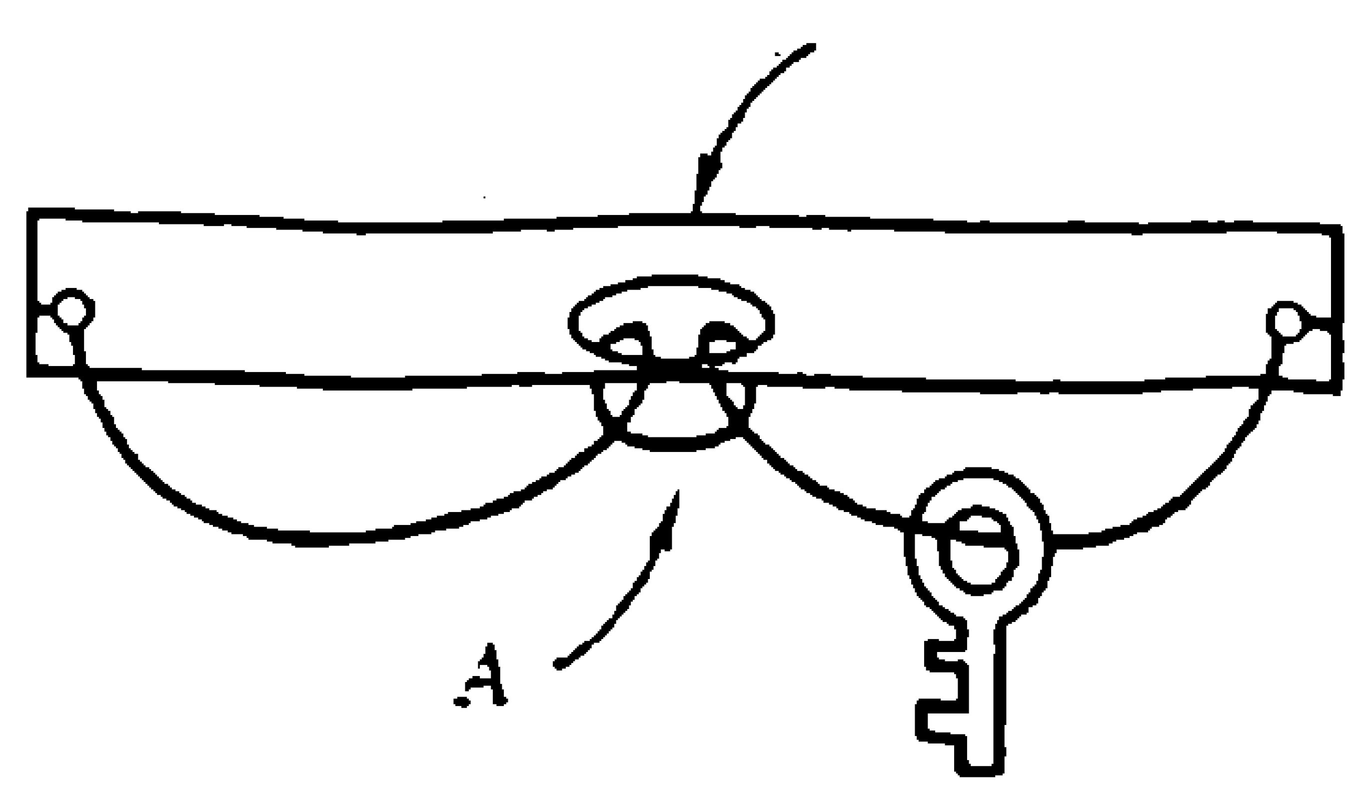
Trong cuộc vật lộn giữa cái sống và cái chết, hai kẻ phạm nhân đã tìm ra được cách thoát.



Hình 12-8

Có thể bạn đọc đã nghĩ ra biện pháp, điều đó đáng được chúc mừng. Giả sử nhất thời bạn đọc chưa nghĩ ra, vậy bạn hãy xem hình 12-8: Anh A lấy xích sắt trên còng tay của mình cho lách qua khe của còng tay anh B, sau đó vòng qua tay của anh B, như vậy hai người có thể tách nhau ra được.

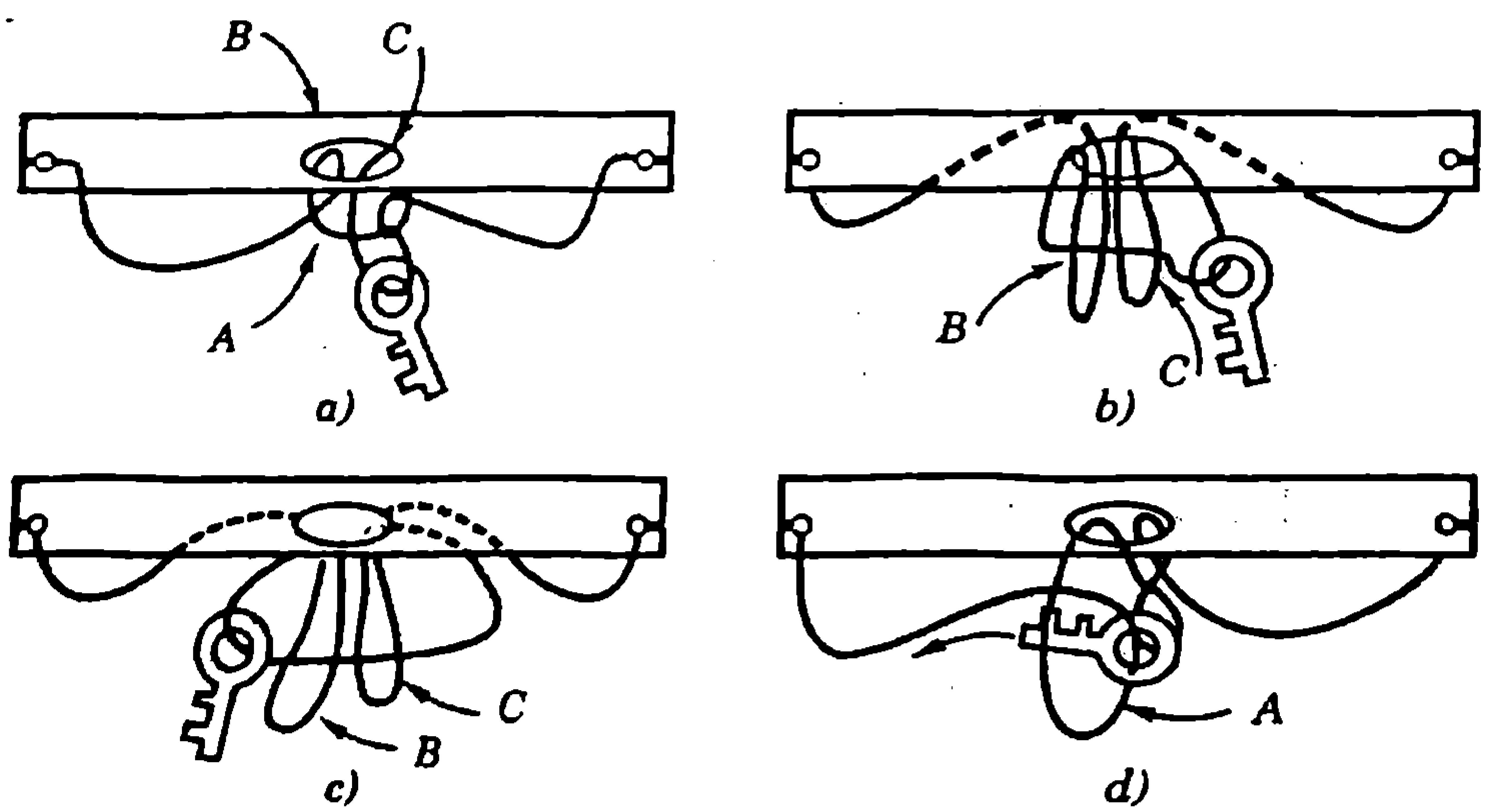
Sau đây là một tiết mục đặc sắc trong ảo thuật topo gọi là "Khéo dịch chìa khoá": một sợi dây buộc vào một thanh gỗ. Đoạn dây bên phải xâu một chiếc chìa khoá (hình 12-9). Lỗ ở giữa



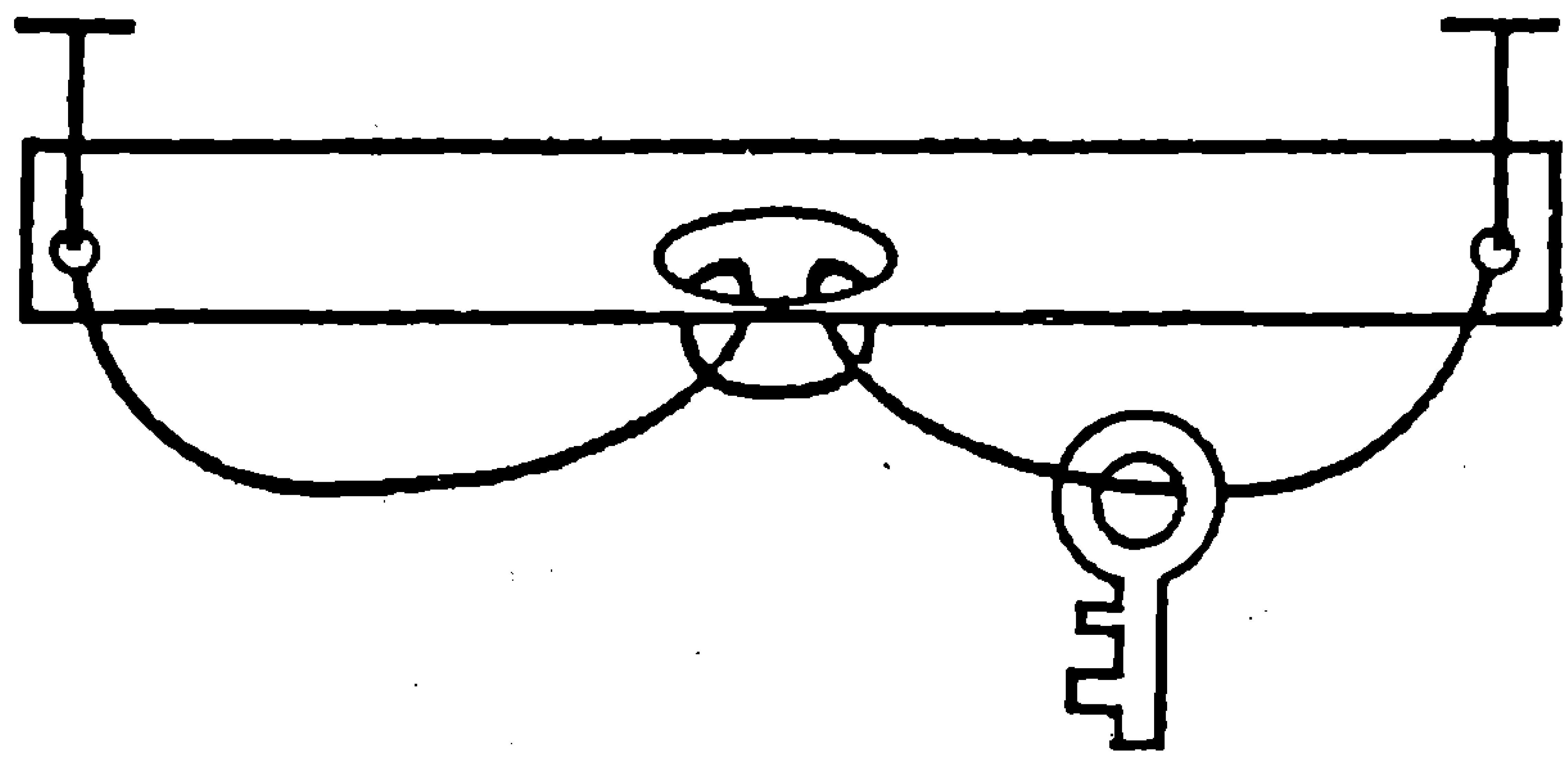
Hình 12-9

thanh gỗ nhỏ hơn chìa khoá nên chìa khoá không thể qua lỗ đó được. Bây giờ yêu cầu đưa chìa khoá ở đoạn dây bên phải khéo léo chuyển sang đoạn dây bên trái. Đương nhiên khi di chuyển không được cởi hoặc cắt dây, cũng không thể làm gãy hoặc hỏng thanh gỗ.

Quá trình biểu diễn ảo thuật tương đối khó này như hình 12-10. Có điều là, chỉ nhìn vào hình vẽ thì khó nhận ra, tốt nhất là tự làm một bộ đạo cụ, luyện đi luyện lại như hình vẽ. Đầu tiên kéo vòng dây A (hình 12-10a) để chìa khoá luồn qua vòng dây A; tiếp đến, lấy tay cầm chặt dây B và dây C cùng kéo, tới khi kéo sợi dây phía dưới thanh gỗ, từ phía sau ra phía trước, hình thành hai vòng dây B và C (hình 12-10b). Bây giờ ta luồn chìa khoá qua hai vòng dây B và C, làm cho nó di chuyển sang bên trái, như hình 12-10c. Sau đó từ phía sau lỗ, cùng kéo hai vòng dây B và C trở về, rồi kéo vòng dây A xuống, mở rộng nó. Cuối cùng luồn chìa khoá qua vòng dây A, như hình 12-10d. Bây giờ kéo chặt sợi dây, chìa khoá đã ở bên trái.



Hình 12-10



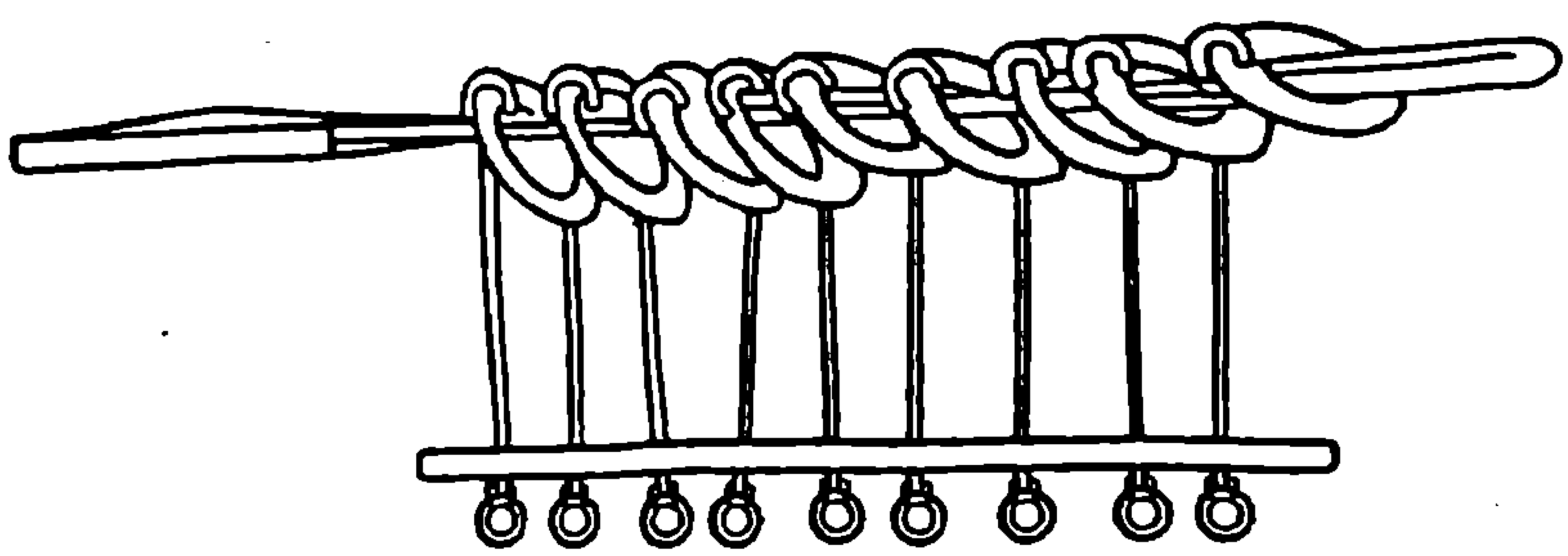
Hình 12-11

Cuối cùng chúng ta hãy xem một trò chơi khác nhưng tương tự (hình 12-11). Chỗ khác nhau với trò chơi ở trên là hai đầu dây vốn buộc trên thanh gỗ, giờ đây đổi thành luồn qua hai lỗ nhỏ; đầu mút dây buộc vào cái cúc lớn, để ngừa dây rời ra. Ảo thuật cũng yêu cầu dịch chuyển chìa khoá sang đoạn dây bên trái. Có điều là, nó có cách đơn giản hơn nhiều. Ở đây lại có một chút giống với thủ thuật đã dùng trong chuyện "Phạm nhân trốn thoát". Cụ thể nhường lại cho bạn đọc.

13. TRÒ CHƠI "CHÍN VÒNG LIỀN"

Trong muôn vàn trò chơi khoa học, "Chín vòng liền" được xem là của quý khó tìm.

Trò chơi "Chín vòng liền" là chín vòng kim loại giống nhau, cái nọ móc vào cái kia và mỗi vòng đều mang theo cán tháo lắp và chín vòng lồng vào khung hình cái kiếm (hình 13-1). Tất cả các cán tháo lắp trên vòng kim loại đều được cố định trên một thanh gỗ ngang hoặc mảnh tôn. Đích của trò chơi là tháo từng cái hết chín vòng ra khỏi khung hình kiếm hoặc ngược lại, từ trạng thái các vòng tách rời nhau, khôi phục thành dạng mỗi vòng móc vào một cán tháo lắp rồi lồng vào khung hình kiếm, đủ cả chín vòng.



Hình 13-1

"Chín vòng liền" là trò chơi có lợi cho trí tuệ, cần được phổ biến rộng rãi.

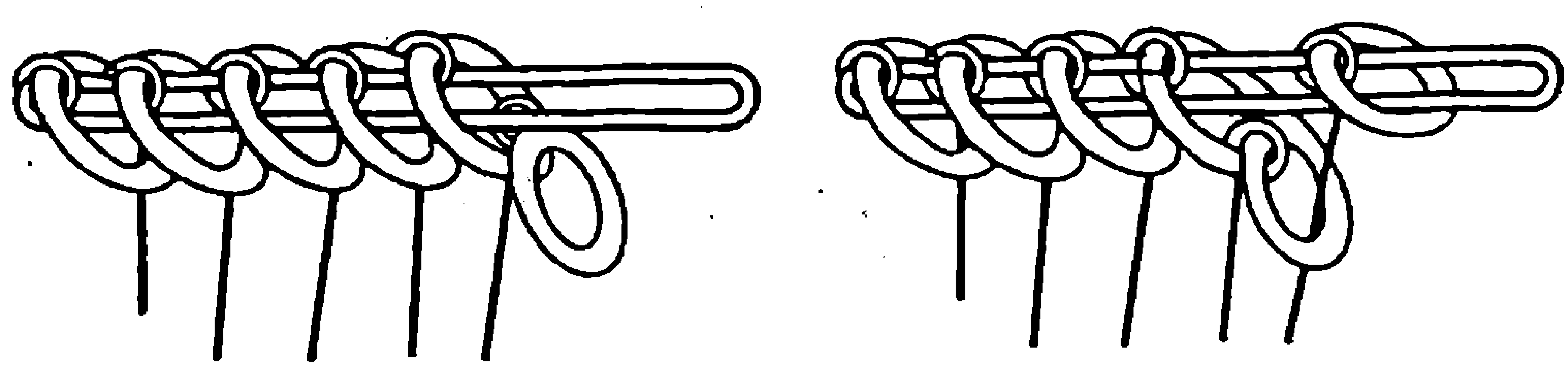
G. Cardano

Trò chơi "Chín vòng liền" xuất xứ ở Trung Quốc, được lưu truyền rộng rãi trong dân gian, rồi truyền ra nước ngoài. Tài liệu nước ngoài đầu tiên nói về trò chơi này xuất bản năm 1550, do nhà toán học nổi tiếng Jérome Cardano

(24/9/1501 – 21/5/1576) người Italia viết và gọi nó là trò chơi "Chín vòng liền Trung Quốc". Năm 1685 nhà toán học John Wallis (23/11/1616 - 28/10/1703) người Anh đã viết thuyết minh tỉ mỉ về trò chơi này.

J. Wallis

Sau đây chúng ta sẽ nghiên cứu một số quy luật của trò chơi "Chín vòng liền". Để thuận tiện, chúng ta ký hiệu số động tác cơ bản cần thiết để tháo k vòng là f(k). Hai thủ pháp tháo vòng biểu thị ở hình 13-2, mỗi loại ta gọi là một động tác cơ bản.



(1) *(2)*

Hình 13-2

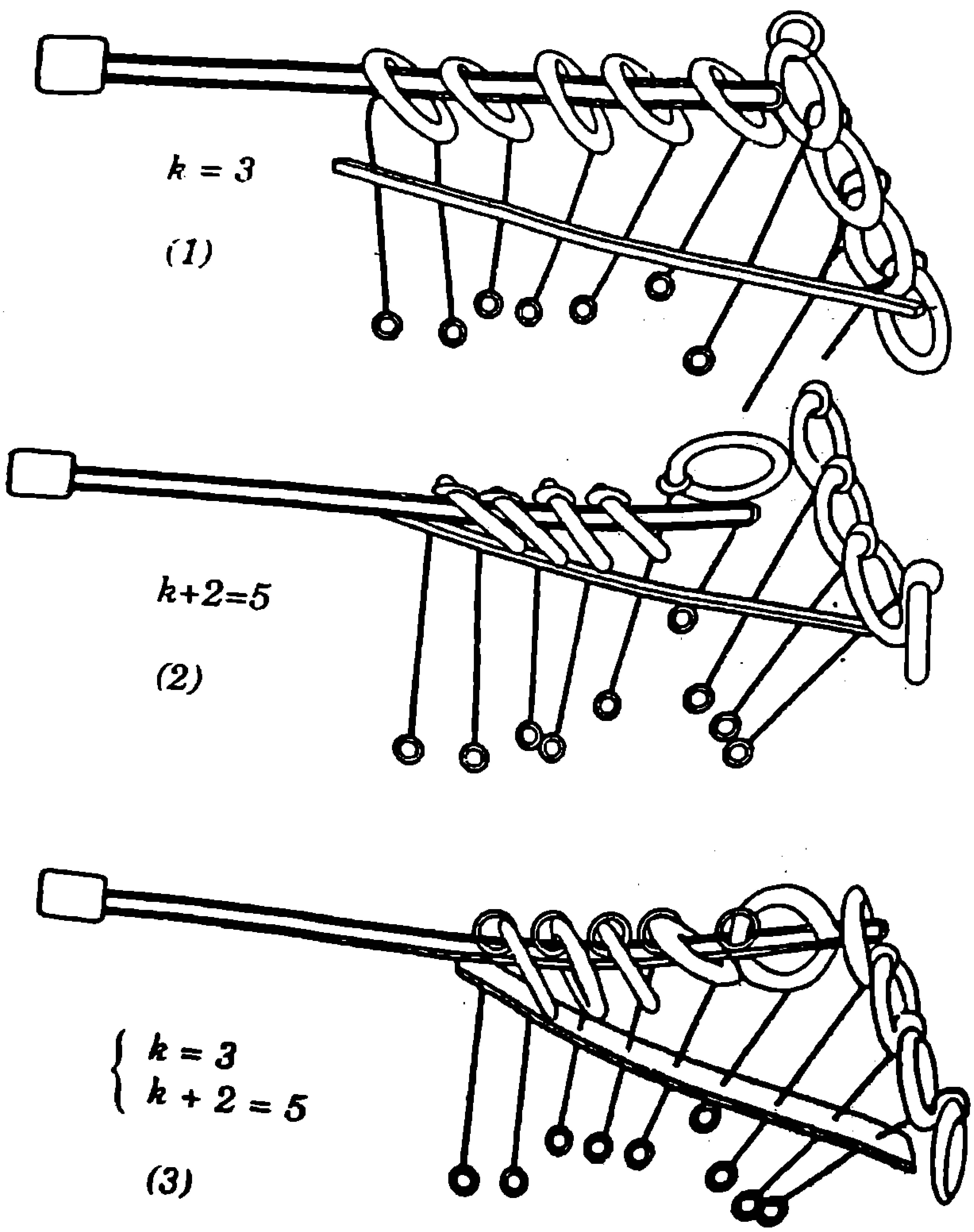
Rất hiển nhiên là, muốn tháo một vòng ra chỉ cần một động tác cơ bản (1), tức là:

$$f(1) = 1. \qquad (13\text{-}1)$$

Muốn tháo hai vòng ra thì trước tiên cần đẩy vòng thứ hai xuống dưới khung hình kiếm (động tác cơ bản (2)), sau đó tháo vòng thứ nhất (động tác cơ bản (1)), do đó tổng cộng cần hai động tác cơ bản, tức là:

$f(2) = 2.$ (13-2)

Để tìm được dạng biểu đạt chung của f(n), đặt k vòng đầu đã dùng số động tác cơ bản f(k) lần tháo ra. Bây giờ ta đẩy vòng thứ k + 2 xuống dưới khung hình kiếm bằng động tác cơ bản (2), tiếp theo lại đưa k vòng đã tháo ra trở lại như cũ bằng f(k) lần động tác cơ bản; cuối cùng mới lại tháo k + 1 vòng đầu ra bằng f(k + 1) lần động tác cơ bản (hình 13-3).



Hình 13-3

Mỗi chuỗi các động tác nêu trên, hiển nhiên không hề ảnh hưởng tới vòng thứ k + 2 đã tháo ra. Vì thế, lúc này trên thực tế ta đã tháo k + 2 vòng đầu ra. Chú ý đến số động tác cơ bản cần thiết để tháo k + 2 vòng đầu ra là k + 2, ta có:

$$f(k+2) = f(k) + 1 + f(k) + f(k+1)$$
$$= f(k+1) + 2f(k) + 1. \qquad (13\text{-}3)$$

Từ (13-3), ta có:

$$[f(k+2) + f(k+1)] = 2[f(k+1) + f(k)] + 1. \qquad (13\text{-}4)$$

Gọi:

$$u_k = f(k+1) + f(k). \qquad (13\text{-}5)$$

Từ (13-5) và (13-4), ta có:

$$u_{k+1} = 2u_k + 1. \qquad (13\text{-}6)$$

Tương tự, ta có:

$$\begin{cases} 2u_k = 2^2 u_{k-1} + 2 \\ 2^2 u_{k-1} = 2^3 u_{k-2} + 2^2 \\ \dots\dots\dots \\ 2^{k-1} u_2 = 2^k u_1 + 2^{k-1} \end{cases} \qquad (13\text{-}7)$$

Cộng (13-7) và (13-6) với nhau và giản ước, ta được:

$$u_{k+1} = 2^k u_1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) \qquad (13\text{-}8)$$

Từ (13-8), (13-5), (13-2) và (13-1), ta có:

$$u_1 = f(2) + f(1) = 2 + 1 = 3. \qquad (13\text{-}9)$$

Từ (13-9) và (13-8), ta có:

$$u_{k+1} = 3 \times 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+2} - 1. \qquad (13\text{-}10)$$

Từ (13-10) và (13-5) ta có hai biểu thức quy nạp về f(k):

$$\begin{cases} f(k+2) + f(k+1) = 2^{k+2} - 1 \\ f(k+2) - f(k+1) = 2f(k) + 1 \end{cases} \qquad (13\text{-}11)$$

Cộng hai biểu thức trong (13-11) lại, ta được:

$$f(k+2) = f(k) + 2^{k+1}. \qquad (13\text{-}12)$$

Khi k = 2m, thì:

$$\begin{aligned} f(2m+2) &= f(2m) + 2^{2m+1} \\ &= f(2m-2) + 2^{2m+1} + 2^{2m-1} \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= f(2) + 2^{2m+1} + 2^{2m-1} + \ldots + 2^3 \\ &= 2 + 2^3 + 2^5 + \ldots + 2^{2m+1} \\ &= \frac{2}{3}(2^{2m+2} - 1) \end{aligned}$$

tức là:

$$f(k) = \frac{2}{3}(2^k - 1) = \frac{1}{3}(2^{k+1} - 2) \qquad (13\text{-}13)$$

Cũng vậy, khi k = 2m + 1, ta có:

$$f(k) = \frac{1}{3}(2^{k+1} - 1) \qquad (13\text{-}14)$$

Từ (13-14) và (13-13), đối với số tự nhiên n bất kỳ, ta có:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{1}{3}(2^{n+1} - 1) & \text{(khi n là số lẻ)} \\ \frac{2}{3}(2^n - 1) & \text{(khi n là số chẵn)} \end{cases} \qquad (13\text{-}15)$$

Từ (13-15) có thể tính ra dãy số "Chín vòng liền":

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(k)	1	2	5	10	21	42	85	170	341

Tất nhiên, dùng (13-15) có thể tính được dãy số "k vòng liền".

Ta cũng có thể tính dãy số f(k) bằng cách tính số sau khi biết số trước, gọi là "phương pháp quy nạp":

$$f(n)=\begin{cases}2f(n-1)+1 & \text{(khi n là số lẻ)}\\ 2f(n-1) & \text{(khi n là số chẵn)}\end{cases} \qquad (13\text{-}16)$$

Vì vậy, muốn tháo được chín vòng của "Chín vòng liền" ra khỏi khung hình kiếm thì cần phải thực hiện 341 động tác cơ bản. Do quá trình tháo vòng phải cùng một lúc dùng cả mắt, tay, óc, hơn nữa động tác cơ bản quá nhiều, nên ít nhất cũng phải mất 5 phút. Cho nên thực hiện trò chơi này là một sự rèn luyện tốt cho trí tuệ và tính kiên nhẫn của con người.

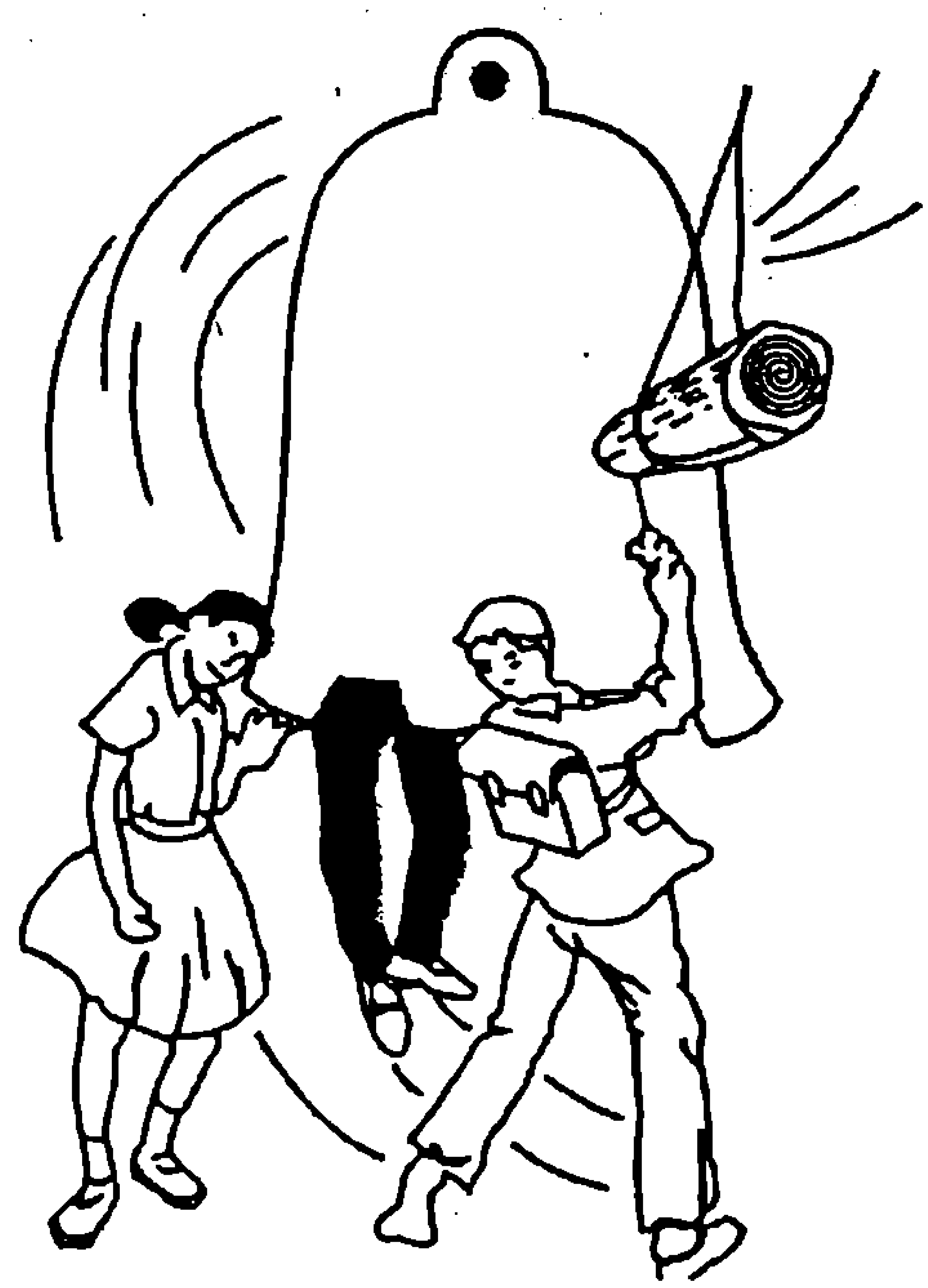
Điều cần lưu ý là, ở Trung Quốc có một trò ảo thuật truyền thống cũng gọi là "Chín vòng liền", đó là đem chín vòng kim loại, dùng kỹ thuật điêu luyện hoặc chia hoặc ghép, thậm chí có thể nối ghép thành các hình như giỏ hoa, quả còn, đèn lồng, ... Trò ảo thuật này khác về bản chất với trò chơi khoa học ở trên. Trò ảo thuật là ảo thuật đơn thuần, còn trò chơi là khoa học nghiêm túc.

14. HÌNH TƯỢNG TRONG TRỪU TƯỢNG

Năm 1912, nhà toán học Luitzen Egbertus Jan Brouwer (27/2/1881 - 2/12/1966) người Hà Lan đã chứng minh một định lý quan trọng: Mọi ánh xạ liên tục từ một hình tròn (hoặc hình cầu) vào chính nó có điểm bất động.

L. E. J.Brouwer

Nguyên lý điểm bất động của L.E.J.Brouwer tuy rất trừu tượng, nhưng trên thực tế lại không thiếu người ví dụ về điểm bất động. Mục 19 của cuốn "Những câu chuyện lý thú về phương trình" đã giới thiệu những ví dụ tuyệt diệu của điểm bất động thần kỳ.



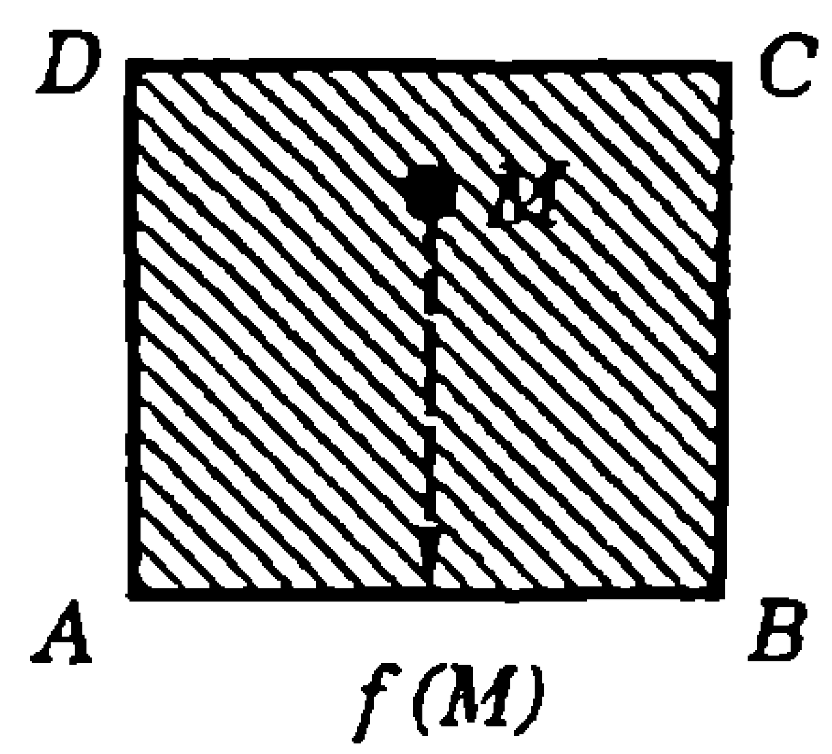
Chắc rằng bạn đọc còn nhớ một câu chuyện ở đó: "Thầy giáo dẫn một đoàn học sinh đi tham quan một ngôi chùa. Thầy giáo nhìn vào trong cái chuông xem cấu tạo thế nào. Một học sinh tinh nghịch muốn hù doạ thầy, liền kéo dùi gõ vào chuông. Chẳng dè, không doạ được thầy và các nữ sinh đứng bên cạnh, ngược lại, cậu bị tiếng chuông kêu to quá, ù cả tai, làm cậu phải ngồi thụp xuống".

Hoá ra, vị trí mà thầy giáo đứng vừa đúng điểm bất động của sóng âm. Hiện tượng này cùng một lý lẽ với việc dùng gậy khuấy nước trong thùng nước. Nước xung quanh quay tròn liên tục, còn nước ở giữa đường thì lại đứng yên!

Cho một hình H trong mặt phẳng hay trong không gian.

K là một hình nằm trong H; biến đổi f của hình H vào hình K mà giữ mọi điểm thuộc K bất động (tức là biến thành chính nó) tạm gọi là một phép co từ H lên K.

Ví dụ 1: **H** là hình vuông ABCD (hình 14-1) thì biến đổi f của **H** biến một điểm M thuộc hình vuông đó thành hình chiếu vuông góc f(M) của M lên cạnh AB, rõ ràng là một phép co từ **H** lên cạnh AB.



Hình 14-1

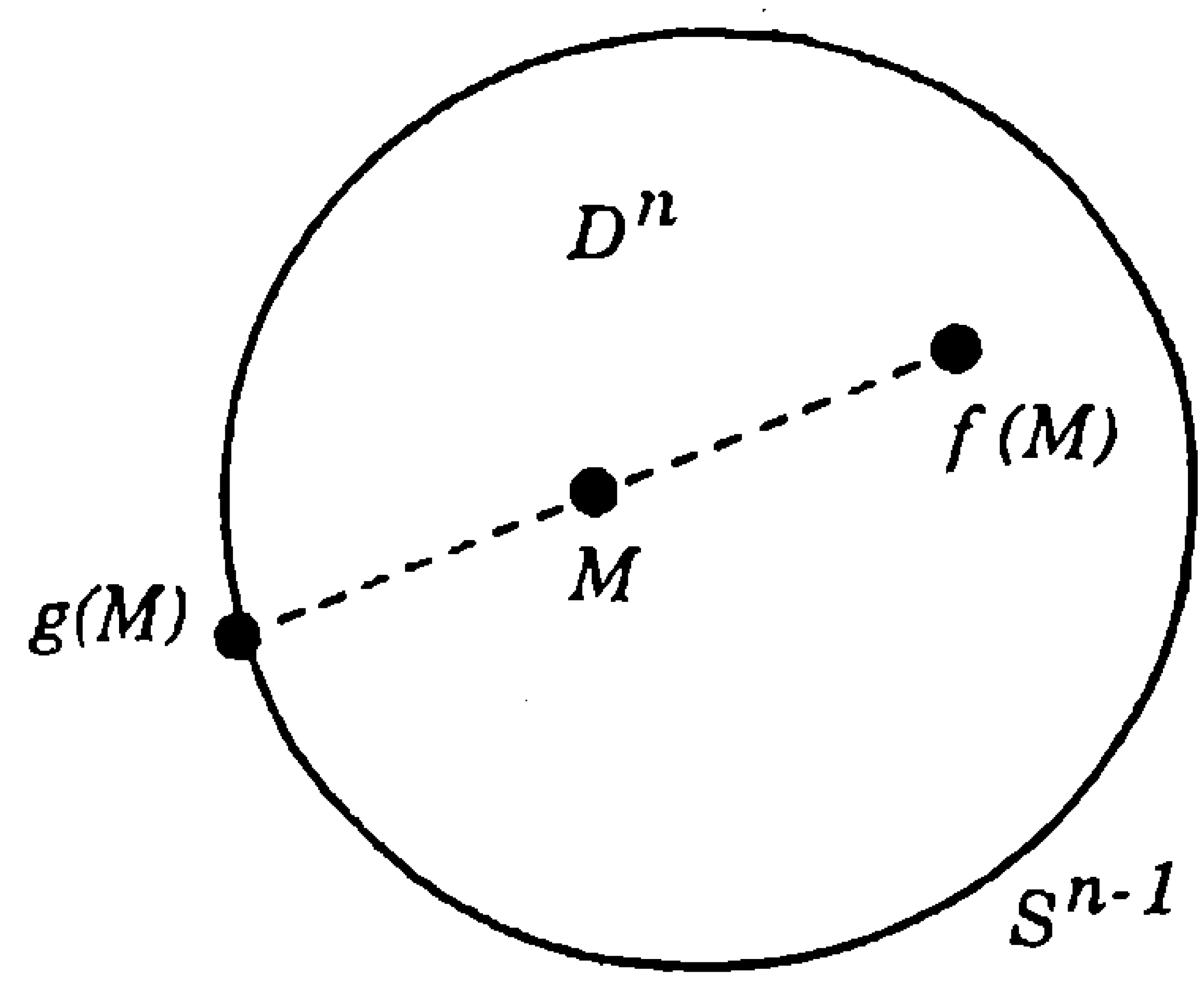
Ví dụ 2: **H** là đoạn thẳng AB ($A \neq B$) và **K** là hai mút A, B của **H** (tức **K** là biên của **H**) thì dễ hình dung rằng, không thể co **H** lên **K** được.

Ví dụ 3: **H** là hình tròn và **K** là đường tròn biên của **H** thì cũng dễ hình dung rằng, không thể co **H** lên **K** được.

Ví dụ 4: **H** là khối cầu trong không gian và **K** là mặt cầu biên của **H** thì cũng dễ hình dung rằng, không thể co **H** lên **K** được.

Ký hiệu $\mathbf{D}^1$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{D}^3$ theo thứ tự là đoạn thẳng, hình tròn, khối cầu. Hãy chứng minh rằng, mọi biến đổi f từ $\mathbf{D}^n$ vào $\mathbf{D}^n$ ($n = 1, 2, 3$) đều giữ ít nhất một điểm bất động, tức là có ít nhất một điểm $A \in \mathbf{D}^n$ sao cho $f(A) = A$. (Đó là nội dung Định lý Brouwer).

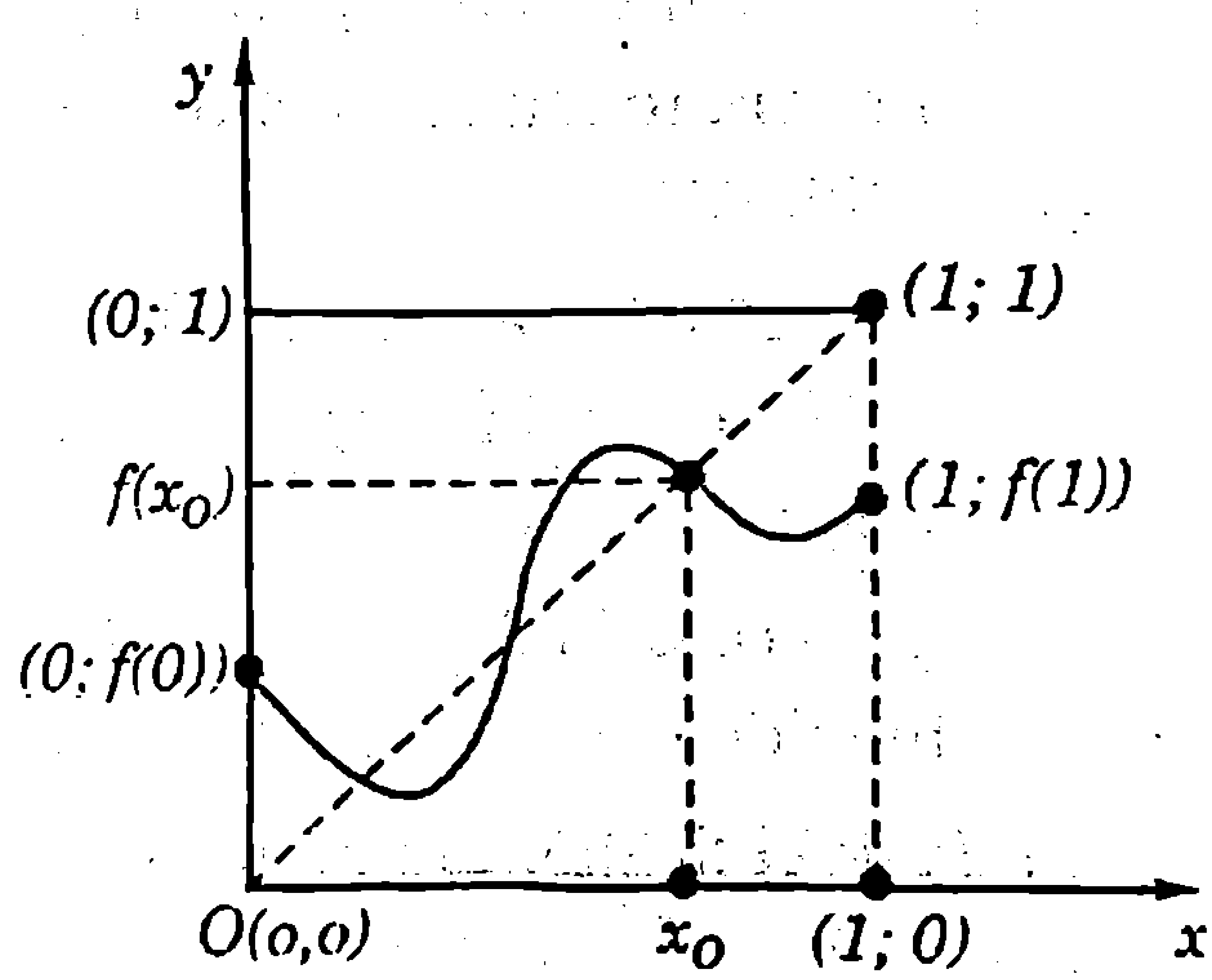
Thật vậy, giả sử có biến đổi f biến $\mathbf{D}^n$ vào $\mathbf{D}^n$ mà với mọi điểm $M \in \mathbf{D}^n$, $f(M)$ khác M; khi đó xét được tia gốc f(M) đi qua M. Tia này cắt biên S^{n-1} của D^n tại điểm g(M) (hình 14-2). Rõ ràng biến đổi M thành g(M) là một phép co từ $\mathbf{D}^n$ lên S^{n-1}, mà các ví dụ 2, 3 và 4 nói trên chứng tỏ không thể có phép co như thế. Vậy không thể có biến đổi $\mathbf{D}^n$ vào $\mathbf{D}^n$ mà mọi điểm đều không bất động.



Hình 14-2

Ví dụ 5: Cắt một hình tròn bằng giấy, in nó xuống mặt bàn. Mỗi điểm của hình tròn đó được in xuống một điểm của mặt bàn.

Lấy hình tròn bằng giấy đó lên, vo viên lại, ném nó vào bên trong hình in xuống mặt bàn và ép viên giấy đó xuống mặt bàn. Khi đó, có ít nhất một điểm của hình tròn bằng giấy được ép xuống vị trí in ban đầu.



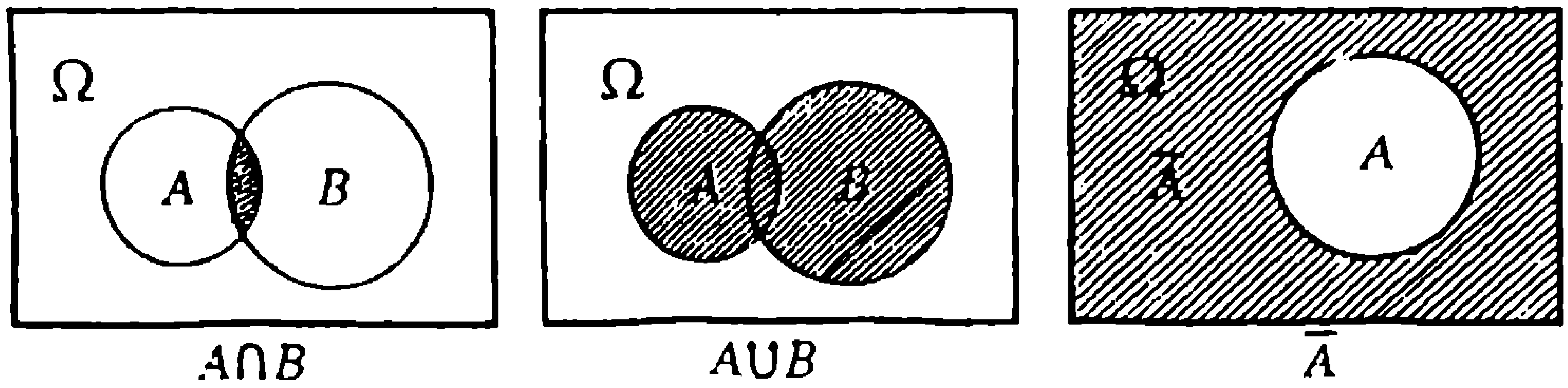
Hình 14-3

Chú ý: Trong trường hợp n = 1 còn có thể chứng minh như sau: Xét biến đổi f từ đoạn thẳng [0; 1] vào chính nó, coi f là hàm số biến $x \in [0; 1]$ thành $f(x) \in [0; 1]$, và vẽ đồ thị của f, tức là xét tập hợp các điểm trong mặt phẳng toạ độ xOy có toạ độ $(x; y = f(x))$ (hình 14-3). Nếu $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 1$ thì đồ thị đó là một đường cong nối hai điểm $(0; f(0))$ và $(1; f(1))$ nằm về hai phía của đường chéo y = x nên phải cắt đường chéo đó tại ít nhất một điểm $(x_o; f(x_0))$.

Biểu đạt của lý thuyết toán học thường rất trừu tượng nhưng có những thể hiện lại rõ ràng. Năm 1874, khi nhà toán học nổi tiếng Georeges Cantor (3/3/1845 - 6/1/1918) người Đức nhưng sinh ở Nga, lần đầu tiên nêu ra lý thuyết tập hợp, rất nhiều người cảm thấy khó hiểu, thậm chí còn hình dung lý thuyết này thành "sương mù trong sương mù". Song nhà logic học John Venn (1834 - 1923) người Anh lại đề nghị dùng hình đơn giản biểu thị tập hợp. Ông còn dùng hình vẽ để biểu đạt nhiều loại quan hệ giữa hai tập hợp hoặc ba tập hợp. Cái hình tượng trong trừu tượng này làm cho lý thuyết tập hợp trở thành gần gũi với mọi người.

G. Cantor

Hình 14–4 là sơ đồ mà J.Venn dùng để biểu thị quan hệ giữa tập hợp A và B. Những hình vẽ của hình tượng này, ngay cả các học sinh nhỏ cũng nắm vững không khó. Nội dung này đã được đề cập đến ở mục 4 của tập ba "Khẳng định trong phủ định" của bộ sách này.



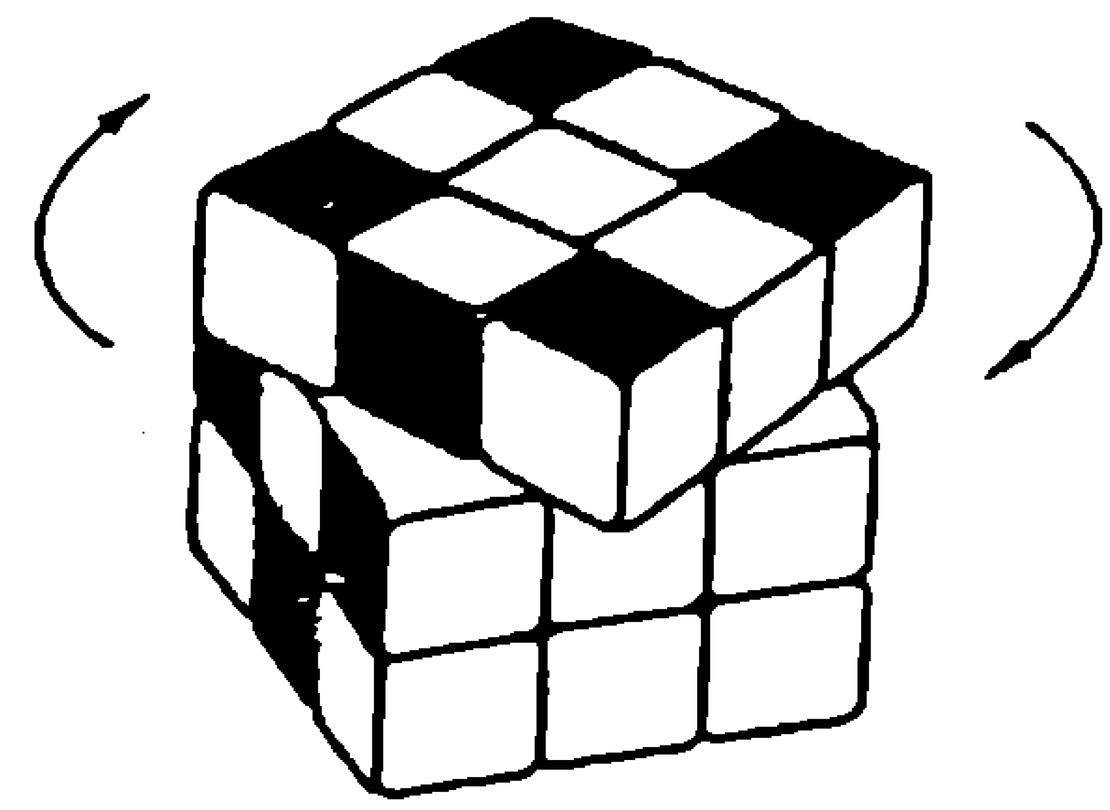
Hình 14-4

"Mặt một phía" ở mục 8: "Dải Möbius kỳ lạ" chắc chắn là rất trừu tượng. Năm 1858, A.F.Möbius đã dùng một băng giấy dán lại sau khi đã xoay, làm cho người ta nhìn thấy một cách trực quan hình tượng mặt cong kỳ lạ này. Năm 1882, Ch.F.Klein đã dán hai vòng Möbius lại thành một cái bình kỳ lạ mà nhờ nó chúng ta đã phát hiện được rất nhiều đặc tính kỳ diệu của "Mặt cong một phía trong không gian".

Hình tượng hoá những thứ trừu tượng lại thông qua hình tượng trực quan để làm cho sâu sắc nội dung của trừu tượng. Điều này có lẽ là chân lý của việc dạy toán. Bởi vì, đó là mưu cầu của trừu tượng trong hình tượng, hay là mưu cầu của hình tượng trong trừu tượng. Đây chính là ranh giới của nghiên cứu toán học với việc dạy toán.

15. MA PHƯƠNG KHỐI

Năm 1974, giáo sư kiến trúc Ireno Rubik của Budapest (Hunggari), do nhu cầu dạy học, đã thiết kế một kết cấu công trình. Kết cấu này vô cùng đặc biệt: 26 khối lập phương có cạnh là 1,9cm, có thể xoay tự do quanh một khối giữa có cùng độ lớn như vậy. Các khối bên và khối góc trong đó có thể lần lượt xoay đến bất kỳ vị trí khối bên và khối góc nào khác (hình 15-1). Để phân biệt các khối lập phương nhỏ này, giáo sư I.Rubik đã dán các miếng nhựa màu khác nhau lên bề mặt các khối vuông đó, để có thể nhìn rõ sự chuyển dịch vị trí của các khối vuông này. Đây chính là ma phương khối.



Hình 15-1

Yêu cầu cơ bản của ma phương khối là: sau khi đảo lộn màu sắc trên mặt các khối vuông đó, gắng dùng ít động tác nhất, làm cho nó khôi phục lại vị trí ban đầu.

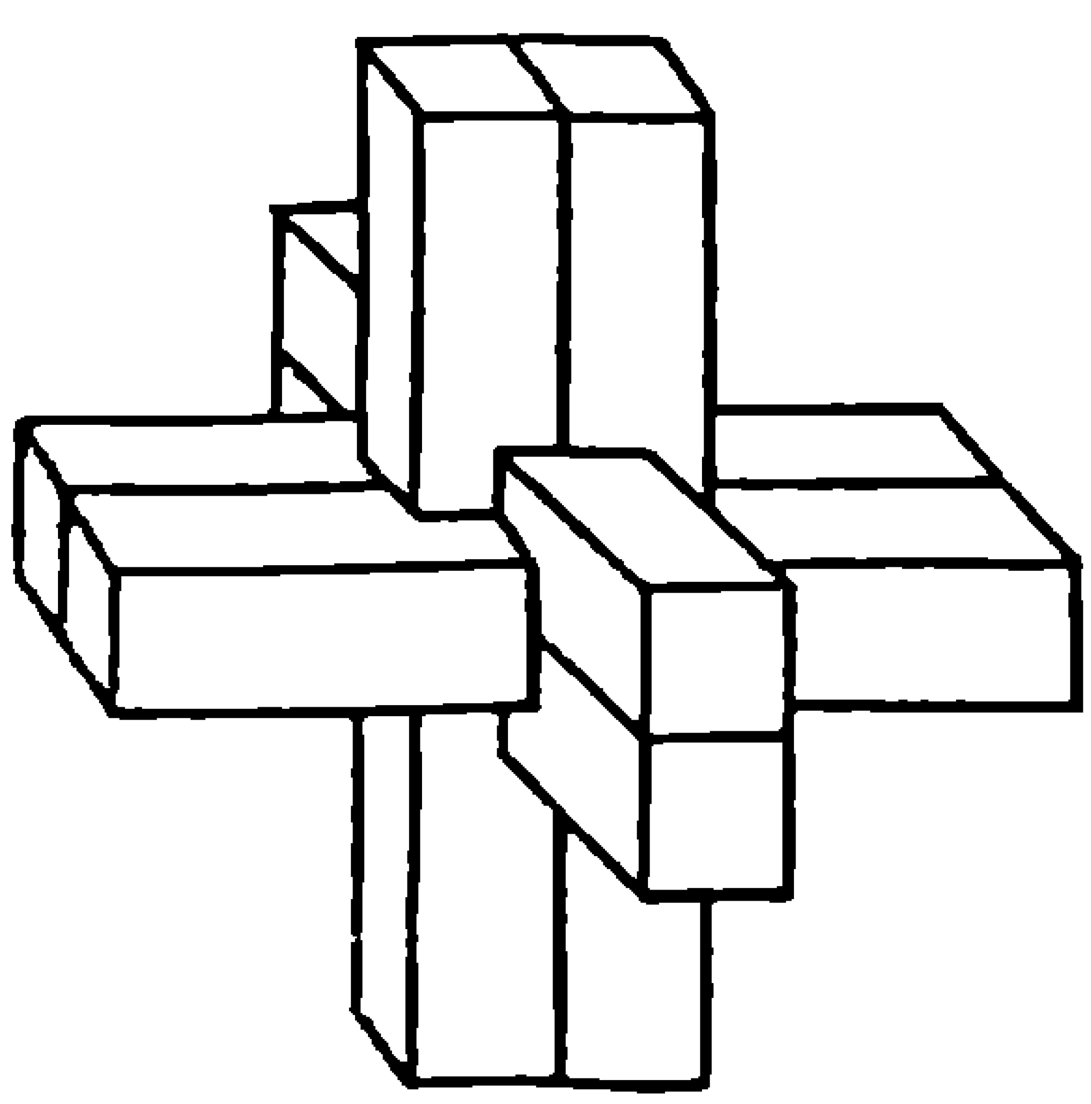
Năm 1977, đồ chơi ma phương khối (còn gọi là "khối lập phương quý") bắt đầu xuất hiện trên thị trường với tên gọi thông thường là "khối Rubik". Từ đó đồ chơi này nhanh chóng được bán khắp nơi.

Chỉ chưa đầy một thập niên mà gần như nó có mặt khắp nơi trên thế giới, làm cho nhiều người say mê. Một trăm triệu chiếc đã được bán hết và I.Rubik đã trở thành tỷ phú. Trong những năm 1980, họ hàng nhà ma phương khối, như gậy ma, ma viên (đường tròn ma), ma tinh, ma bàn... sinh ra và phát triển liên tục.

Tại sao các loại ma phương này lại có sức sống to lớn như vậy? Nguyên nhân là ở chỗ nó có khoảng 43×10^{18} lần biến hoá, làm cho người ta chơi mãi không chán.

Bạn đọc có thể bị bất ngờ, bởi vì cách đây hơn hai nghìn năm trăm năm, người Trung Hoa cổ đại đã sáng tạo ra loại đồ chơi khoa học tương tự như ma phương khối nhưng có thể còn hay hơn.

Người ta đồn rằng ở nước Lỗ thời Xuân Thu (770 - 476 trước Công nguyên) có người thợ tài giỏi tên là Lỗ Ban (722 - 681 trước Công nguyên) muốn thử con trai có thông minh hay không, đã suy nghĩ và chế tạo ra một loại đồ chơi khoa học gọi là "lục thông". Đó là một kết cấu gỗ gọn, chắc chắn (hình 15-2) do sáu thanh gỗ hình lăng trụ vuông, kích thước như nhau nhưng đoạn giữa có đục các mộng khác nhau (hình 15-3) để lắp ráp thành.



Hình 15-2

Lỗ Ban

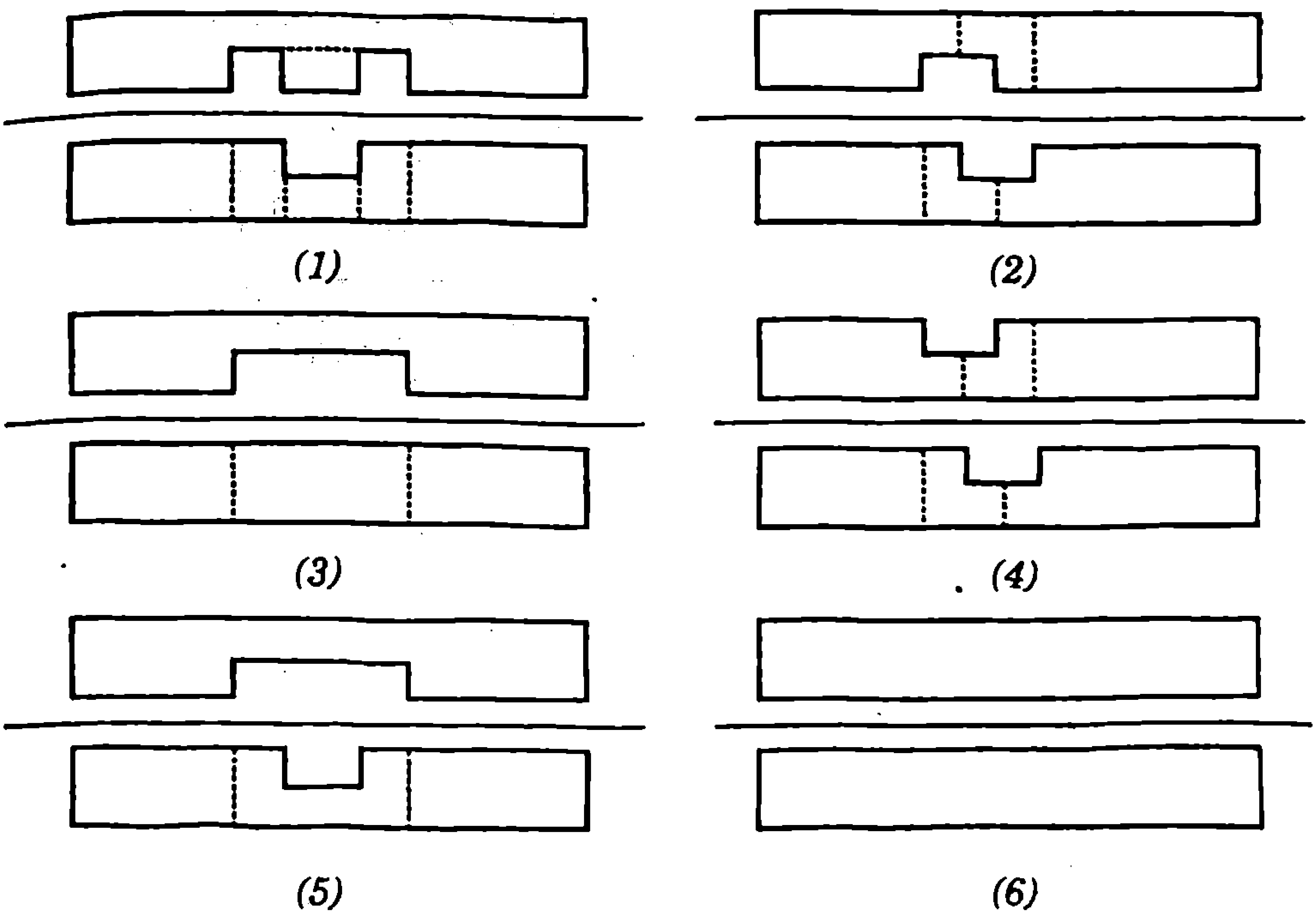
Một hôm, khi trời gần tối, Lỗ Ban gọi con lại rồi ông tháo "lục thông" rời ra trước mặt để con nhìn thấy và yêu cầu con lắp lại xong trước sáng hôm sau.

Con trai Lỗ Ban vô cùng thông minh nhưng vẫn phải bận rộn suốt cả đêm đó mới lắp lại được "lục thông".

"Lục thông" có kết cấu chặt chẽ, giàu tính khoa học và có nhiều cảm giác khối hơn so với ma phương khối của I.Rubik. Nó có khoảng ba triệu khả năng tổ hợp khác nhau, trong đó chỉ có một khả năng đạt được thành công.

Vậy kết cấu thần kỳ của "lục thông" như thế nào?

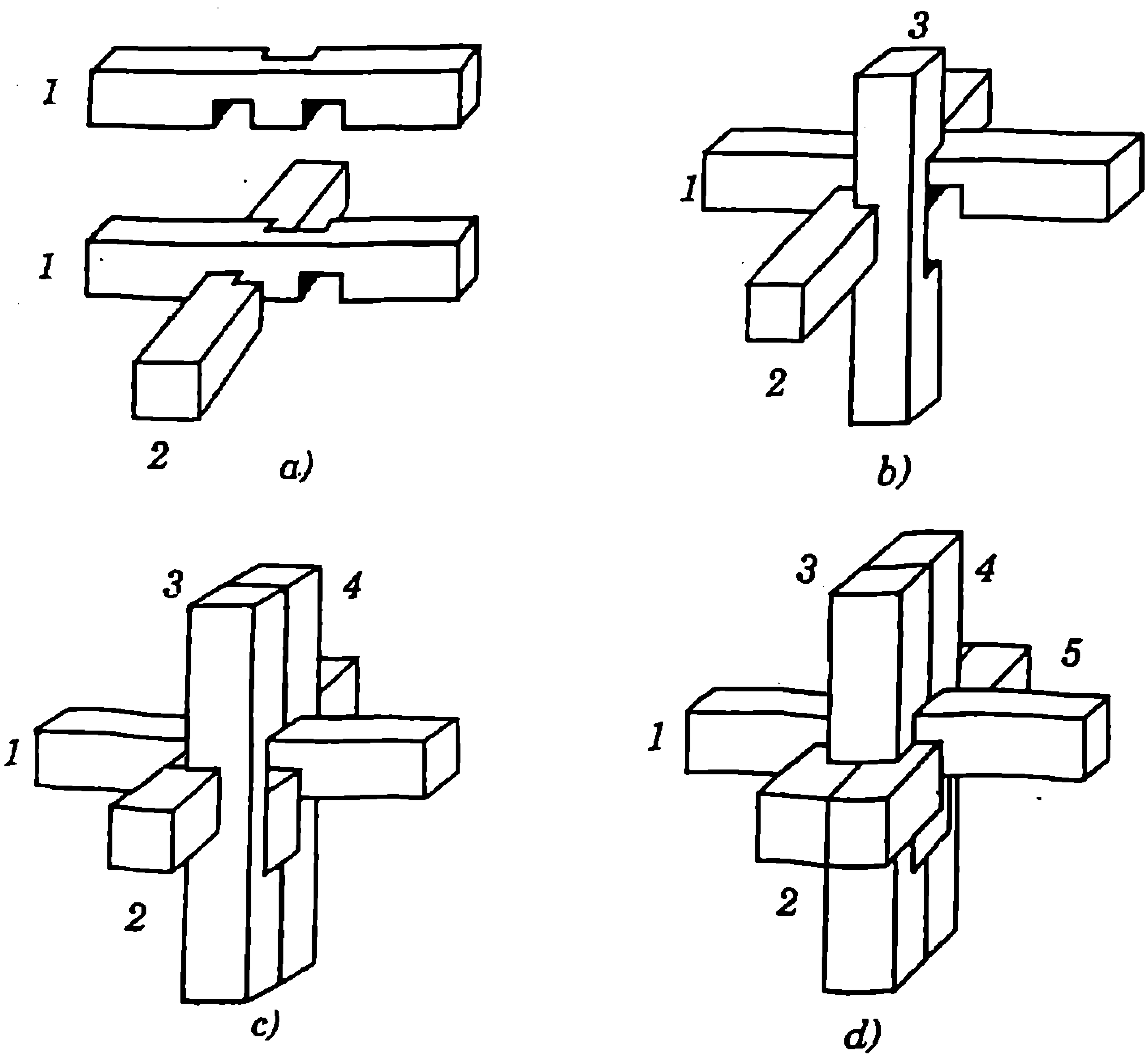
Trước tiên, bạn hãy làm một bộ sáu thanh như hình 15-3.



Hình 15-3

Nếu bạn lần đầu tiên tiếp xúc với "lục thông" mà trong ba giờ có thể lắp xong thì thật đáng khen ngợi. Nếu chỉ trong một giờ đã lắp xong thì trí tuệ hơn người. Bởi vì giỏi như con trai của Lỗ Ban mà cũng phải thực hiện gần cả một đêm (khoảng 7-8 giờ).

Tuy vậy, nếu bạn thực hiện trong thời gian quá lâu nhưng vẫn chưa thành công thì cũng đừng nản lòng. Bởi vì, điều đó không nói lên trí tuệ và năng lực của bạn không đủ, mà chỉ là có một số sai lệch nào đó trong phương pháp tìm tòi. Trong trường hợp đó, bạn không nên bỏ phí quá nhiều thời gian quý báu của mình, hãy xem sơ đồ trực quan sau đây, nó sẽ làm cho bạn hiểu được con đường suy nghĩ chính xác về lắp "lục thông". Số bên cạnh các thanh gỗ trong hình 15-4 ứng với các thanh gỗ có ở hình chiếu ở hình 15-3.



Hình 15-4

Sau khi bạn lắp xong năm thanh gỗ lần lượt theo sơ đồ ở hình 15-4, bạn sẽ kinh ngạc khi thấy lỗ rỗng có dạng hình vuông vừa đúng để lắp khít thanh gỗ thứ sáu. Lấy dùi gỗ thanh (6) bằng với thanh (1), ta được một "lục thông" hoàn chỉnh.

Bây giờ nói thêm về Lỗ Ban. Ông là nhà công nghiệp kiệt xuất, là ông tổ của nhiều ngành nghề: xây dựng, mộc, đá, gốm,... Ngành xây dựng Trung Quốc, Singapo,... lấy ngày 17 tháng 10 âm lịch để kỷ niệm, hồi tưởng và tỏ lòng tôn kính Lỗ Ban. Trong xây dựng có loại thước nổi tiếng gọi là thước Lỗ Ban. Tại núi Thiên Phật (núi Lịch) ở Trung Quốc và trên sân thượng của trụ sở Hội Xây dựng Singapo có miếu thờ Lỗ Ban.

Lỗ Ban đã chỉ huy xây dựng nhiều công trình nổi tiếng của Trung Quốc: chùa Huyền Không (chùa Treo) ở núi Ngũ Đài, cầu Bắc Hải Kiều ở Thiệu Hưng, cầu Hoa ở Quế Lâm, điện Thiên Đàn ở Bắc Kinh,...

Truyền thuyết kể rằng: người em gái của Lỗ Ban thách ông trong một đêm xây dựng xong ba chiếc cầu. Ông đã chỉ huy xây dựng cầu Triệu Châu, Lư Câu xong, đang xây dựng cầu Thạch trong một đêm cho hoàn thành. Nhưng vì cô em sợ anh quá sức nên giả làm tiếng gà gáy sắp sáng, làm chiếc cầu Thạch xây còn dở dang.

16. HUYỀN BÍ CỦA "CỜ MƯỜI LĂM QUÂN"

Có một loại trò chơi có quan hệ mật thiết với ma phương, gọi là "Cờ mười lăm quân": Trong một cái hộp có 4 × 4 ô vuông chứa 15 miếng vuông nhỏ có đánh số từ 1 đến 15, gọi là quân cờ và một ô trống. Khi chơi loại cờ này, các quân cờ được đặt theo thứ tự tuỳ ý vào các ô trong hộp, chẳng hạn đặt như hình 16-1. Yêu cầu của trò chơi là: sử dụng một cách hiệu quả ô trống, di chuyển các quân cờ sao cho các số xếp theo thứ tự tăng dần liên tục như ở hình 16-2.

2	13	7	14
11		1	4
6	12	10	5
15	9	3	8

Hình 16-1

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

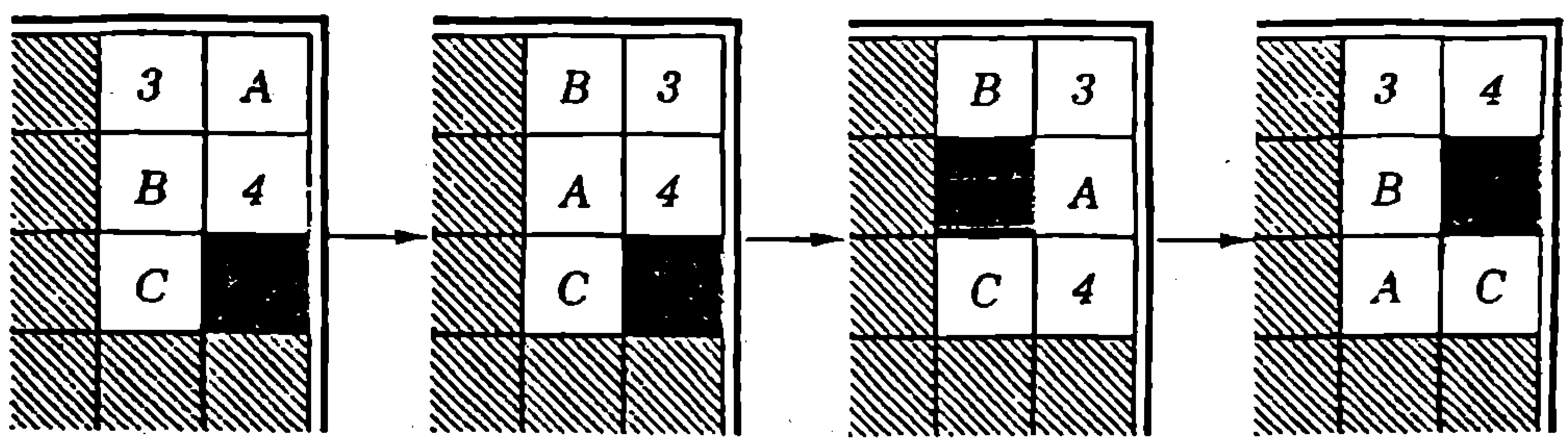
Hình 16-2

Vấn đề đầu tiên là: liệu có thực hiện được yêu cầu như vậy không?

Đây là trò chơi khá đơn giản, hầu như bạn đọc xem là hiểu ngay. Tuy vậy, có lúc chúng ta dễ dàng thực hiện thành công, nhưng có lúc dù chúng ta cố gắng thế nào đi nữa, cũng không thể thành công được. Vậy thì điều huyền bí ở đâu?

Bây giờ ta hãy xét xem dạng đặt ban đầu như thế nào thì mới sắp xếp thành công được?

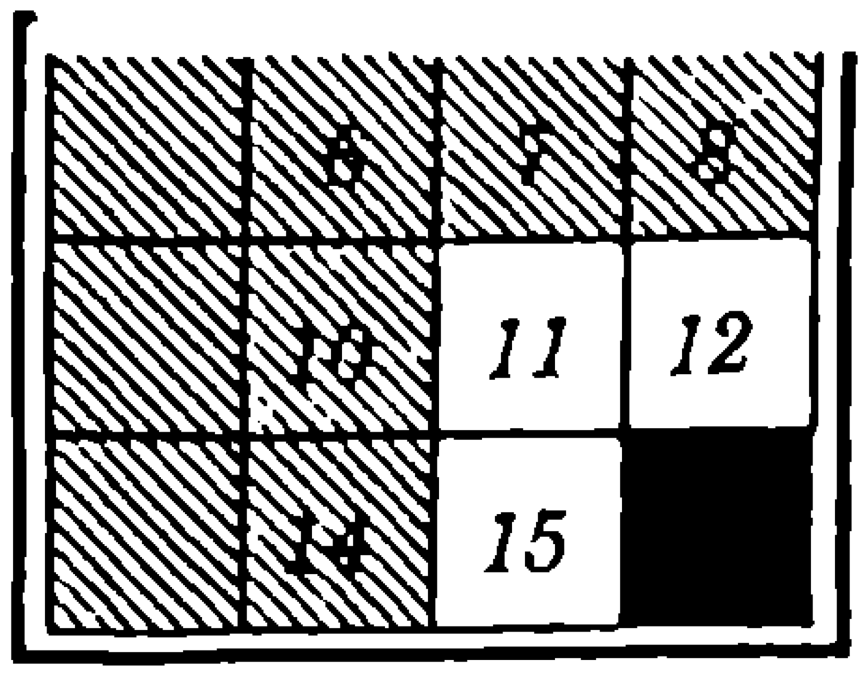
Chúng ta thấy rằng: đối với ô trống thì có thể di chuyển đến bất kỳ ô nào của hộp. Chúng ta cũng rất dễ dàng sử dụng ô trống để di chuyển các quân cờ $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ và $\boxed{3}$ lần lượt đến ba vị trí theo yêu cầu. Có điều là, sau khi ba quân cờ đầu sắp xếp ở vị trí đúng rồi, muốn không di chuyển quân cờ $\boxed{3}$ mà có được quân cờ $\boxed{4}$ ở vị trí theo thứ tự lại là việc làm rất khó. Tuy vậy, nếu dùng các bước tuần tự như hình 16-3 thì chúng ta có thể thực hiện được yêu cầu. Ở đây cần một vùng có 2 × 3 ô vuông là chắc chắn thực hiện được.

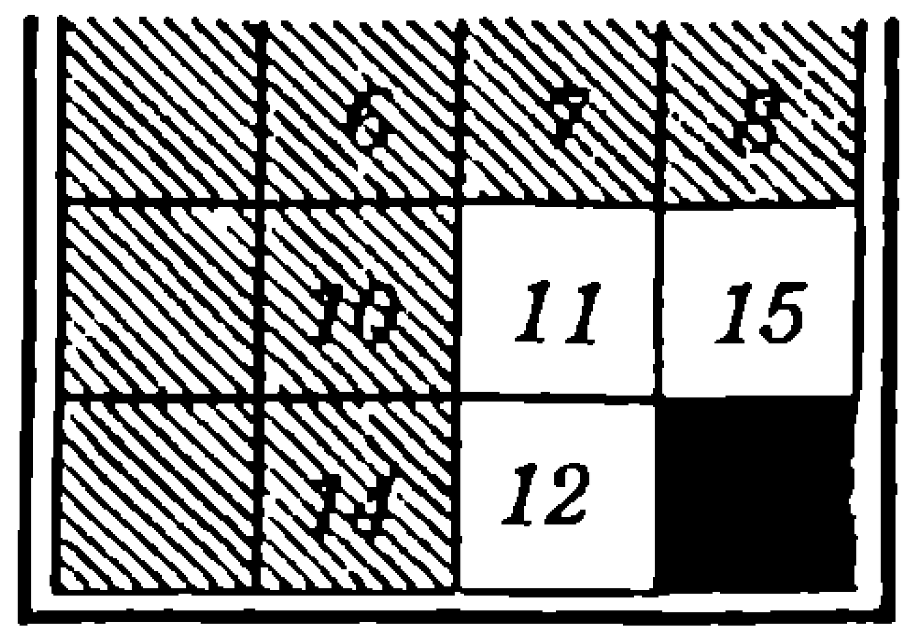


Hình 16-3

Như vậy ta đã có bốn quân cờ ở hàng trên cùng sắp xếp đúng vị trí yêu cầu. Tiếp đến bốn quân cờ $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, và $\boxed{8}$ ở hàng thứ hai cũng có thể di chuyển đến đúng vị trí yêu cầu. Tiếp tục chúng ta còn có thể di chuyển hai quân cờ còn lại $\boxed{9}$ và $\boxed{13}$ đúng vị trí yêu cầu. Đến đây chúng ta vẫn còn lại một vùng 2 × 3 ô vuông, đúng như đã nói ở trên, nên vẫn có thể sắp xếp được thoả đáng hai quân cờ $\boxed{10}$ và $\boxed{14}$ của cột thứ hai vào đúng vị trí yêu cầu.

Như vậy là chúng ta đã sắp xếp được $\boxed{12}$ quân cờ ổn thoả, theo đúng vị trí yêu cầu. Chỉ còn ba quân cờ $\boxed{11}$, $\boxed{12}$, $\boxed{15}$ và một ô trống. Lúc này chúng ta vẫn có thể di chuyển để quân cờ $\boxed{11}$ đến đúng vị trí yêu cầu. Đến đây, việc làm sao để ô trống nằm ở ô vuông góc phải phía dưới sẽ xảy ra hai trường hợp:





Hình 16-4

Trường hợp như hình 16-4a, tức là đã thành công.

Trường hợp như hình 16-4b thì phải di chuyển hai quân cờ cuối cùng $\boxed{11}$ và $\boxed{15}$ nằm ở vị trí như hình 16-4a.

Câu trả lời là: không được! Tại sao vậy!

Trên thực tế chúng ta có thể coi tất cả các quân cờ trong hộp là một dãy các số (lấy ô trống làm ô số 16). Như vậy dãy các số ở hình 16-4a là:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16; (16-1)

và ở hình 16-4b là:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 13, 14, 12, 16. (16-2)

Từ (16-1) và (16-2) ta thấy (16-1) xếp theo thứ tự đúng như yêu cầu: tăng dần liên tục, còn (16-2) thì một số vị trí bị đảo lộn (không đúng theo yêu cầu). Hiện tượng này gọi là "nghịch thế" (nghịch thứ tự). Trong (16-2) có các "nghịch thế" như sau:

15 trước 13, 14 và 12: ba "nghịch thế"

13 trước 12: một "nghịch thế"

14 trước 12: một "nghịch thế"

Tổng cộng (16-2) có năm "nghịch thế".

Người ta đã chứng minh được rằng: mọi dãy có số lượng "nghịch thế" chẵn hoặc bằng không thì xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp được (thành công), ngược lại số lượng "nghịch thế" lẻ thì không xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp được (không thành công).

Như vậy, đầu tiên chúng ta phải xét xem dãy các số đặt theo thứ tự tuỳ ý vào hộp có số lượng "nghịch thế" chẵn hay lẻ. Nếu là chẵn và bằng không thì mới thực hiện được yêu cầu, ngược lại, nếu là lẻ thì không thể thực hiện được theo yêu cầu nêu trên.

Chẳng hạn, dãy số ở hình 16-5 thấy ngay là số "nghịch thế" bằng không (không có số nào đứng trước lớn hơn số đứng sau), do vậy nhất định di chuyển được theo yêu cầu.

Bây giờ ta xét hình 16-1. Ta thấy:

2 trước 1: một "nghịch thế"

13 trước 7, 11, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 9, 3, 8: mười một "nghịch thế"

7 trước 1, 4, 6, 5, 3: năm "nghịch thế"

14 trước 11, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 9, 3, 8: mười "nghịch thế"

	1	*2*	*3*
4	*5*	*6*	*7*
8	*9*	*10*	*11*
12	*13*	*14*	*15*

Hình 16-5

11 trước 1, 4, 6, 10, 5, 9, 3, 8: tám "nghịch thế"

4 trước 3: một "nghịch thế"

6 trước 5, 3: hai "nghịch thế"

12 trước 10, 5, 9, 3, 8: năm "nghịch thế"

10 trước 5, 9, 3, 8: bốn "nghịch thế"

5 trước 3: một "nghịch thế"

15 trước 9, 3, 8: ba "nghịch thế"

9 trước 3, 8: hai "nghịch thế"

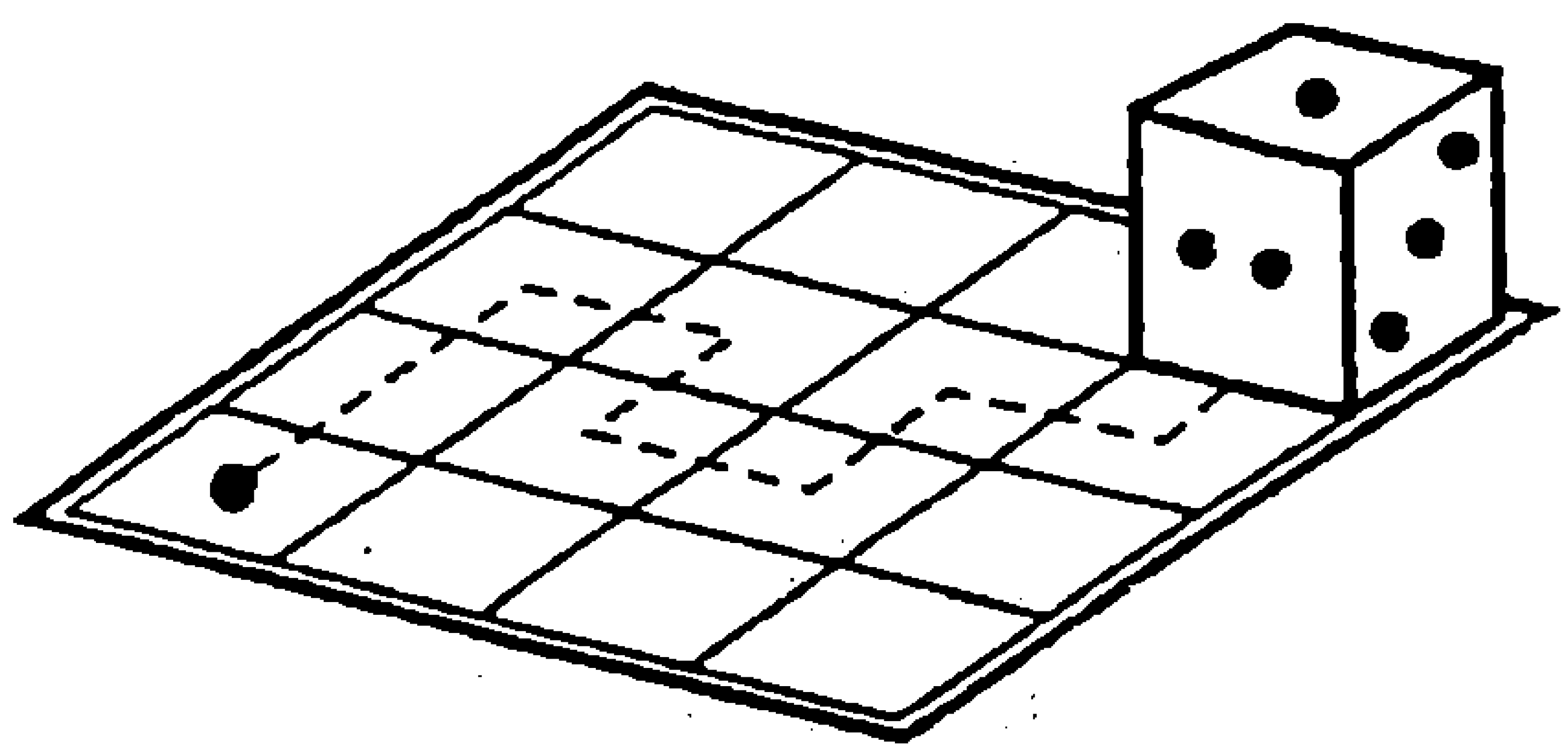
Như vậy ở hình 16-1 có số "nghịch thế" là:

1 + 11 + 5 + 10 + 8 + 1 + 2 + 5 + 4 + 1 + 3 + 2 = 53.

Bởi vì 53 là số lẻ nên hình 16-1 không thể di chuyển được theo yêu cầu là các số sắp xếp theo thứ tự tăng dần liên tiếp được.

Một trò chơi sở dĩ khiến người ta cảm thấy hứng thú là ở chỗ sau khi trải qua một cuộc phấn đấu mới thành công được. Nếu một trò chơi mà mới bắt đầu đã biết kết quả thì tự nhiên mất đi điều thú vị. Đây có lẽ vừa là khuyết điểm vừa là cái vĩ đại của toán học.

Hình 16-6 là một trò chơi bàn cờ 4 × 4 ô vuông, giống như "cờ mười lăm quân". Một con xúc xắc mỗi mặt đều to bằng ô vuông; đặt ở góc trên bên phải, điểm số $\boxed{\bullet}$ ngửa lên. Bây giờ lật chuyển con xúc xắc từng ô một không được trượt, cũng không được nhấc lên. Yêu cầu là cuối cùng lật chuyển con xúc xắc đó đến ô góc dưới bên trái và điểm số $\boxed{\bullet}$ úp xuống dưới.



Hình 16-6

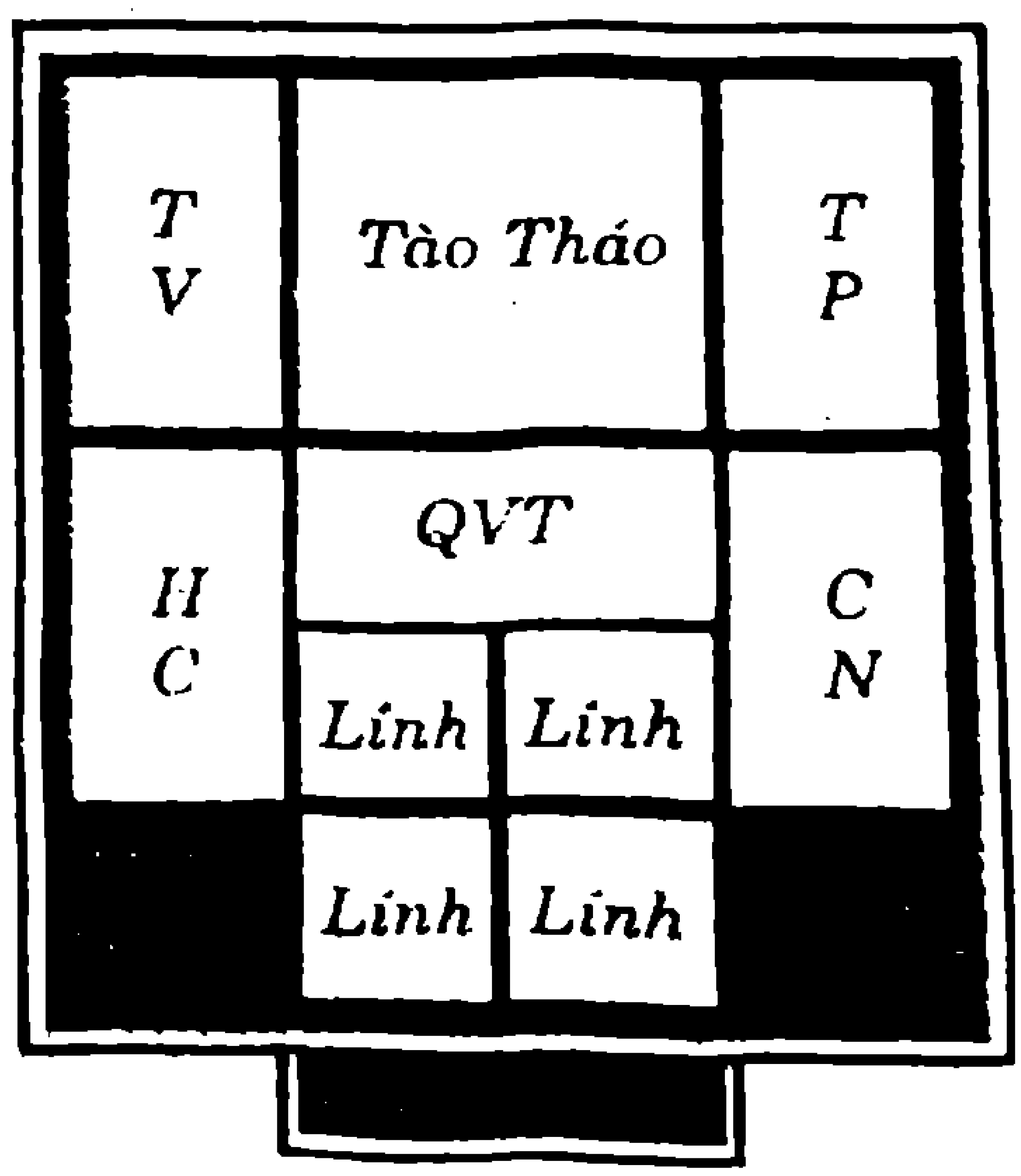
Nét đứt trong hình 16-6 là đường lật chuyển con xúc xắc. Chỉ cần 8 lần lật chuyển là có thể đạt được yêu cầu. Đây có lẽ là số lần ít nhất cần thiết. Liệu bạn có thể phân tích bằng toán học đối với trò chơi gần như vô vị này không?

Trong dân gian Trung Quốc lưu truyền một trò chơi vô cùng đặc sắc, gọi là "cờ Tam Quốc". Nó cũng là một loại trò chơi di chuyển trên bàn cờ hình vuông. Trò chơi này gắn với một câu chuyện trong tiểu thuyết "Tam quốc diễn nghĩa" ở đoạn "mưu trí chiếm Hoa Dung":

Gia Cát Lượng dựng đàn Thất tinh tế Trời, Chu Du phóng lửa đốt, lửa thiên trại liên hoàn, mấy chục vạn người ngựa của Tào Tháo bị diệt trong một ngày, chỉ sót lại Tào Tháo và mấy kị sĩ hộ vệ hoảng hốt chạy tháo thân. Đồn rằng, Gia Cát Lượng đã tính sẵn: Tào Tháo nhất định tháo chạy theo hướng Hoa Dung, liền cử Triệu Vân (Triệu Tử Long), Trương Phi phối hợp cùng các đại tướng Đông Ngô Hoàng Cái, Cam Ninh chặn đường tháo chạy của Tào Tháo. Lại lập bản quân lệnh, lệnh cho Quan Vân Trường chặn giữ đường Hoa Dung phải bắt sống được Tào Tháo. Tất cả đều diễn ra một cách chuẩn xác theo sự trù liệu của Gia Cát Lượng. Cuối cùng, khi Tào Tháo chạy đến Hoa Dung, vì Quan Vân Trường còn "nghĩa nặng như núi" đối với Tào Tháo nên đã để Tào Tháo chạy thoát.

Đặc sắc của "cờ Tam Quốc" là đã thiết kế theo đoạn lịch sử này.

Cấu tạo của nó như hình 16-7: Trong hộp vuông 4 × 5 ô vuông, đặt 10 miếng gỗ hình vuông và hình chữ nhật có độ lớn không bằng nhau. Trên các miếng gỗ đó viết tên các quân tướng: miếng vuông lớn nhất đại diện Tào Tháo, bằng 2 × 2 ô vuông, bốn miếng

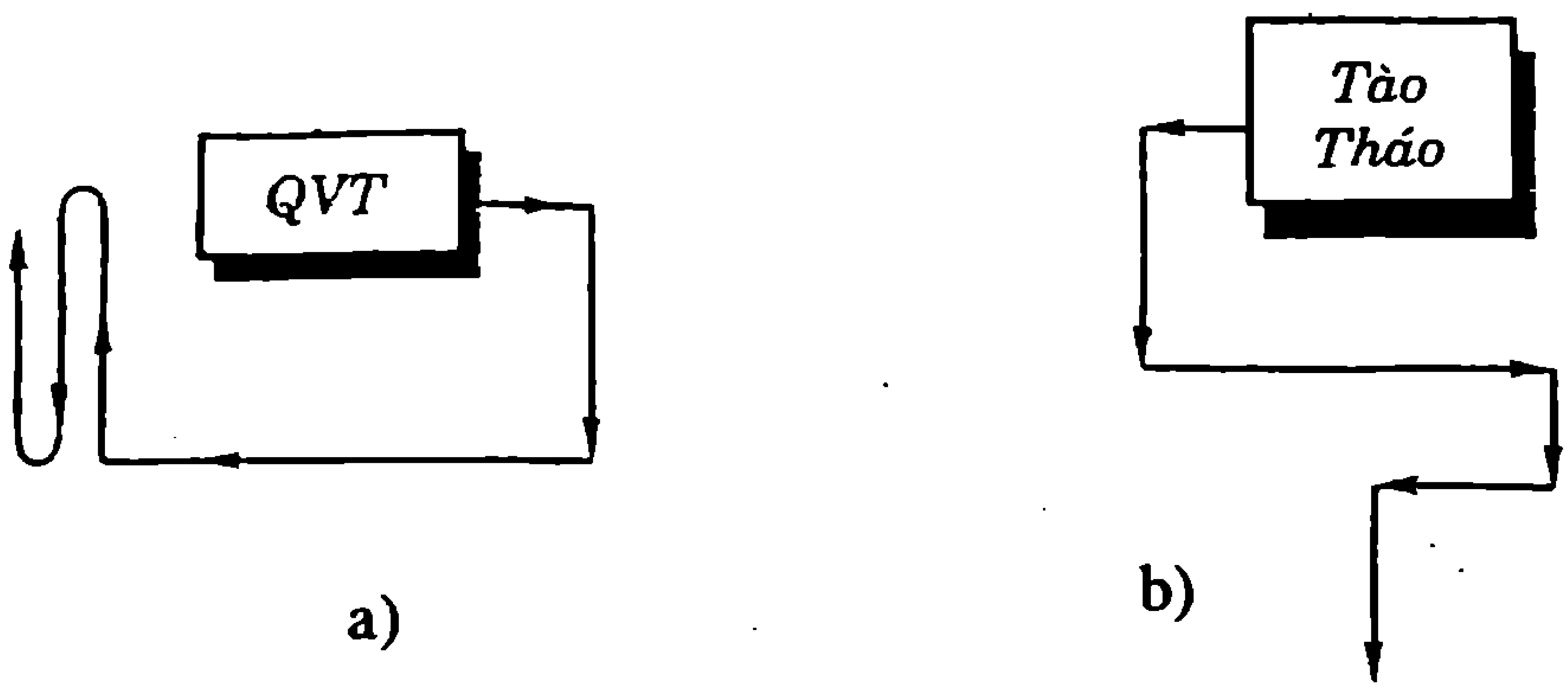


Hình 16-7

chữ nhật 1 × 2 ô vuông đặt đứng hai bên đại diện bốn tướng (TV - Triệu Vân, HC - Hoàng Cái, TP - Trương Phi và CN - Cam Ninh) vây đuổi ngăn chặn, miếng chữ nhật 2 × 1 ô vuông nằm ngang ở giữa đại diện Quan Vân Trường (QVT), phía dưới Quan Vân Trường là bốn lính, mỗi lính 1 × 1 ô vuông. Phía dưới lính là cửa mở. Có hai ô trống ở hai góc dưới. Yêu cầu của trò chơi là di chuyển các miếng nhưng không rời khỏi hộp, cuối cùng làm cho Tào Tháo "thoát thân" chỗ cửa mở (tức là di chuyển ra).

Trò chơi này thú vị nhưng rất khó, ít nhất cần 114 bước mới có thể làm cho Tào Tháo "chạy thoát" được. Về nguyên lý toán học trong đó thì vẫn như "cờ mười lăm quân".

Hình 16-8 là gợi ý giải đáp trò chơi này:



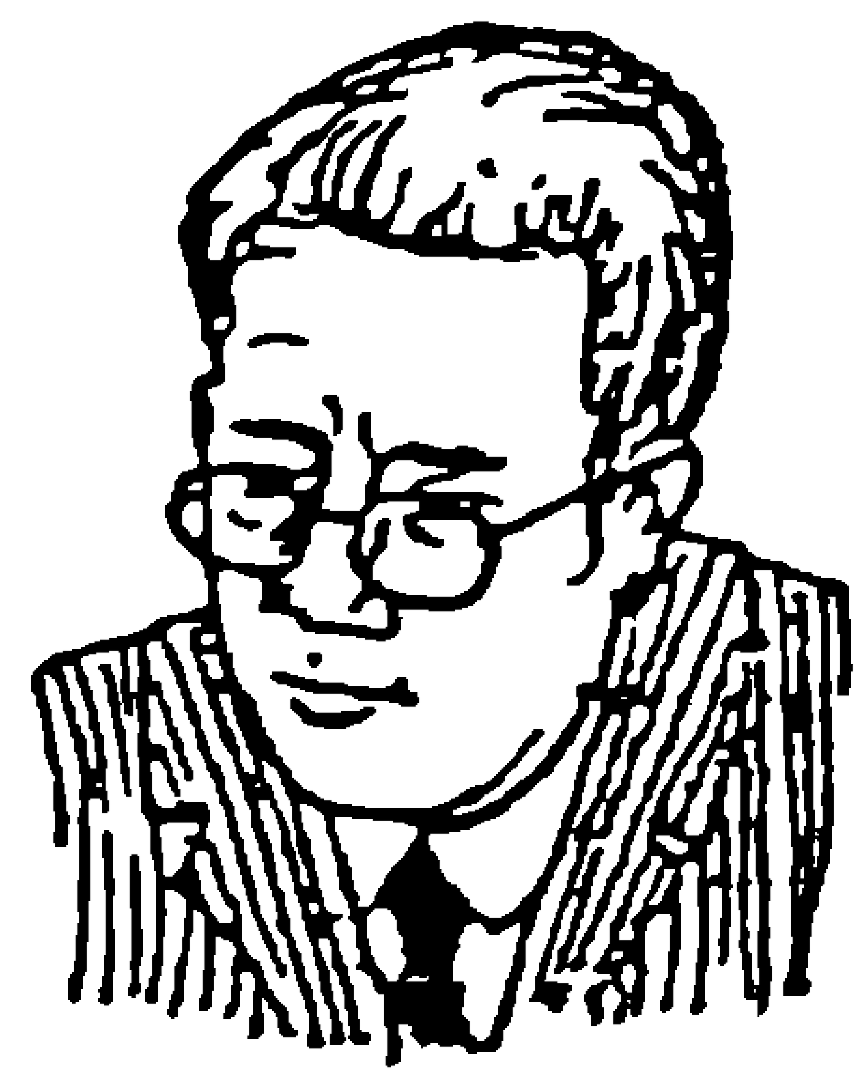
Hình 16-8

Hình 16-8a là sơ đồ đường di chuyển miếng đại diện Quan Vân Trường, hình 16-8b đại diện Tào Tháo cần thực hiện.

Bạn hãy tự làm một lần mới có thể lĩnh hội được hàm ý và tác dụng của loại hình vẽ gợi ý này.

17. KỲ TÍCH QUA CÁI KÉO

Khoảng hơn một phần tư thế kỷ trước đây, nhà toán học nổi tiếng Trung Quốc, giáo sư Hoa La Canh (12/11/1910 - 12/6/1985) đã dùng một vấn đề đơn giản mà lý thú làm lời mở đầu, giới thiệu một nhánh toán học mới: phương pháp vận trù.



Hoa La Canh

Vấn đề là thế này: Muốn pha ấm trà nhưng chưa có nước sôi, đồng thời phải rửa ấm đun nước, rửa ấm pha trà, rửa chén, lấy trà... Vậy tuần tự nên thế nào sẽ có lợi về thời gian?

Ba người thực hiện theo ba trình tự công việc sau đây:

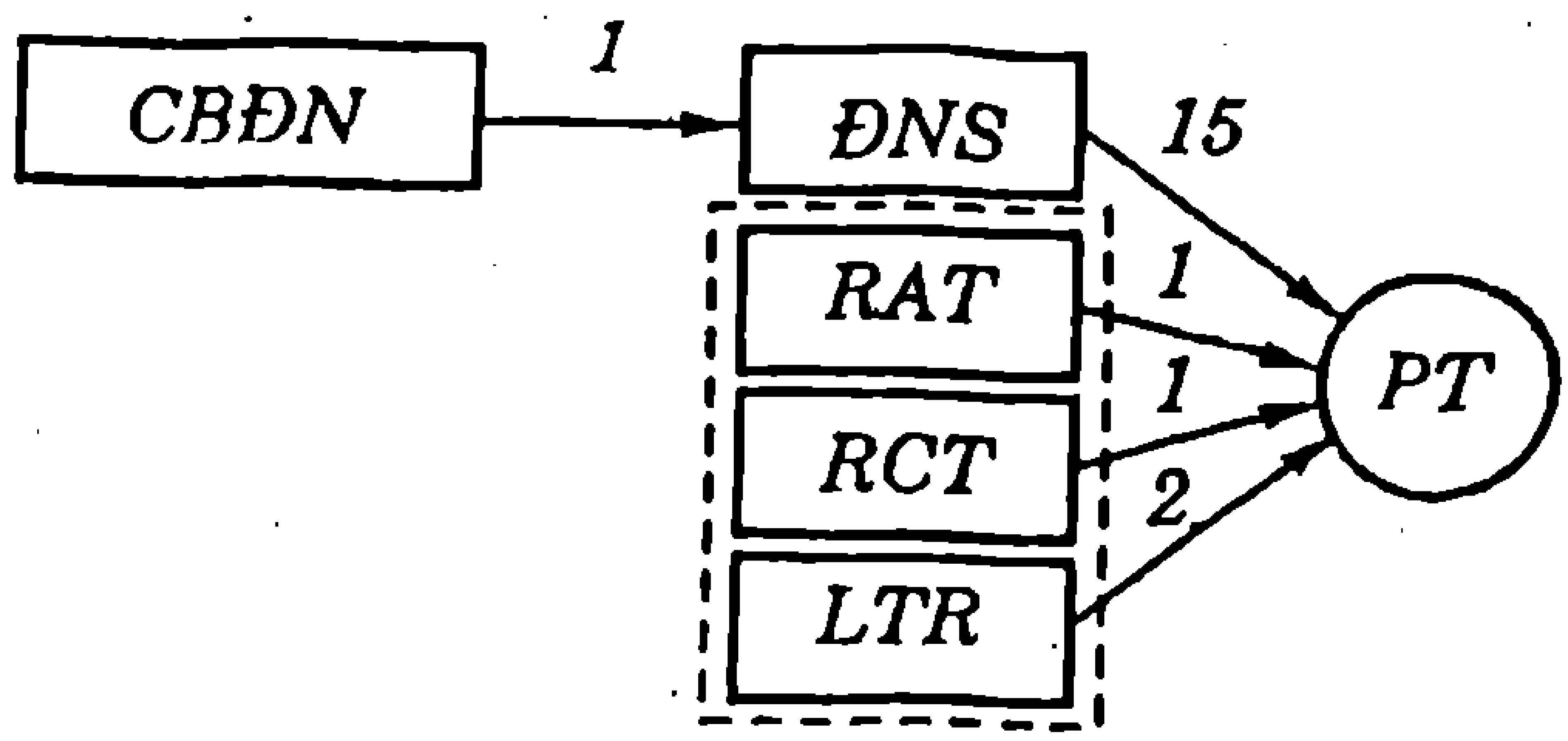
1. Trước tiên rửa ấm đun nước, đổ nước vào ấm, đặt lên bếp đun, sau đó chờ nước sôi, sau khi có nước sôi thì rửa ấm pha trà, rửa chén, lấy trà và pha trà.

2. Trước tiên rửa ấm đun nước, rửa ấm pha trà, rửa chén và lấy trà, tất cả đã chuẩn bị sẵn mới đổ nước vào ấm để đun nước, đặt lên bếp đun sau đó chờ nước sôi để pha trà.

3. Trước tiên rửa ấm đun nước, đổ nước vào ấm đun nước, đặt lên bếp đun, trong khi chờ nước sôi thì rửa ấm pha trà, rửa chén, lấy trà, nước vừa sôi sẽ pha trà.

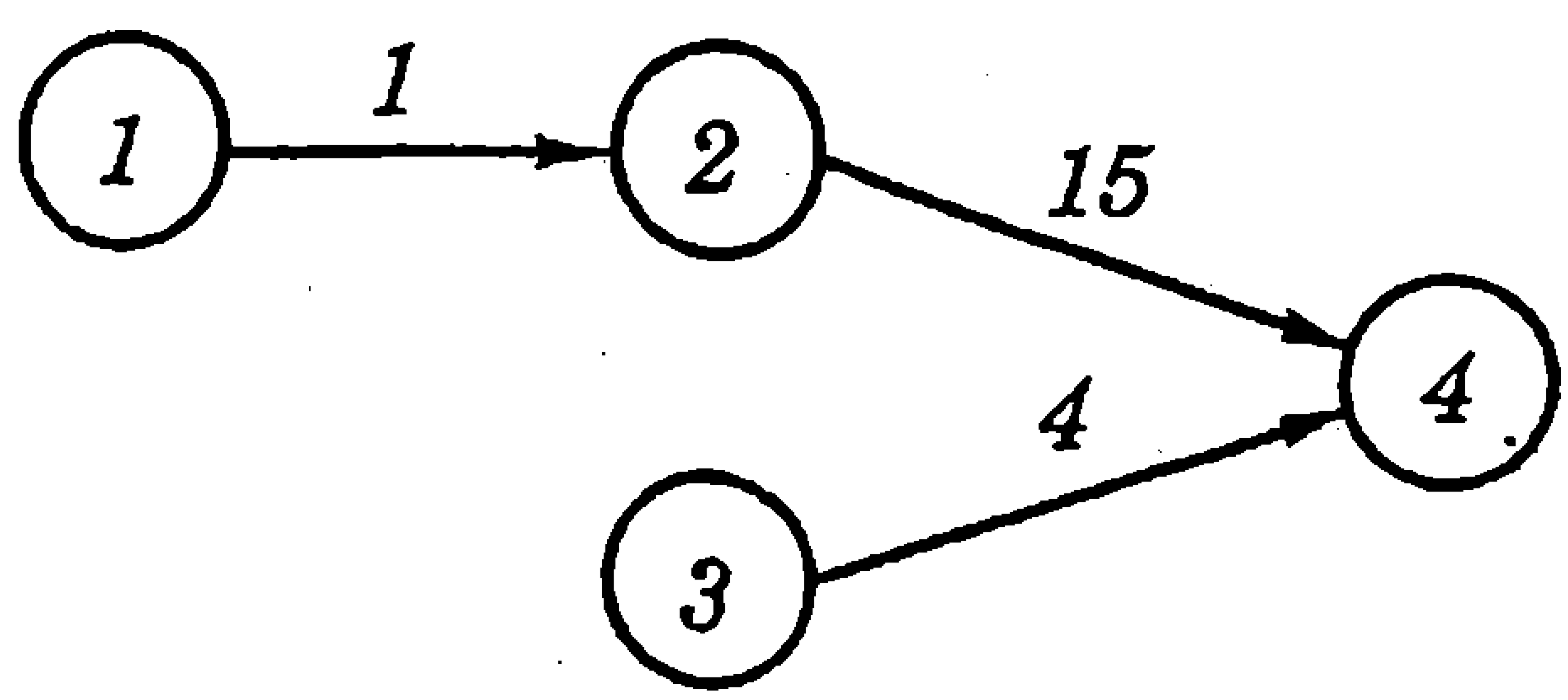
Những người thông minh có thể thấy ngay là người thứ ba có trình tự công việc hợp lý nhất (tốt nhất). Hai người kia đều "giam công" tạo nên sự lãng phí thời gian.

Phân tích kỹ một chút sẽ biết, trong rất nhiều việc cần làm có một số việc cần phải làm trước một số việc khác, còn có một số việc thì nhất định phải làm



Hình 17-1

sau một số việc khác. Ví dụ, không rửa ấm đun nước sôi, cho dù nước có đun sôi, vệ sinh không đảm bảo thì cũng không thể dùng được. Vì thế, rửa ấm đun nước sôi là điều kiện tiên quyết của đun nước sôi. Cũng vậy, đun nước sôi, rửa ấm trà, rửa chén và lấy trà đều là điều kiện tiên quyết của việc pha trà. "Sơ đồ mũi tên" ở hình 17-1 có thể làm cho người ta nhìn thấy ngay rõ ràng thứ tự trước - sau và quan hệ lẫn nhau giữa các sự kiện (việc). Các số ở hình biểu thị thời gian cần thiết để hoàn thành từng công việc (đơn vị tính bằng phút). Các ký hiệu trên hình 17-1: chuẩn bị đun nước (CBĐN) bao gồm rửa ấm đun nước, đổ nước vào ấm, đặt ấm lên bếp, đun nước sôi (ĐNS), pha trà (PT), rửa ấm trà (RAT), rửa chén trà (RCT) và lấy trà ra (LTR).

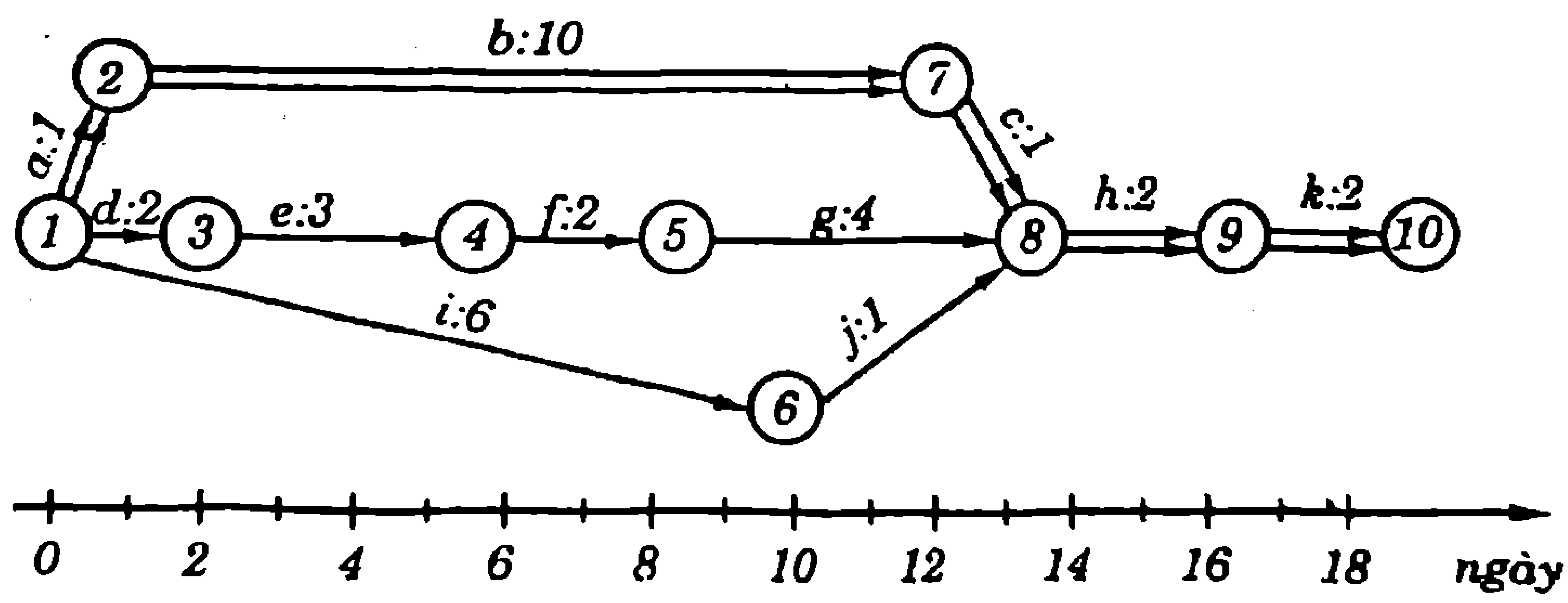


Hình 17-2

Dùng số trong vòng tròn biểu thị nhiệm vụ, đồng thời ghép những công việc mà bản thân không có thứ tự trước - sau gì nhưng đều do cùng một người thực hiện, ta sẽ được sơ đồ mũi tên như hình 17-2, gọi là sơ đồ mạng lưới PERT (sơ đồ mạng, sơ đồ PERT, sơ đồ dòng chảy thứ tự công việc,...). Các ký hiệu trên hình 17-2:

① - CBĐN, ② - ĐNS, ③ - RAT + RCT + LTR và ④ - PT.

Như vậy, theo phương pháp này ta lập một sơ đồ mạng để biểu thị tiến trình hoàn thành các việc trong mối liên hệ gắn bó giữa chúng với nhau. Muốn vậy trước hết ta phải liệt kê tất cả những việc cần làm, xác định thứ tự tiến hành các việc đó (việc nào trước, việc nào sau, những việc nào có thể làm đồng thời) và cuối cùng là dự tính thời hạn cần thực hiện, yêu cầu về nhân lực, vật tư, thiết bị cần thiết,... để làm việc ấy. Sau đó tính ra các mốc để đánh dấu sự hoàn thành một số việc nào đó (chẳng hạn, trong xây dựng công trình: mốc đầu tiên là khởi công, mốc cuối cùng là hoàn thành toàn bộ) và lập một sơ đồ mạng gồm một số "nút" và một số "mũi tên": mỗi nút biểu diễn một mốc, mỗi mũi tên biểu diễn một việc. Phía trên mũi tên có ghi thời hạn cần để làm công việc tương ứng (hình 17-3).



Hình 17-3

Sơ đồ mạng cho ta một bức tranh toàn cảnh về toàn bộ các việc trong mối liên hệ hữu cơ giữa chúng với nhau, dựa vào đó có thể tính toán một số chỉ tiêu thời gian giúp cho việc chỉ đạo thực hiện chính xác hơn.

Trên cơ sở phân tích sơ đồ mạng, ta có thể tính được thời hạn hoàn thành toàn bộ công việc, thời gian bắt đầu và thời gian kết thúc mỗi việc, cũng như thời gian dự trữ của mỗi việc. Các việc không có thời gian dự trữ là công việc "găng" và dãy các công việc "găng" (từ khi khởi công đến khi hoàn thành toàn bộ công trình) gọi là "đường găng" (đường các mũi tên đôi trong hình vẽ), còn gọi là "đường mâu thuẫn chính". Đó là dây chuyền các công việc liên tiếp có thời hạn cần hoàn thành dài nhất từ khi khởi công đến khi hoàn thành toàn bộ công trình.

Vậy ý nghĩa của "đường găng" là gì?

Mỗi việc "găng" mà bị chậm trễ thì toàn bộ việc xây dựng công trình chắc chắn sẽ bị chậm trễ theo. Các việc không "găng" thì nếu bị chậm trễ trong một phạm vi nhất định vẫn có thể không ảnh hưởng gì đến toàn bộ công trình. Nói cách khác, các việc "găng" là các khâu then chốt, nhất thiết phải làm xong đúng thời hạn quy định, nếu muốn giữ cho toàn bộ công trình không bị vỡ kế hoạch xây dựng. Điều này gợi ý tập trung chỉ đạo các khâu then chốt, theo dõi, kiểm tra chặt chẽ quá trình tiến hành công việc và giải quyết kịp thời các khó khăn, phát sinh ở các khâu đó, còn các việc không "găng" thì chưa cần để ý tới, chừng nào các việc ấy còn có thời gian dự trữ. Đó là một trong những lợi ích rõ rệt của sơ đồ mạng (số công việc "găng" thường chỉ chiếm 10-15% tổng số công việc).

Muốn rút ngắn thời hạn hoàn thành toàn bộ công trình thì phải tác động để rút ngắn thời hạn "đường găng", tức là phải rút ngắn thời hạn của một số việc "găng". Còn việc không "găng" dù có hoàn thành sớm cũng không làm rút ngắn được thời hạn hoàn thành toàn bộ công trình. (Trong hình 17-3 cần rút ngắn thời hạn hoàn thành các công việc a, b, c, h, k. Nếu một trong các việc "găng" đó được rút ngắn thời hạn hoàn thành thì đều có thể rút ngắn được thời hạn hoàn thành toàn bộ công trình).

Trong quá trình chỉ đạo thực hiện kế hoạch, sơ đồ mạng được thường xuyên điều chỉnh theo diễn biến của tình hình thực tế.

Dựa vào sơ đồ mạng chúng ta có thể tiến hành một số tính toán tối ưu sau đây:

1. Với chi phí, cung cấp nhân lực, vật tư, thiết bị cố định, chúng ta có thể bố trí các công việc sao cho hoàn thành toàn bộ công trình sớm nhất.

2. Với thời hạn hoàn thành công trình đã định, chúng ta có thể tổ chức các công việc để đảm bảo chi phí ít nhất hoặc đảm bảo việc sử dụng nhân lực, vật tư, thiết bị ở mức thấp nhất.

Hướng chung để giải quyết cả hai loại tính toán tối ưu này là tập trung sự chỉ đạo vào các khâu (việc) "găng", điều chỉnh một phần nhân lực, vật tư ở các việc không "găng" sang việc "găng" nhằm rút ngắn thời hạn chung. Về mặt toán học, hai loại tính toán này đều có thể giải quyết nhờ dùng lý thuyết quy hoạch toán học.

Đương nhiên là sơ đồ mạng mà Hoa La Canh đưa ra ở trên là rất đơn giản. Thông thường thì các nhiệm vụ cần hoàn thành là rất nhiều, quan hệ giữa chúng đan xen nhau, do đó mà sơ đồ mạng khá phức tạp.

Ví dụ pha trà nêu trên, muốn hoàn thành nó cần 16 phút.

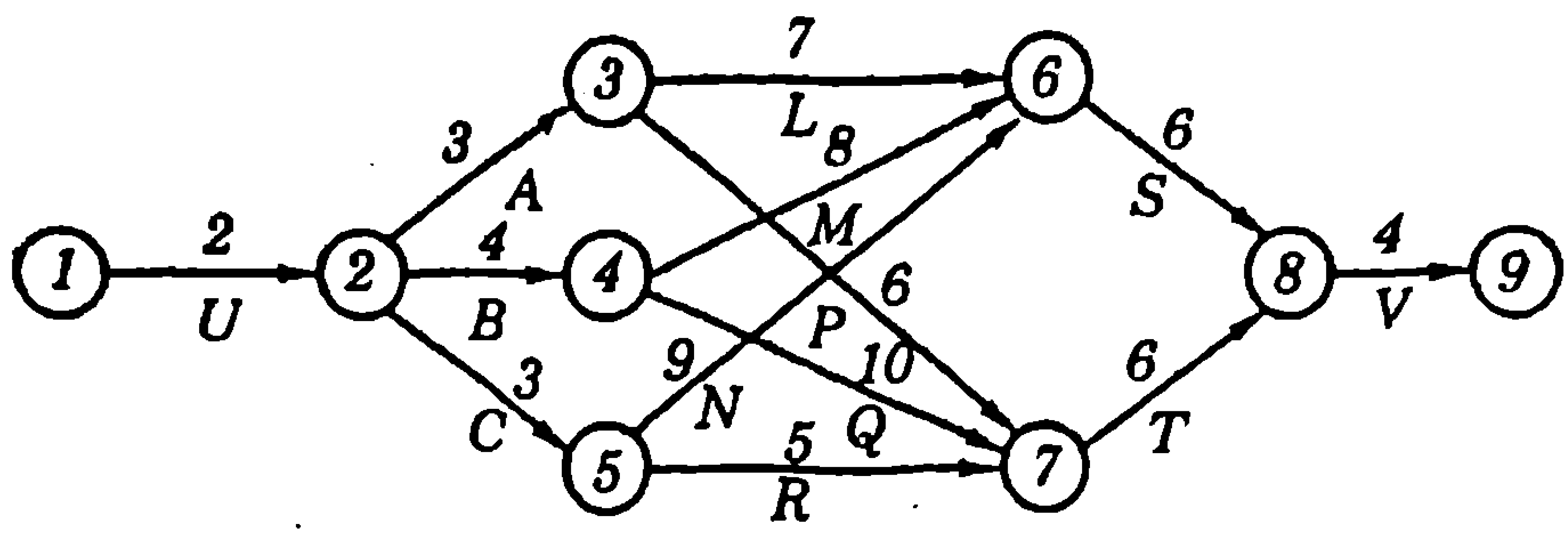
Đây là căn cứ vào sơ đồ mạng sử dụng "thời gian dài nhất" tính ra: ① $\xrightarrow{1}$ ② $\xrightarrow{15}$ ④. Các trình tự công việc khác ③ $\longrightarrow$ ④ trong sơ đồ mạng ở hình 17-2 đều có thể sắp xếp hoàn thành đồng thời với việc hoàn thành "đường găng" ② $\longrightarrow$ ④.

Sau đây là một bảng kế hoạch sản xuất (bảng 17-1):

Bảng 17-1

Số TT	Nhiệm vụ	Nhiệm vụ tiếp theo	Thời gian sử dụng
1	U	A, B, C	2
2	A	L, P	3
3	B	M, Q	4
4	C	N, R	3
5	L	S	7
6	M	S	8
7	N	S	9
8	P	T	6
9	Q	T	10
10	R	T	5
11	S	V	6
12	T	V	6
13	V		4

Sơ đồ mạng của kế hoạch sản xuất ở bảng 17-1 như hình 17-4.



Hình 17-4

Muốn tìm ra "đường găng" của kế hoạch sản xuất này phải tính ra thời gian cần dùng của sơ đồ mạng (bảng 17-2).

Từ bảng 17-2 ta thấy: số thứ tự 5 là "đường găng" của kế hoạch sản xuất này. Nó chứng tỏ thời gian cần thiết để hoàn thành kế hoạch sản xuất này thì không thể ít hơn 26 đơn vị thời gian.

Bảng 17-2

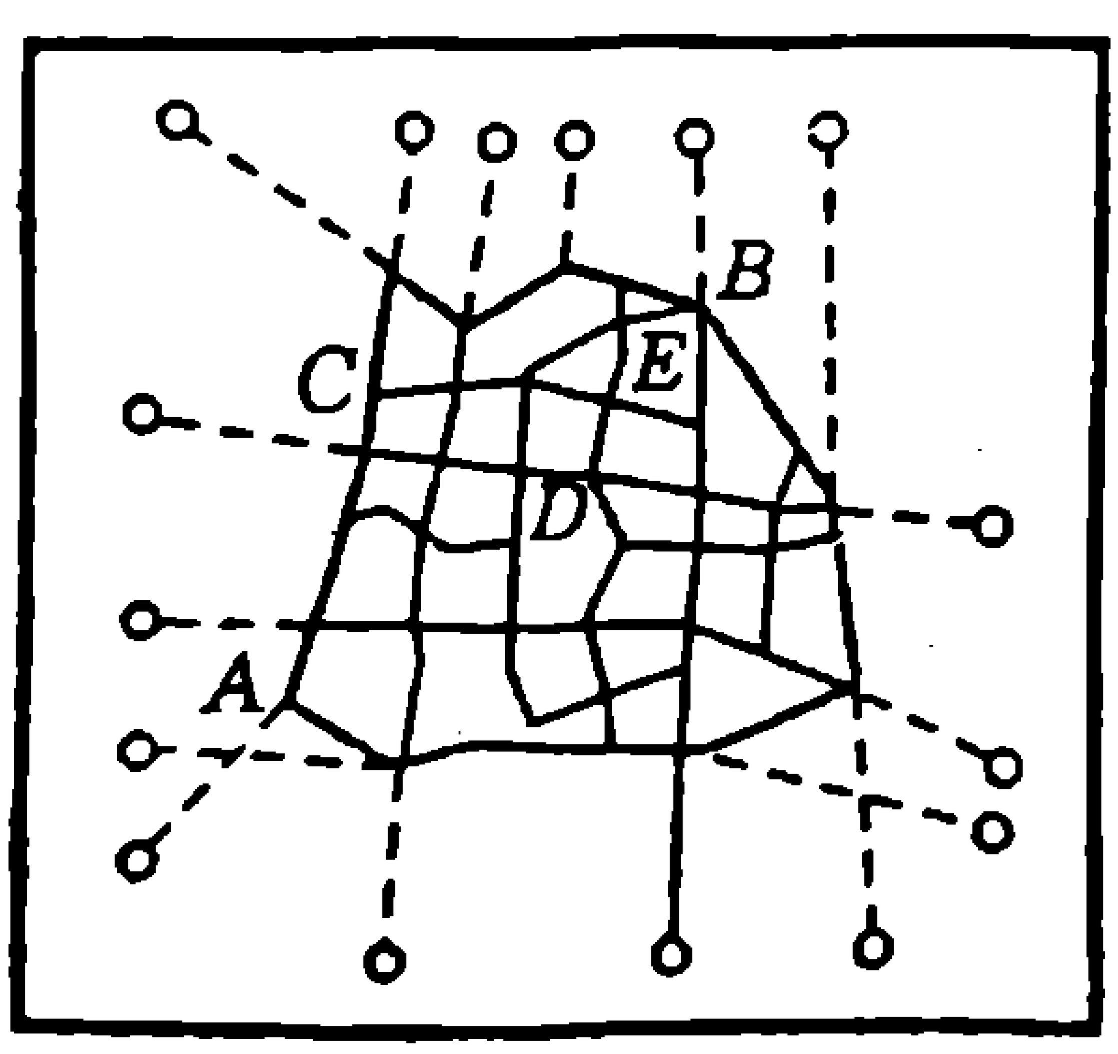
Số TT	Các tuyến đường	Thời gian sử dụng
1.	① → ② → ③ → ⑥ → ⑧ → ⑨	22
2.	① → ② → ④ → ⑥ → ⑧ → ⑨	24
3.	① → ② → ⑤ → ⑥ → ⑧ → ⑨	24
4.	① → ② → ③ → ⑦ → ⑧ → ⑨	21
5.	① → ② → ④ → ⑦ → ⑧ → ⑨	26
6.	① → ② → ⑤ → ⑦ → ⑧ → ⑨	20

Đối với sơ đồ mạng phức tạp hơn, muốn tìm được "đường găng" như trên là rất khó khăn. Có điều, bạn đọc có thể hoàn toàn không ngờ tới là muốn giải quyết vấn đề "đường găng" chỉ cần một cái kéo thông thường là được. Muốn nói rõ kỳ tích xuất hiện dưới cái kéo này, ta phải nói từ "Phép kéo dây".

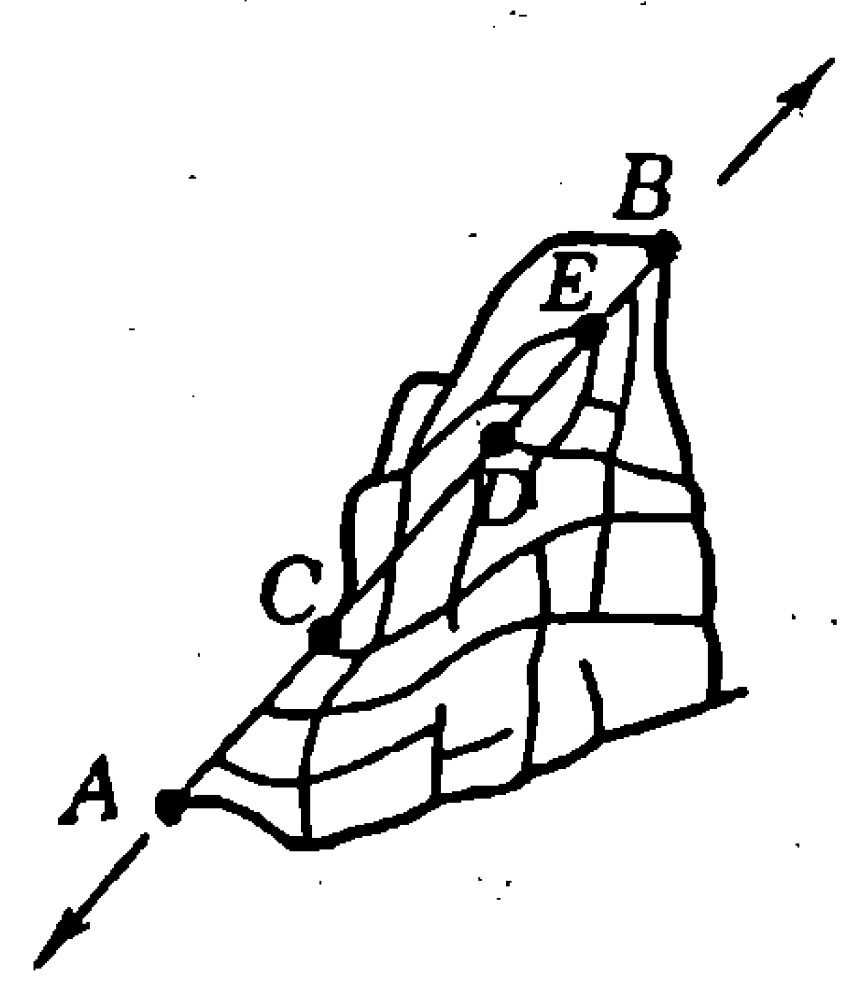
Như bạn đọc đã biết, nếu từ A đến B có hai tuyến đường thì người ta sẽ chọn đi tuyến đường ngắn hơn. Nhưng đối với các vùng mạng lưới giao thông phát triển, đường sá chằng chịt, muốn tìm tuyến đường ngắn nhất từ A đến B thật không phải dễ.

Có một biện pháp nhẹ nhàng, có thể giúp người ta tìm ra được tuyến đường ngắn nhất từ trong mấy chục, thậm chí mấy trăm tuyến đường chỉ trong mấy phút, thậm chí mấy giây. Đây chính là "Phép kéo dây".

"Phép kéo dây" thực hiện như sau: Trải bản đồ giao thông của vùng cần tìm tuyến đường ngắn nhất lên mặt phẳng, sau đó dùng sợi dây mảnh không dễ co giãn, bện thành một lưới giao thông như hình 17-5a phỏng theo các tuyến đường trên bản đồ. Nếu ta muốn tìm tuyến đường ngắn nhất từ A đến B chỉ cần dùng tay nắm chặt hai đầu dây ở hai điểm A và B, kéo căng ra hai phía ngược nhau (hình 17-5b). Vậy đường thẳng ACDEB chính là tuyến đường ngắn nhất mà ta cần tìm.



a)

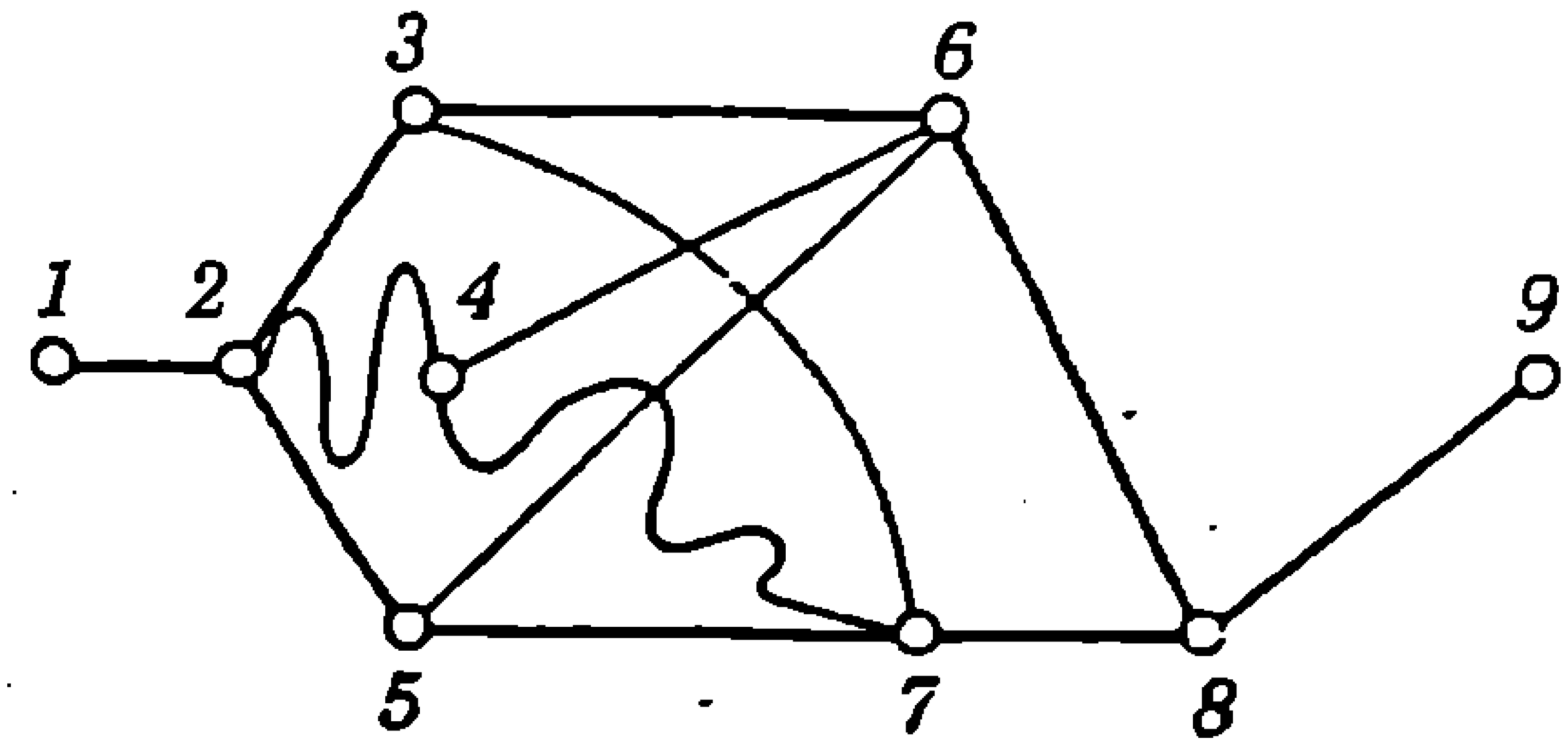


b)

Hình 17-5

Bây giờ chúng ta trở lại tìm "đường găng". Sơ đồ mạng hơi giống với lưới giao thông của thành phố, có điều là coi thời gian hoàn thành nhiệm vụ tương ứng với độ dài của các con đường, đồng thời sự tiến hành nhiệm vụ là có hướng mà thôi. Đáng tiếc là ở đây yêu cầu không phải là "đường ngắn nhất", mà là "đường dài nhất".

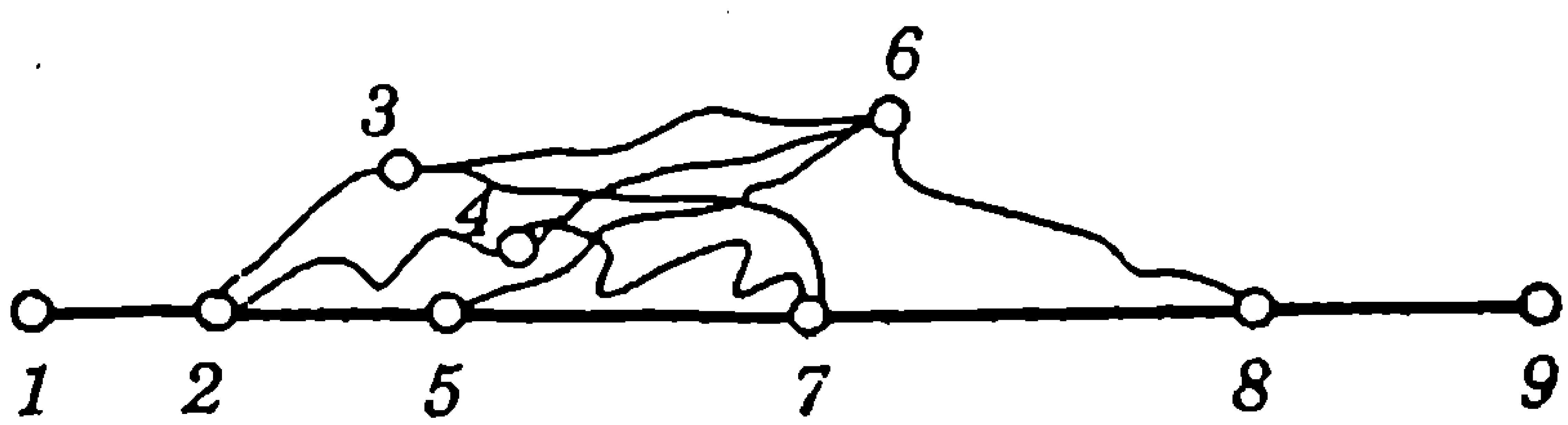
Tuy vậy, chúng ta có thể lợi dụng cái kéo, cấy ghép một cách khéo léo "Phép kéo dây" sang trường hợp này.



Hình 17-6

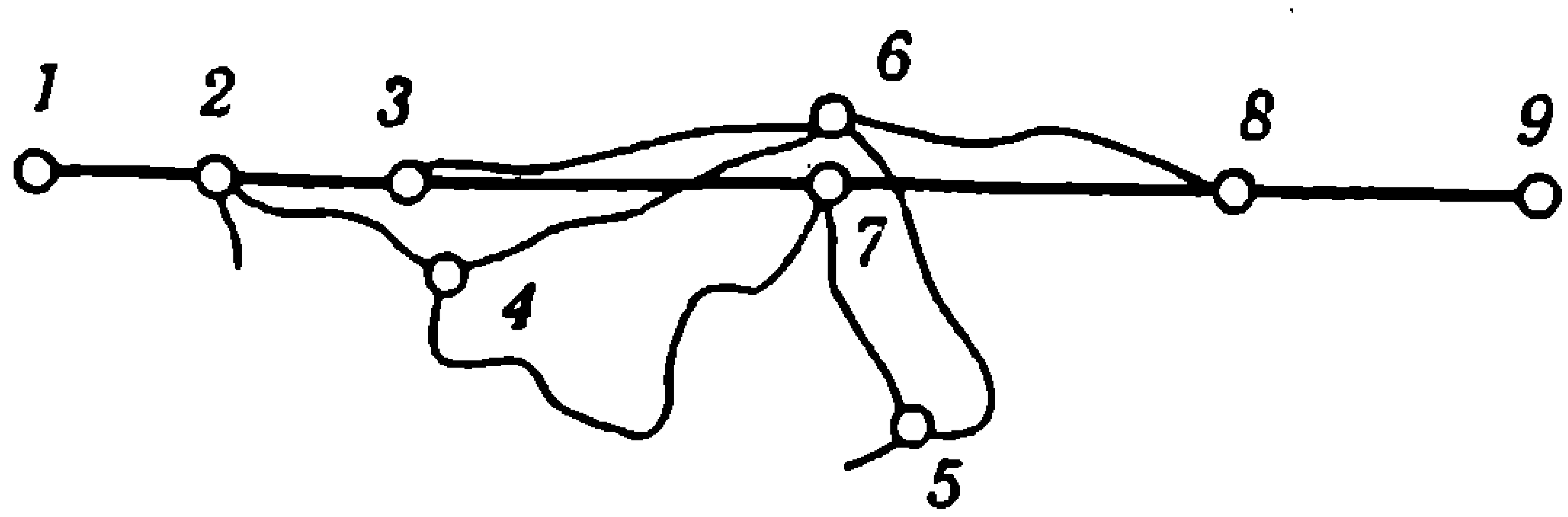
Giống như "Phép kéo dây", dùng sợi dây mảnh không dễ co giãn, bện thành một lưới giao thông như sơ đồ mạng. Vẫn lấy kế hoạch sản xuất trên đây làm ví dụ, ta có hình 17-6: độ dài các đoạn đường trong mạng lưới biểu thị thời gian cần dùng để hoàn thành trình tự công việc tương ứng.

Kéo căng ① và ⑨ ta tìm được tuyến đường ngắn nhất (hình 17-7).



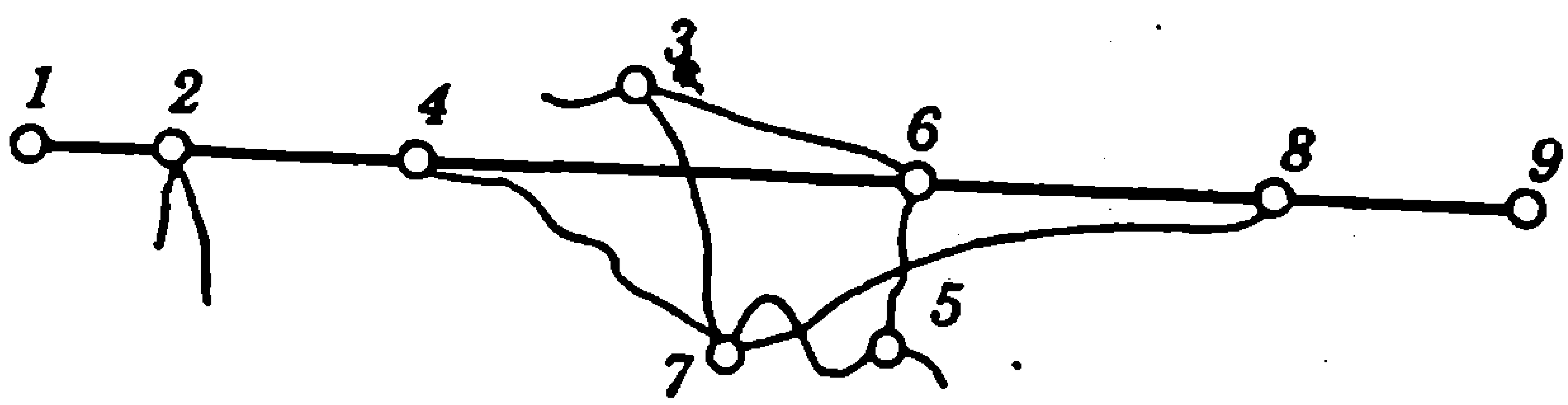
Hình 17-7

Trên đây hiển nhiên là đã tìm được tuyến đường ngắn nhất từ ① đến ⑨. Để tìm "đường găng" ta có thể cắt đi một nút nào đó có chạc rễ. Đương nhiên, khi cắt, tốt nhất có thể bắt đầu từ đầu, đồng thời còn phải chú ý tới tính hợp lý của đầu mũi tên trình tự công việc trên sơ đồ mới sau khi cắt. Ví dụ, cắt đi (2-5) và kéo căng ① và ⑨ ta được sơ đồ ở hình 17-8.



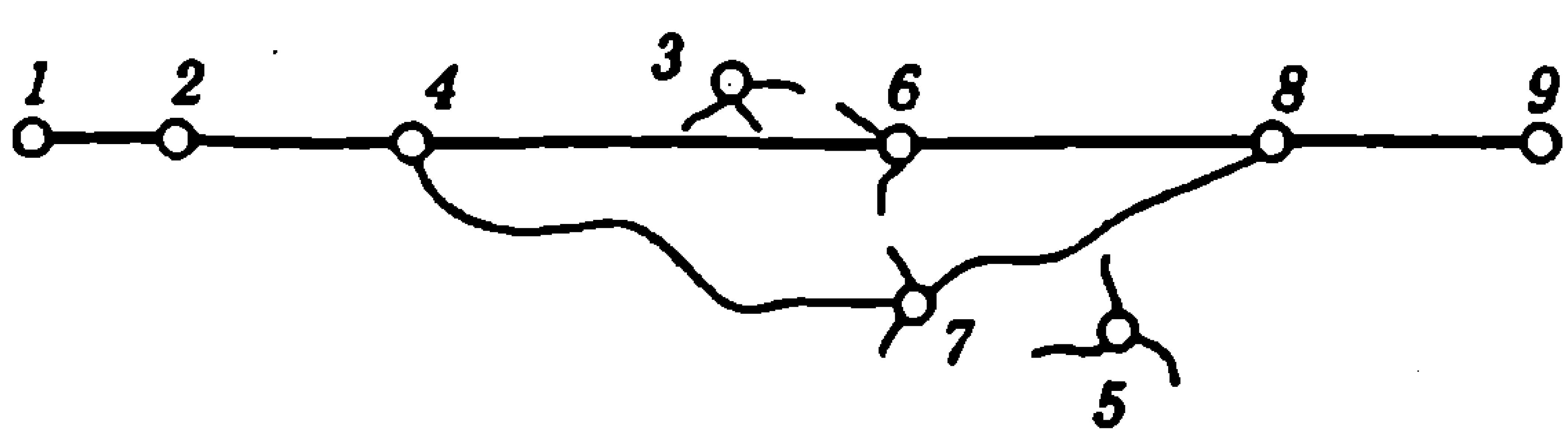
Hình 17-8

Cũng vậy, khi cắt đi (2-3) trong sơ đồ ở hình 17-8 và kéo căng ① và ⑨ ta được sơ đồ ở hình 17-9.

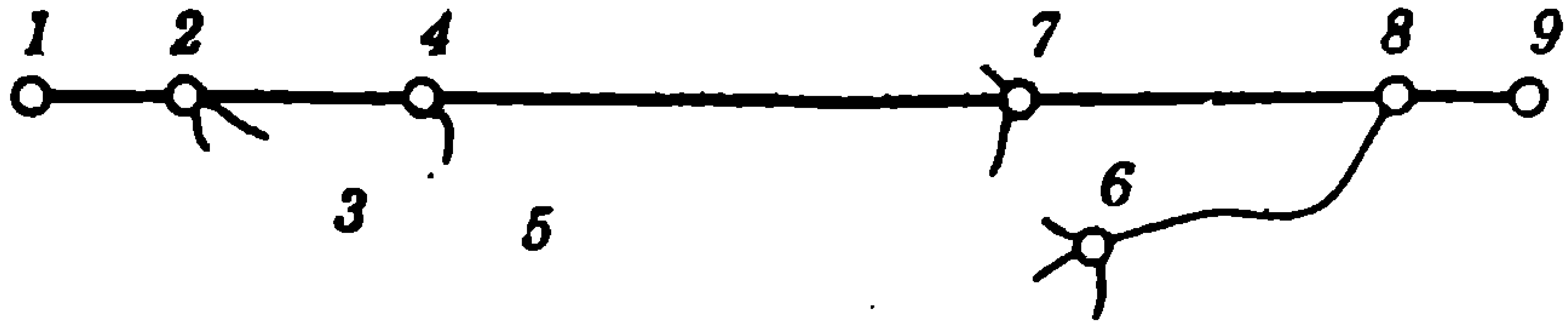


Hình 17-9

Dễ thấy trên sơ đồ mạng ban đầu: Trình tự công việc ⑦ → ③ → ⑥ với trình tự công việc ⑦ → ⑤ → ⑥ hoàn toàn không tồn tại (hướng mũi tên không đúng). Do đó đầu dây ③ và ⑤ trên thực tế không có tác dụng, có thể mạnh dạn cắt bỏ (được hình 17-10), cuối cùng cắt bỏ (4-6) ta được hình 17-11.



Hình 17-10



Hình 17-11

Bây giờ không còn dây nữa. "Tuyến đường dài nhất" có được là:

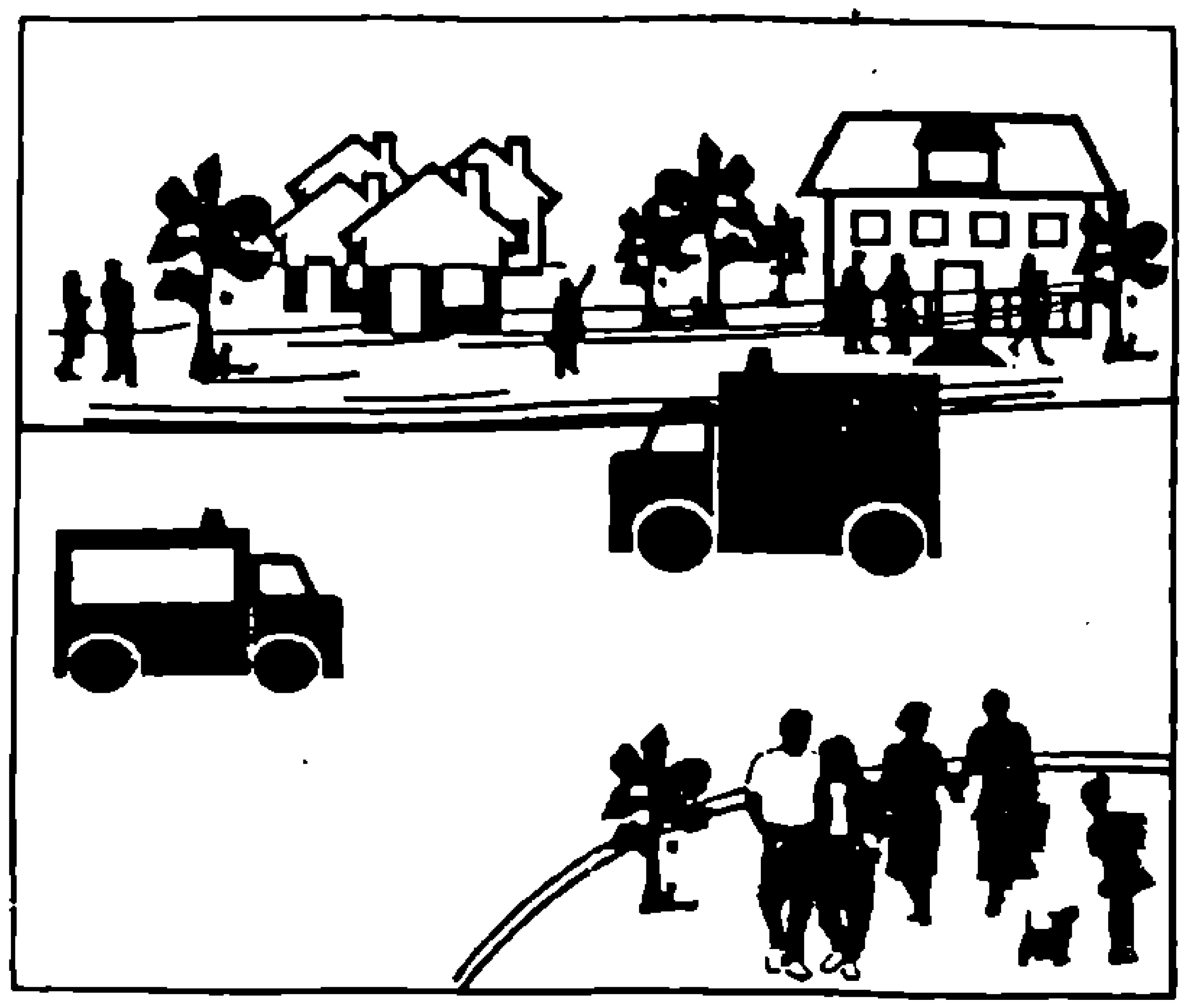
1 - 2 - 4 - 7 - 8 - 9.

Điều này hiển nhiên giống như "đường găng" đạt được bằng tính toán trên đây.

Như vậy, cái kéo đã đưa đến kỳ tích. Đó là điều mà ban đầu các nhà toán học cũng không ngờ tới.

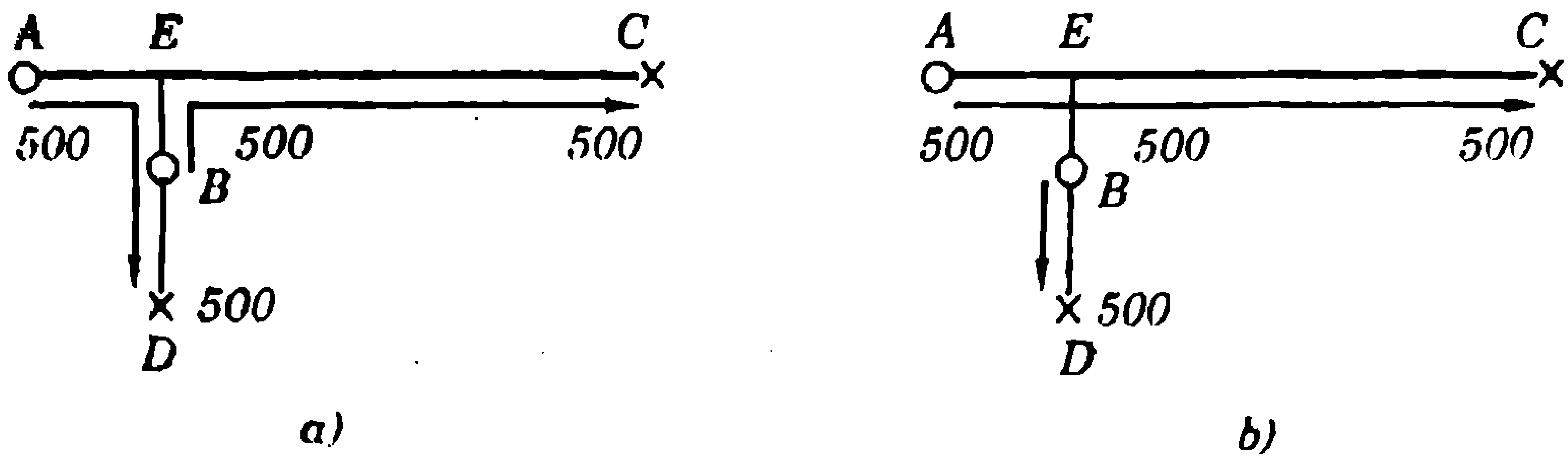
18. VẬN CHUYỂN THEO VẬN TRÙ

Khắp nơi trên thế giới ở đâu cũng có mạng lưới giao thông. Khi mạng lưới giao thông đơn giản thì việc chọn đường đi hợp lý không khó khăn lắm. Thế nhưng khi mạng lưới giao thông phức tạp, nhiều đường chằng chịt thì việc chọn đường đi hợp lý cũng sẽ phức tạp.



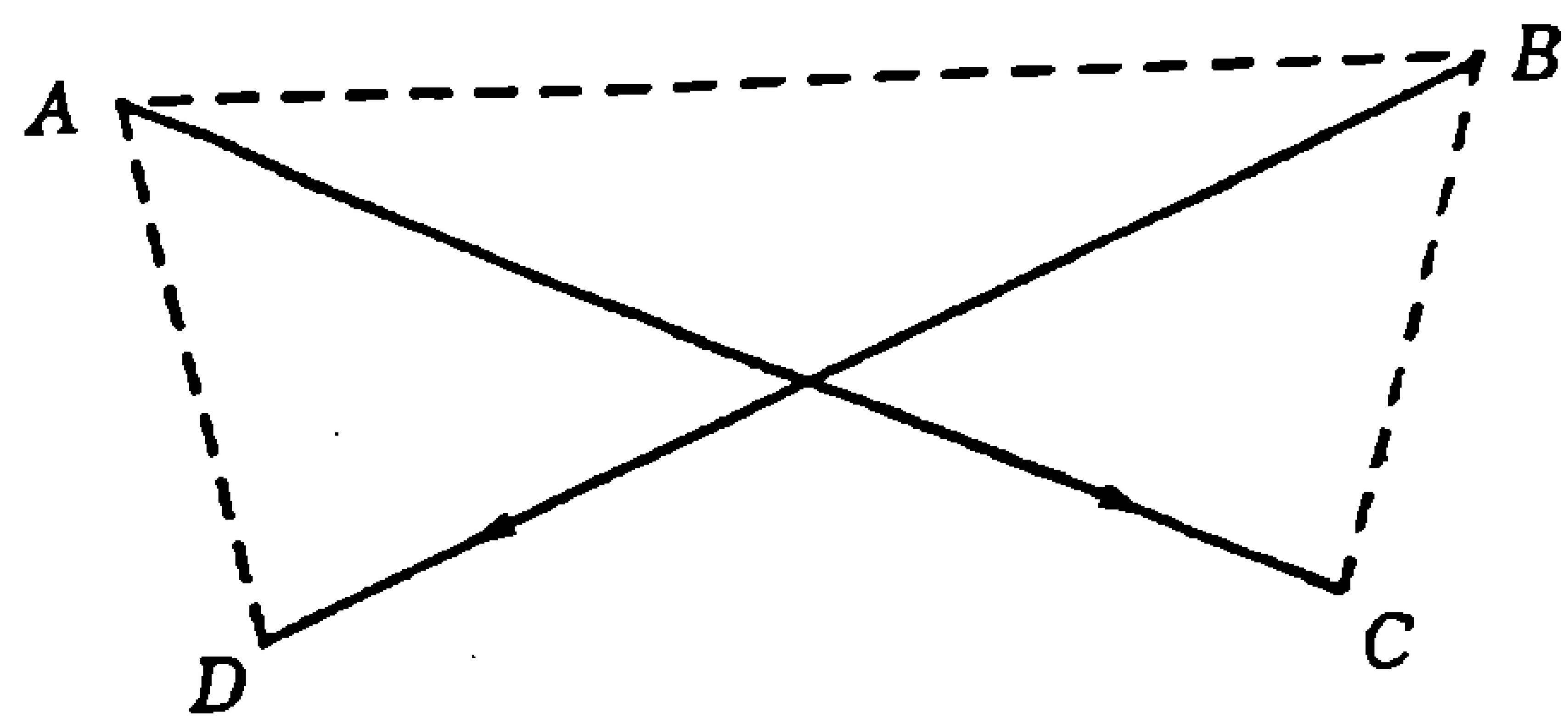
Việc chọn đường đi hợp lý sẽ đưa lại hiệu quả kinh tế lớn. Mục này không đề cập đến việc xe chở đầy hay vơi, xe chạy nhanh hay chạy chậm, chọn phương tiện chuyên chở nào thì hợp lý,... mà chỉ quan tâm đến việc chọn đường đi hợp lý.

Hình 18-1 là sơ đồ điều vận một loại vật tư: "O" biểu thị nơi xuất, "×" biểu thị nơi nhập, các số biểu thị lượng vật tư cung ứng. Rõ ràng phương án điều vận ở hình 18-1a: chở hàng từ A đến D (qua B) và từ B đến C là không hợp lý, vì có đoạn EB trùng lặp, người ta gọi là hiện tượng "đối lưu" vận tải. Khi xuất hiện hiện tượng "đối lưu" thì chắc chắn gây lãng phí, do vậy không chọn phương án điều vận ở hình 18-1a. Phương án điều vận ở hình 18-1b: chở hàng từ A đến C và từ B đến D là hợp lý.



Hình 18-1

Một ví dụ khác là điều xe chở hàng từ A đến C và từ B đến D (hình 18-2). Như vậy mỗi xe chỉ đạt tỷ lệ lợi dụng xe 50%, bởi vì khi trở về xe chạy không có hàng. Nếu ta biết kết hợp: sau khi trả hàng ở C thì điều xe không đến B để chở hàng đến D sẽ có lợi hơn. Bởi vì, nếu có điều xe khác từ A đến B để chở hàng đến D thì đoạn đường AB dài hơn đoạn đường CB, chưa kể xe không cũng phải về lại A.



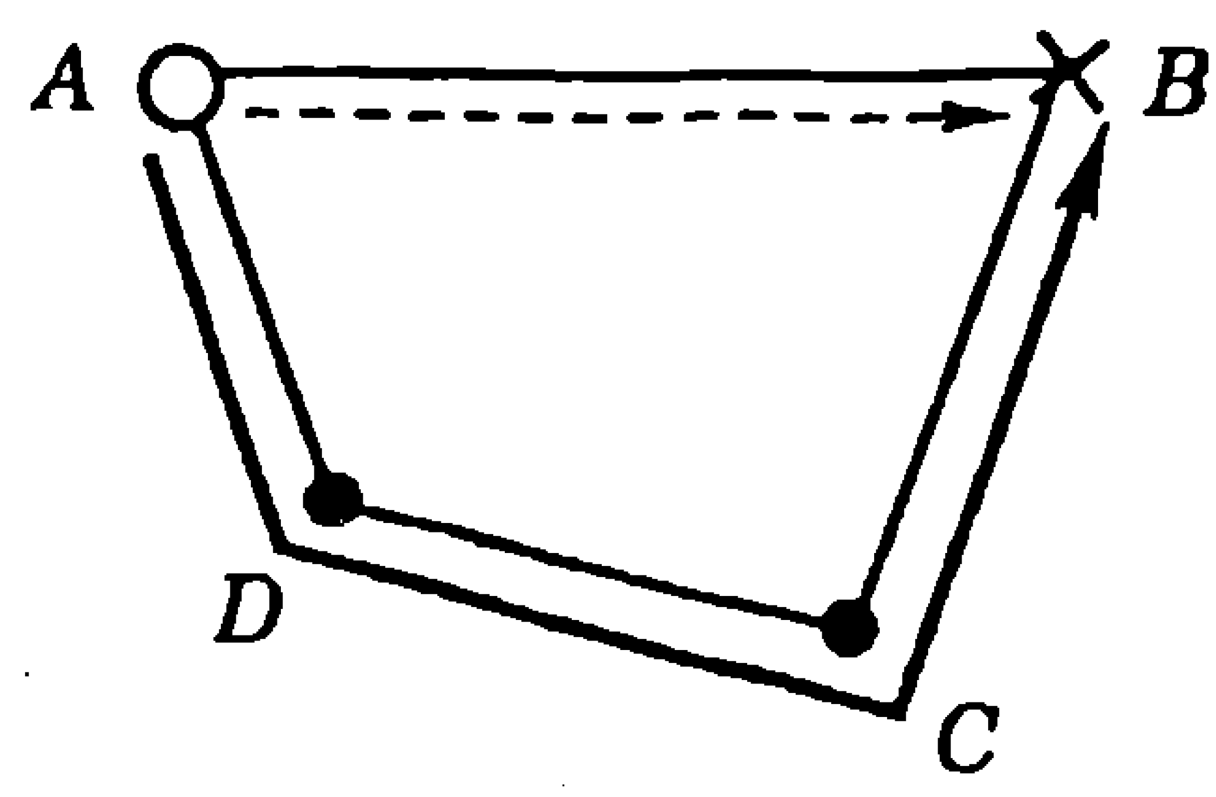
Hình 18-2

Tất nhiên các bài toán điều vận trong thực tế phức tạp hơn rất nhiều. Để tính toán các phương án phân bố luồng hàng, phân bố phương tiện trên các tuyến đường, kết hợp các phương thức vận tải,... đòi hỏi tính toán phức tạp và tốn nhiều công sức hơn.

Người ta gọi các bài toán như vậy là "Bài toán vận trù". "Bài toán vận trù" không chỉ áp dụng trong giao thông vận tải, mà còn được áp dụng trong công nghiệp (tổ chức dây chuyền sản xuất, lập kế hoạch sản xuất, bố trí trình tự gia công, pha cắt vật liệu tiết kiệm, ...), trong nông nghiệp (phân công lao động, phân bố đất trồng, pha trộn thức ăn gia súc...) và trong nhiều ngành khác.

Nhờ tính toán vận trù, chúng ta có thể so sánh chi phí và hiệu quả, so sánh thiệt hơn để chọn giải pháp tốt nhất (tối ưu) trong số các phương án có thể. Ngay cả trong tình huống khó khăn nhất, các tính toán vận trù cũng sẽ làm giảm đến mức thấp nhất những thiệt hại có thể xảy ra.

Một hiện tượng lãng phí sức vận tải khác là đi theo đường "vòng vèo", không hợp lý. Chẳng hạn, sơ đồ ở hình 18-3, nếu ta đi theo đường từ A thẳng đến B là hợp lý, còn đi theo đường từ A đến D, C rồi mới về B là đi theo đường "vòng vèo", lãng phí, không hợp lý.



Hình 18-3

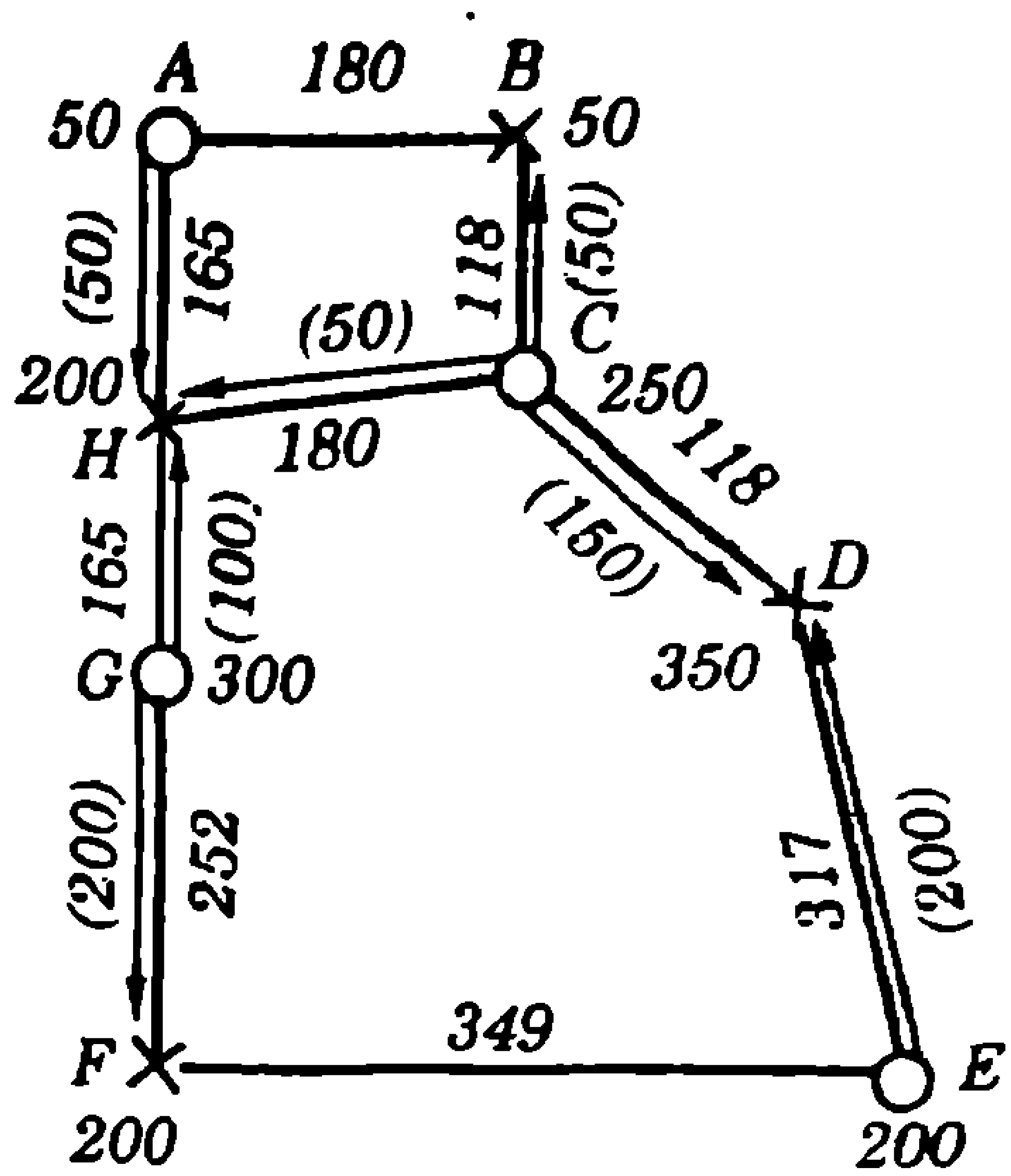
Hiện tượng "vòng vèo" không dễ dàng thấy như vừa nêu, lúc đó ta phải tính toán để so sánh. Chẳng hạn, mạng lưới đơn giản như ở hình 18-4, có hai vòng khuyên, trong đó vòng khuyên lớn [CDEFGH] có tổng chiều dài là:

$$CD + DE + EF + FG + GH + HC =$$
$$118 + 317 + 349 + 252 + 165 + 180 = 1381 \text{ (km)}.$$

Trên mạng lưới này có ba nơi xuất ○ là C, E và G với ba nơi nhập × là D, F và H. Nếu ta điều vận theo ba đoạn đường CH, ED và GF thì tổng chiều dài đường là:

$$CH + ED + GF = 180 + 317 + 252 = 749 \text{ (km)}.$$

Như vậy tổng chiều dài này lớn hơn một nửa tổng chiều dài vòng khuyên $\left(\frac{1381}{2}\right)$, tức là có hiện tượng "vòng vèo" và phương án điều vận này là không hợp lý. Nếu ta chọn phương án điều vận đi theo ba đoạn đường CD, EF, GH thì tổng chiều dài đường là: CD + EF + GH = 118 + 394 + 165 = 632 (km). Như vậy tổng chiều dài này nhỏ hơn một nửa tổng chiều dài vòng khuyên $\left(\frac{1381}{2}\right)$, tức là không có hiện tượng "vòng vèo" và phương án điều vận này hợp lý.

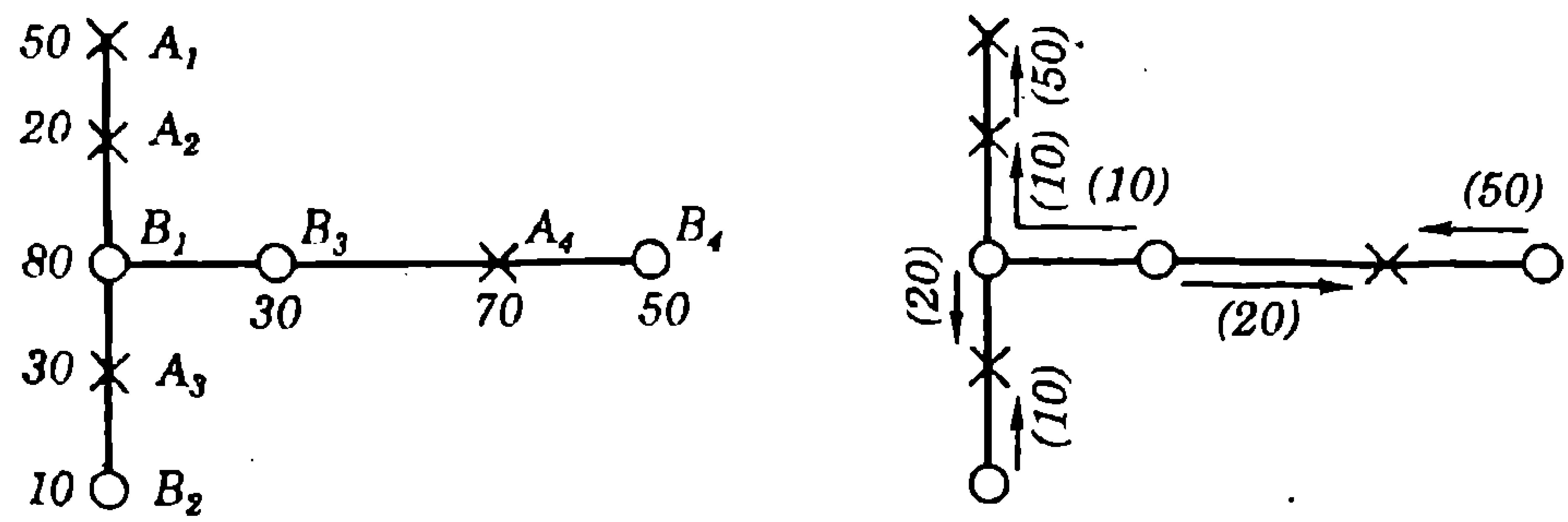


Hình 18-4

Về mặt lý thuyết, các nhà toán học đã chứng minh được rằng: Tất cả các phương án có "đối lưu" hoặc đi "vòng vèo" nhất định không phải là phương án tốt nhất. Sự bất hợp lý của "đối lưu" không cần nói cũng thấy. Sự xuất hiện "vòng vèo" thì biểu hiện ở chỗ ít nhất tồn tại một vòng khuyên, mà tổng chiều dài các đoạn đường ta chọn lớn hơn một nửa chiều dài vòng khuyên ấy. Lúc đó chúng ta dùng biện pháp điều chỉnh, làm cho nó trở thành đường đi có tổng chiều dài nhỏ hơn nửa chiều dài vòng khuyên.

Điều ngược lại ở trên: phương án điều vận không có "đối lưu" hoặc "vòng vèo" thì nhất thiết là phương án tối ưu.

Tất nhiên, đối với sơ đồ cung ứng không có vòng khuyên khi không cần nói tới "vòng vèo", vì vậy trong trường hợp này chỉ cần sơ đồ cung ứng không xuất hiện "đối lưu" thì phương án điều vận là tối ưu. Muốn đạt được yêu cầu này thì từ điểm mút của sơ đồ bắt đầu phân phối nhu cầu cung ứng bằng nhau từng bước từ ngoài vào trong. Hình 18-5 là một ví dụ về sơ đồ cung ứng không có vòng khuyên để bạn đọc tự luyện tập.



Hình 18-5

Bây giờ ta xét trường hợp tìm phương án điều vận trong trường hợp sơ đồ cung ứng có vòng khuyên. Sau đây chúng ta xét một phương pháp mà người ta hay gọi là "phép co vòng". Chúng ta vẫn dùng ví dụ đã nêu ở hình 18-4.

Trước tiên, trên sơ đồ cung ứng vẽ một phương án ban đầu không có "đối lưu". Việc này thực hiện được dễ dàng. Các ký hiệu ghi trên hình 18-4 coi như của phương án ban đầu. Số liệu điều vận của phương án này như ở bảng 18-1 (đơn vị: tấn).

Bảng 18-1

Nơi nhập/Nơi xuất	A	C	E	G	Nhu cầu
B		50			50
D		150	200		350
F				200	200
H	50	50		100	200
Cung ứng	50	250	200	300	800

Từ số liệu ở bảng 18-1 và hình 18-4 dễ dàng tính được tổng khối lượng vận tải theo phương án này là:

$W = 50 \times 165 + 50 \times 118 + 150 \times 118 + 50 \times 180 +$

$200 \times 317 + 200 \times 252 + 100 \times 165 = 171150$ (tấn - km).

Tổng khối lượng vận tải theo vòng khuyên lớn:

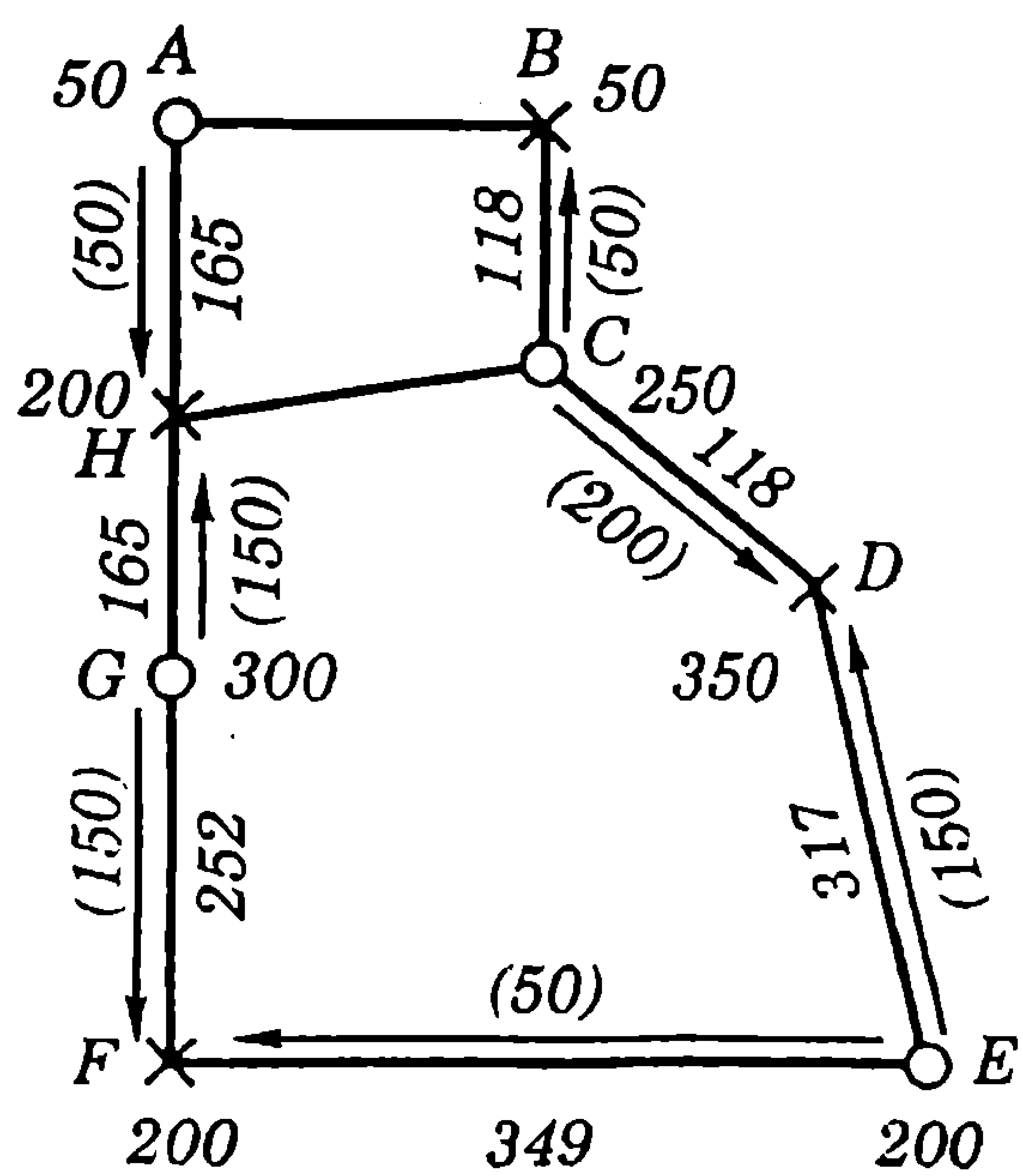
$250 \times 118 + 350 \times 317 + 200 \times 349 + 200 \times 252$

$+ 300 \times 165 + 200 \times 180 = 346150$ (tấn - km).

Ta có:

$$\frac{346150}{2} = 173075 > 171150$$

Vậy phương án này chưa phải là tối ưu.



Hình 18-6

Chúng ta có thể từng bước điều chỉnh tối ưu thông qua hai biện pháp sau đây:

1. Tìm ra một đoạn có lượng vận chuyển nhỏ nhất. Trong ví dụ này là 50 tấn.

2. Vứt bỏ đoạn đường nào đó ứng với lượng vận chuyển nhỏ nhất vừa tìm ở trên, sửa đổi sơ đồ cung ứng cho phù hợp, sẽ được một sơ đồ mới không có "đối lưu". Trong ví dụ này, ta bỏ đoạn CH và được sơ đồ cung ứng mới như ở hình 18-6. Số liệu điều vận của phương án này như ở bảng 18-2 (đơn vị: tấn).

Bảng 18-2

Nơi xuất / Nơi nhập	A	C	E	G	Nhu cầu
B		50			50
D		200	150		350
F			50	150	200
H	50			150	200
Cung ứng	50	250	200	300	800

Dễ dàng tính được tổng khối lượng vận tải theo phương án này là:

$W = 50 \times 165 + 50 \times 118 + 200 \times 118 + 150 \times 317 +$

$50 \times 349 + 150 \times 252 + 150 \times 165 = 165300$ (tấn - km).

Như vậy, phương án điều vận này tiết kiệm hơn phương án ban đầu là:

171150 - 165300 = 5850 (tấn - km).

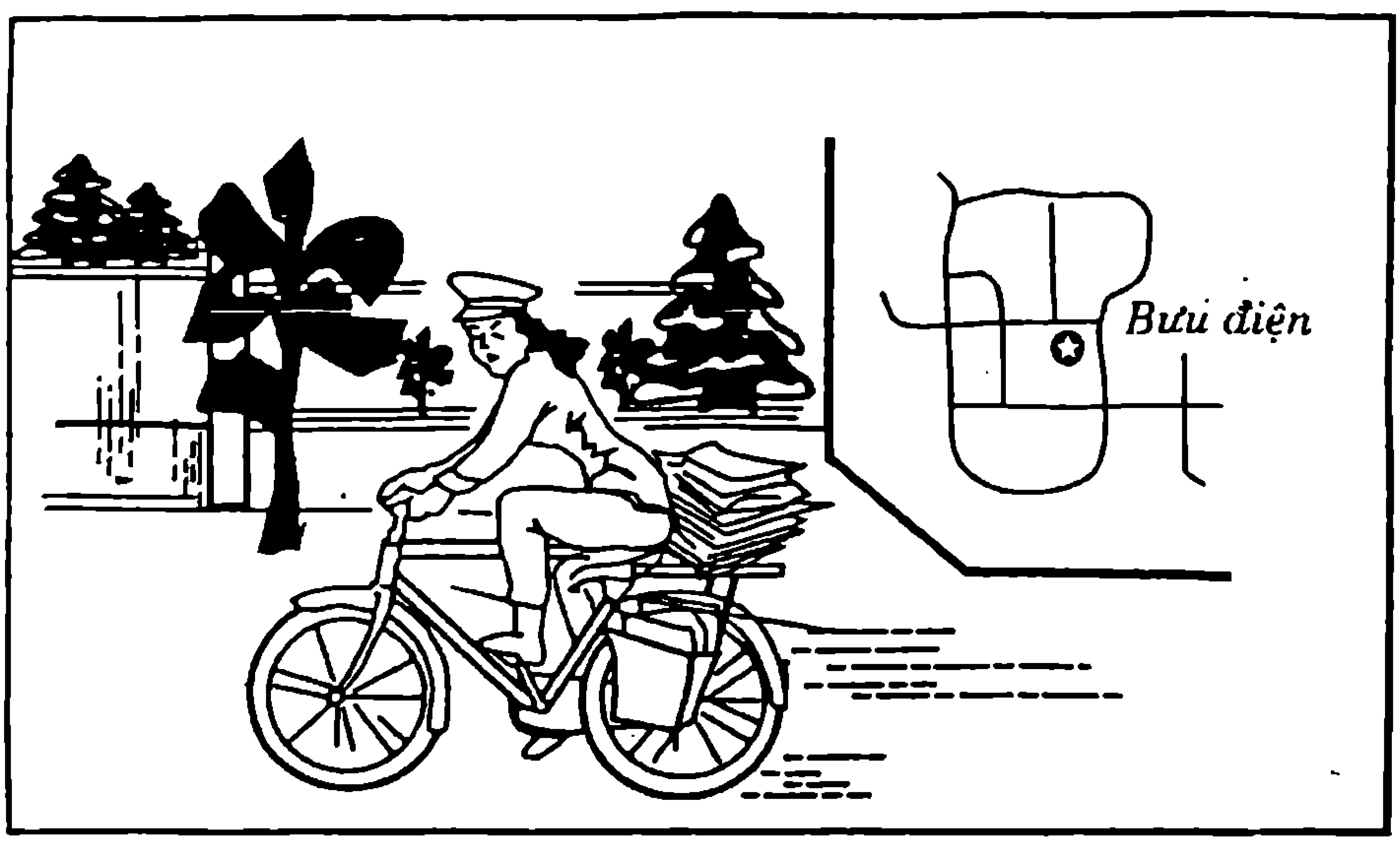
Nhưng liệu phương án điều vận này đã phải là phương án tối ưu chưa? Ta lại xét như trên nếu chưa phải là phương án điều vận tối ưu thì chúng ta lại dùng "phép co vòng" để điều chỉnh thành phương án tối ưu. Tuy vậy, phương án đã điều chỉnh ở trên là phương án tối ưu, bởi vì chúng ta đã dùng vận trù học để tính toán.

19. TÌM "ĐƯỜNG ĐƯA THƯ" NGẮN NHẤT

Trong mục 2: "Bài toán vẽ một nét" đã nói: Một mạng lưới liên thông muốn vẽ được một nét thì số lượng "đỉnh bậc lẻ" không được lớn hơn 2 và muốn vẽ một nét "trở về chỗ cũ" (thành mạng phản hồi kín) thì mạng lưới không được có "đỉnh bậc lẻ" (phải toàn là "đỉnh bậc chẵn").

Năm 1959, một số học giả ở Trường đại học Sơn Đông (Trung Quốc) đã gắn một cách khoa học phương pháp tác nghiệp trên sơ đồ điều vận vật tư nói ở mục 18 với nguyên lý "đỉnh bậc chẵn - lẻ" mà L.Euler đã phát hiện từ năm 1736, để vận dụng khéo léo vào việc tìm "Đường đưa thư" ngắn nhất.

Như ta đã biết, người bưu tá hàng ngày phải xuất phát từ trạm bưu điện, đi tới những nơi cần đưa thư, báo, ... trong khu vực phụ trách và cuối cùng lại trở về bưu điện. Người đó cần sắp xếp "Đường đưa thư" như thế nào cho ngắn nhất? Đây là một vấn đề khó.



Sau đây chúng ta hãy phân tích thực chất vấn đề "Đường đưa thư" ngắn nhất.

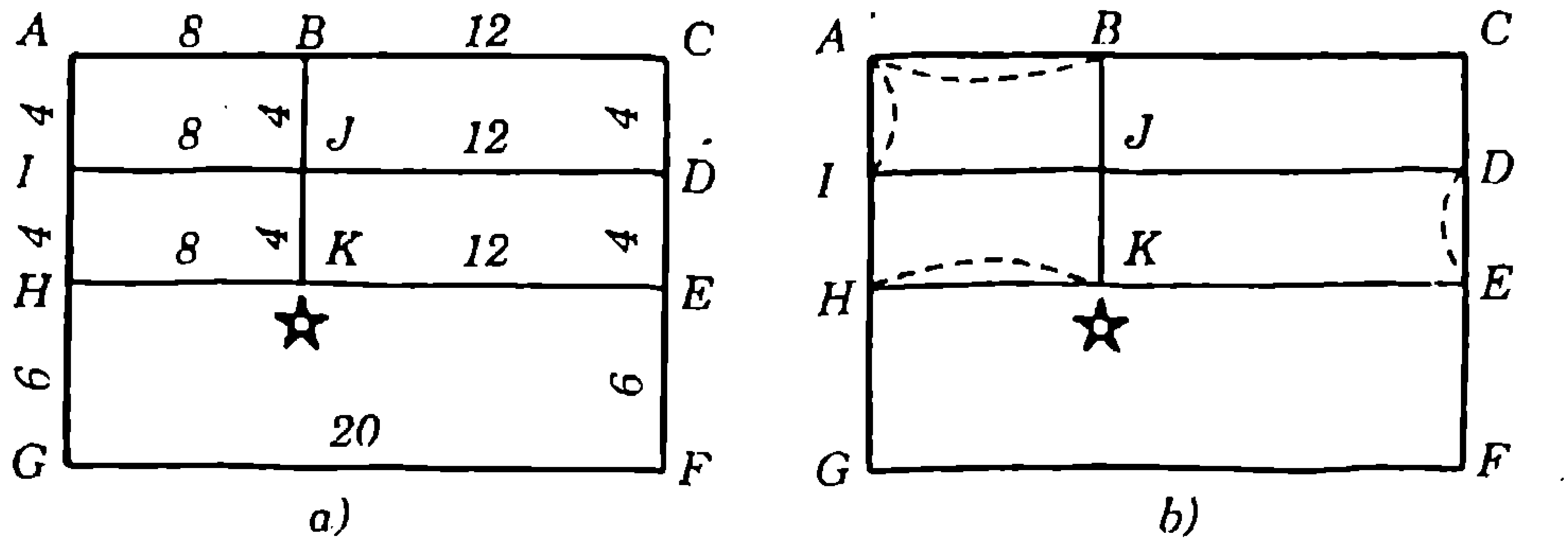
Rõ ràng là: "Đường đưa thư" phải ở trong mạng lưới liên thông. Do đó, đối với mỗi người bưu tá, "Đường đưa thư" mà người đó phụ trách, có thể coi là một "mạch phản hồi kín".

Nếu các đỉnh có trong mạng lưới nói ở trên đều là "đỉnh bậc chẵn" thì tất cả các đường trong mạng lưới này mới có thể trở thành một "mạch phản hồi kín" được. Lúc này việc tìm "Đường đưa thư" ngắn nhất thực chất là "Bài toán vẽ một nét đi và về" (trở về chỗ cũ), tức là người bưu tá xuất phát từ trạm bưu điện, sau khi làm xong nhiệm vụ, lại trở về bưu điện.

Nếu trong mạng lưới đưa thư, ngoài các "đỉnh bậc chẵn" còn có "đỉnh bậc lẻ" thì làm thế nào? Như ta đã biết ở mục 2: Số lượng "đỉnh bậc lẻ" trong một mạng lưới luôn luôn là chẵn (2n) và nếu số "đỉnh bậc lẻ" chỉ có 2 thì có thể vẽ được một nét nhưng phải xuất phát từ một "đỉnh bậc lẻ" và trở về "đỉnh bậc lẻ" kia, tức là không thể "trở về chỗ cũ" được. Ta lại còn biết: số "đỉnh bậc lẻ" là 2n thì không thể vẽ ít hơn n nét được.

Do vậy khi mạng lưới có "đỉnh bậc lẻ" thì ta dùng các đường cung để nối từng đôi "đỉnh bậc lẻ", làm cho mạng lưới sau khi thêm các đường cung trở thành mạng lưới không còn "đỉnh bậc lẻ". Như vậy mạng lưới mới trở thành "mạch phản hồi kín" và như trên đã nói, mạng lưới mới là "Đường đưa thư" ngắn nhất.

Hình 19-1 là một ví dụ đơn giản. Các con đường dọc - ngang của khu vực đưa thư biểu thị bằng mạng lưới ở hình 19-1a: "☆" là trạm bưu điện, các chữ số là đơn vị dài (chẳng hạn trên hình một đơn vị dài là 100m), các đường cung thêm vào là những đường nét đứt (hình 19 - 1b).



Hình 19-1

Sau khi thêm các đường cung ta được "đường đưa thư"

K(☆) → H → G → F → E → D → C → B → A → I → A

→ B → J → D → E → K → J → I → H → K (☆)

Ta dễ dàng tính được tổng chiều dài của "Đường đưa thư" này là:

8 + 6 + 20 + 6 + 4 + 4 + 12 + 8 + 4 + 4 + 8 + 4 + 12 +

4 + 12 + 4 + 8 + 4 + 8 = 140 (đơn vị dài).

Đối với một mạng lưới, phương pháp nối các "đỉnh bậc lẻ" bằng các đường cung là muôn màu muôn vẻ, mỗi phương pháp nối (thêm) đều cho một "Đường đưa thư" khả thi. Vấn đề là, tìm được "Đường đưa thư" nào mới là ngắn nhất (tối ưu)?

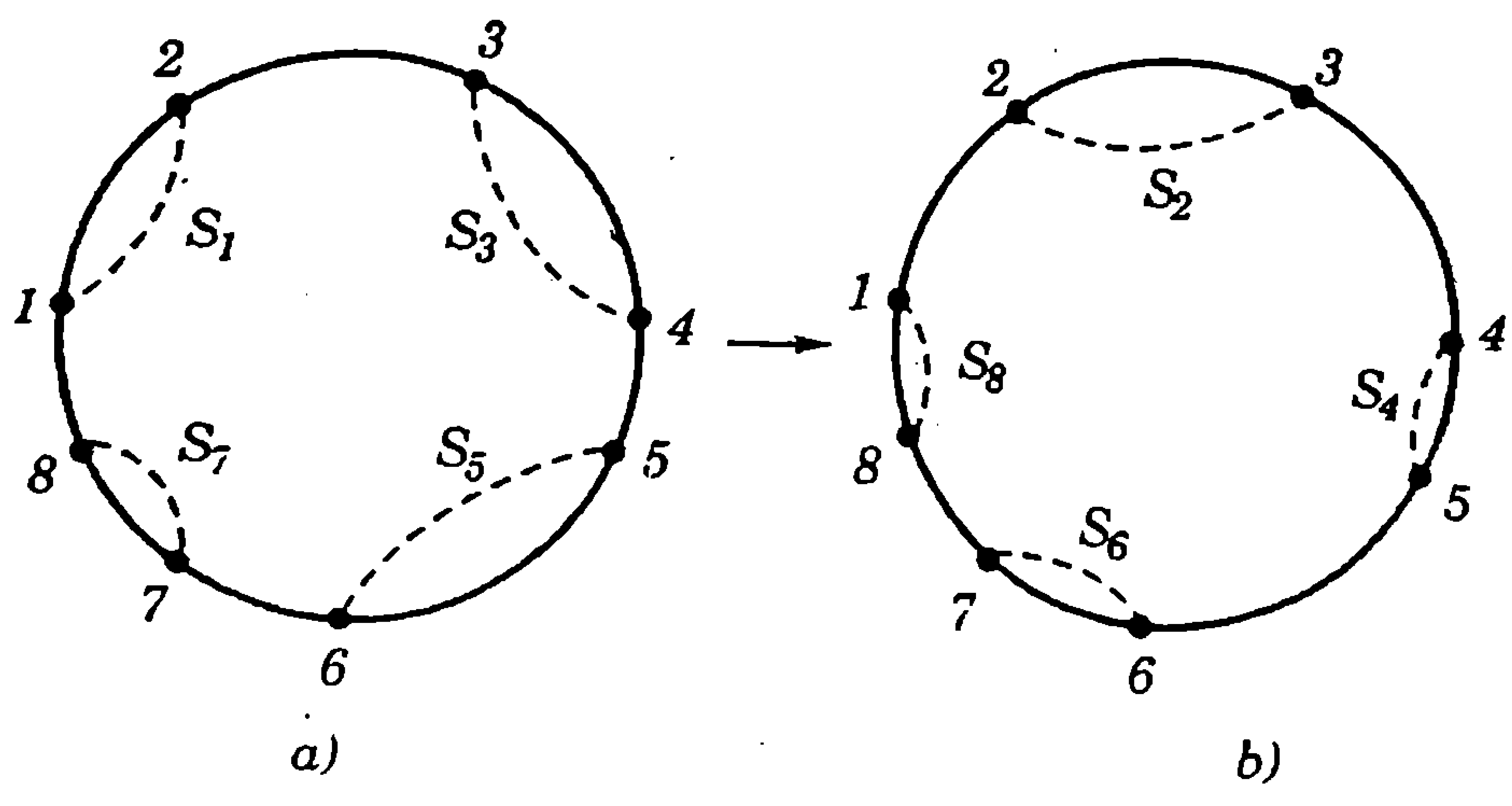
Đáp án hầu như dễ thấy rõ: các đường cung thêm vào càng ngắn càng tốt. Muốn đạt được điều này, hiển nhiên phải thực hiện được hai nguyên tắc sau đây:

1. Đường cung thêm vào không được trùng lặp.

2. Trên mỗi mạng lưới (sơ đồ) vòng khuyên, các đường cung thêm vào phải đảm bảo tổng chiều dài không được lớn hơn một nửa chiều dài vòng khuyên ấy.

Dùng hai nguyên tắc nêu trên mà phán đoán phương pháp thêm các đường cung trong ví dụ ở hình 19-1 thì sẽ phát hiện ra trong đó có chỗ không hợp lý. Tổng chiều dài các đường cung thêm vào trong vòng khuyên [ABKH] lớn hơn một nửa chiều dài vòng khuyên ấy.

Nếu tổng chiều dài các đường cung thêm vào lớn hơn một nửa chiều dài vòng khuyên ấy thì có một biện pháp điều chỉnh giản đơn dễ làm, để tổng chiều dài các đường cung thêm vào nhỏ hơn một nửa chiều dài vòng khuyên ấy. Biện pháp này chỉ cần xem ở hình 19-2 là rõ: bỏ các đường cung vừa thêm, như ở hình 19-2a chẳng hạn, rồi thêm các đường cung vào những đoạn đường lúc đầu không thêm, như hình 19-2b. Làm như vậy thì "tính chẵn - lẻ" của tất cả các đỉnh trong mạng lưới sẽ không thay đổi, nhưng lại làm cho tổng chiều dài các đường cung giảm.



Hình 19-2

Người ta đã chứng minh được rằng, nếu mạng lưới có 2n "đỉnh bậc lẻ" thì số đường cung thêm vào không thể ít hơn n và các đường cung này phải nối từng đôi "đỉnh bậc lẻ", mới tạo được tổng các đường cung ngắn nhất.

Bây giờ trở lại ví dụ ở hình 19-1. Sau khi điều chỉnh theo biện pháp vừa nêu, có thể thu được hình 19-3. Bởi vì mạng lưới này có 6 "đỉnh bậc lẻ" K, H, I, B, D và E (n = 3). Như vậy ta phải thêm vào ba đường cung DE, IH và BK (hoặc BJ và JK).

Lúc này ta được "đường đưa thư" ngắn nhất

K(☆) → J → K → H → G → F → E → D → C → B → A

→ I → H → I → J → B → J → D → E → K (☆)

Tổng chiều dài của "đường đưa thư" này dễ dàng tính được là:

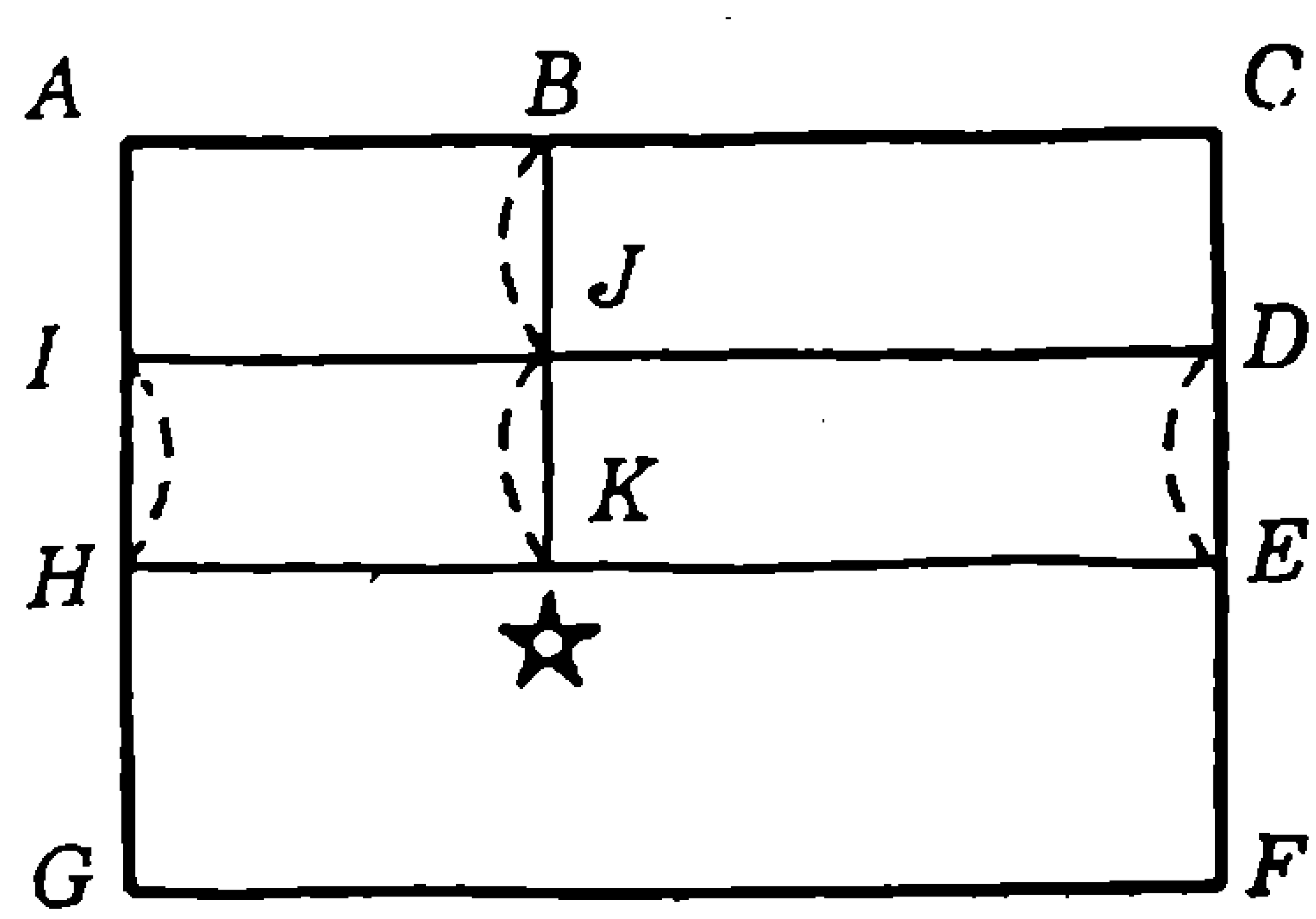
$4 + 4 + 8 + 6 + 20 + 6 + 4 + 4 + 12 + 8 + 4 +$

$4 + 4 + 8 + 4 + 4 + 12 + 4 + 12 = 132$ (đơn vị dài).

Như vậy "Đường đưa thư" này ít hơn "Đường đưa thư" ban đầu là:

$140 - 132 = 8$ (đơn vị dài).

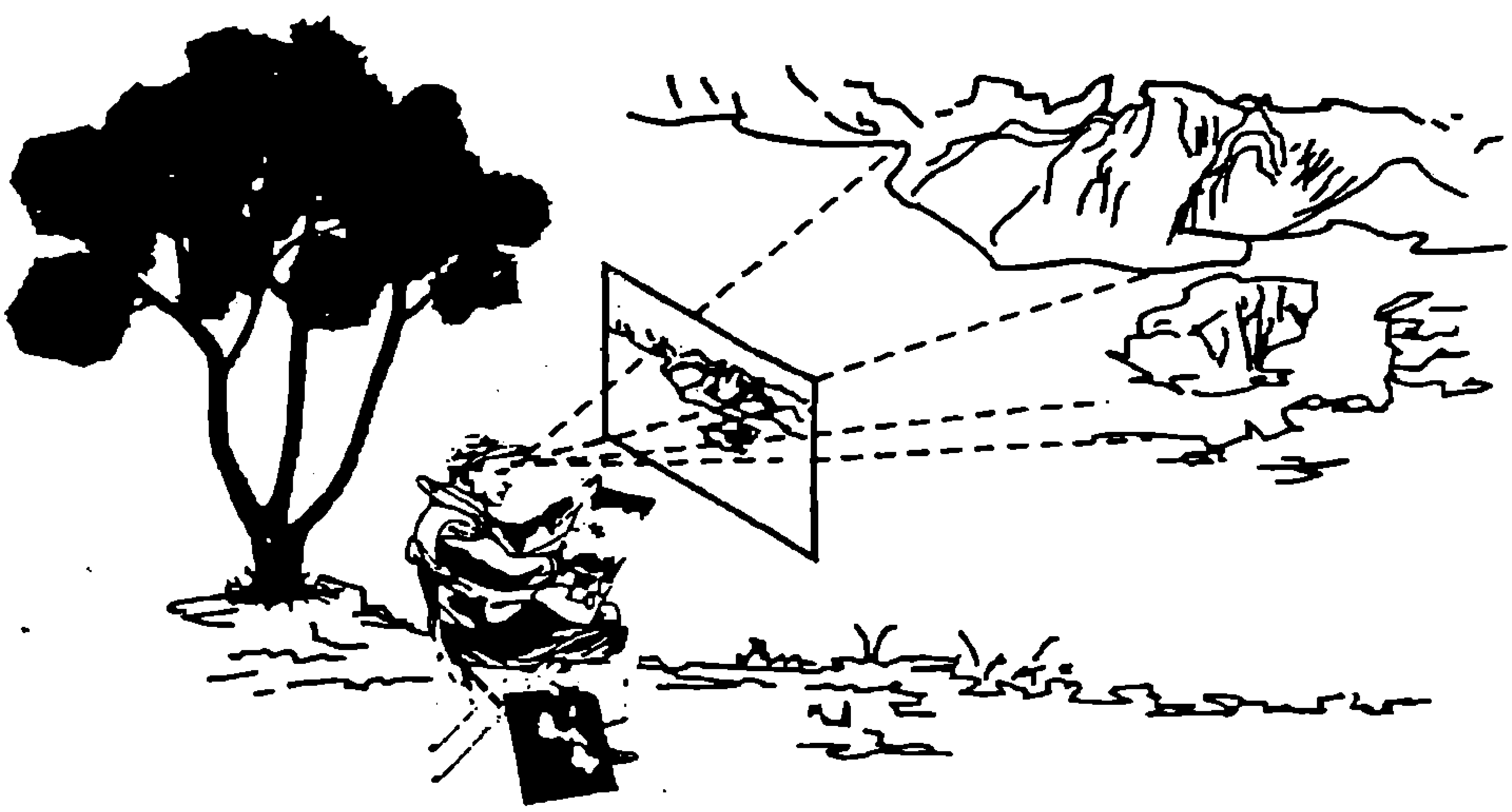
Dễ thấy "Đường đưa thư" mới này (hình 19-3) phù hợp với hai nguyên tắc đã nêu, do đó "Đường đưa thư" này là ngắn nhất (hợp lý nhất, tối ưu).



Hình 19-3

20. HÌNH HỌC XẠ ẢNH BẮT NGUỒN TỪ HỘI HOẠ

Hầu như tất cả hoạ sĩ đều có thể vận dụng một cách thành thạo nguyên lý phối cảnh để biểu diễn hình khối, bởi vì phối cảnh có thể giúp cho người vẽ quan sát chính xác, khoa học đối với hình thái của vật thể?



Nói từ góc độ hội hoạ, cái gọi là phối cảnh tức là nhìn vật thể qua một tấm kính phẳng dựng đứng giữa mắt người và vật thể. Lúc này ta có thể coi tấm kính phẳng là bản vẽ. Hình thu lại của vật thể nhìn thấy trên tấm kính phẳng chính là hình tượng mà ta cần trên bản vẽ.

Nhà thơ Đỗ Phủ (712 - 770) đời Đường (618 - 907), quê ở tỉnh Hồ Bắc, khi miêu tả quang cảnh xung quanh "Thảo đường" (nhà tranh), đã để lại một tuyệt cú thiên cổ:

"Lưỡng cá hoàng ly minh thuý liễu,

Nhất hàng bạch lộ thướng thanh thiên.

Song hàm Tây Lĩnh thiên thu tuyết,

Môn bạc Đông Ngô vạn lý thuyền".

Dịch ý là:

"Hai con hoàng ly hót trên cây liễu biếc,

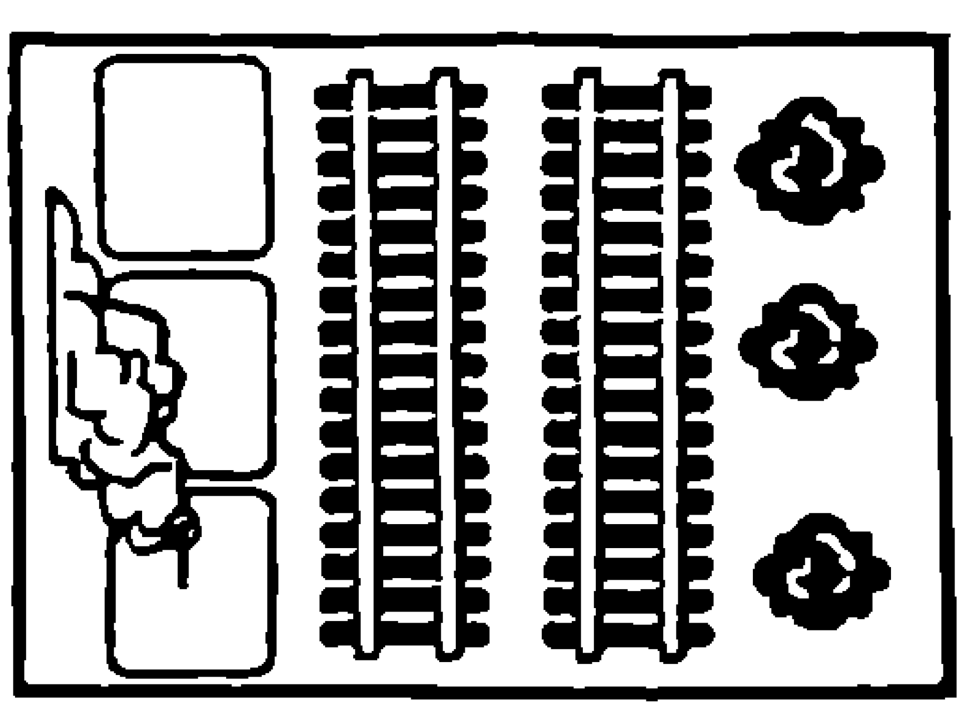
Một hàng cò trắng bay trên trời xanh.

Qua cửa sổ nhìn tuyết nghìn năm của ngọn Tây Côn Lĩnh,

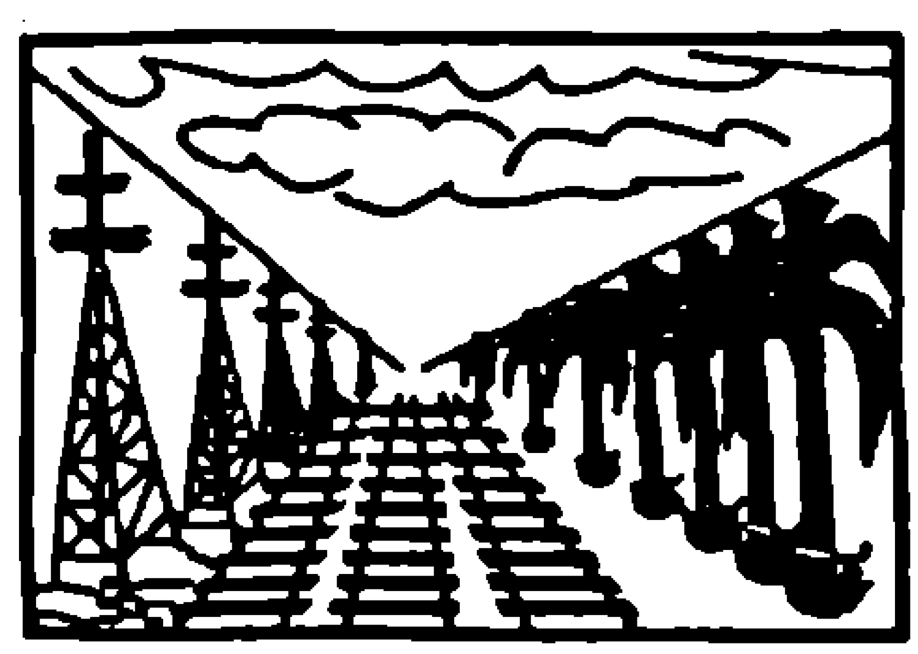
Qua cửa đi nhìn thuyền Đông Ngô đậu dài vạn dặm".

Thảo đường là nơi ông thường ngồi đọc sách.

Trong hội hoạ, một điểm trên bản vẽ hướng đúng vào mắt người vẽ gọi là tâm điểm và các đường thẳng vuông góc với mặt bản vẽ đều thu về tâm điểm. Hình 20-1a là bản vẽ mặt bằng (nhìn từ trên xuống). Trên bản vẽ này có ba đường ray tàu hoả song song, bên phải ba đường ray là một hàng cây. Hình 20-1b là bản vẽ phối cảnh của hình 20-1a khi người ta đứng ở điểm "X": hàng cây, đường ray và hàng cột điện vuông góc với mặt bản vẽ mà duỗi ra phía xa, đều giao nhau và hợp lại ở tâm điểm.



a)



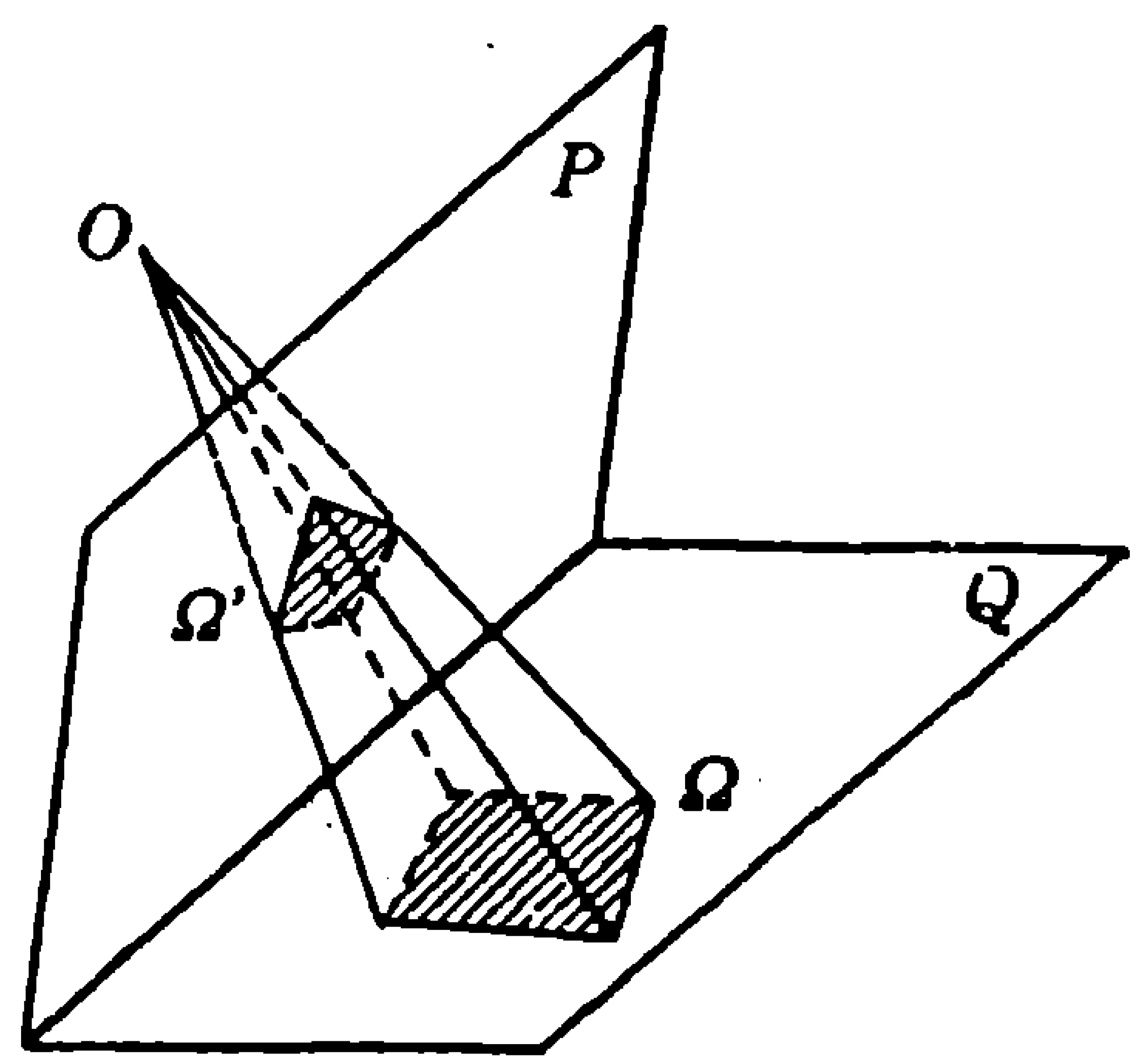
b)

Hình 20-1

Thời kỳ Văn hoá Phục Hưng ở châu Âu, cùng với thành tựu của phép phối cảnh, giao hoà ánh sáng, với sự vẻ vang của lịch sử hội hoạ, rất nhiều hoạ sĩ nổi tiếng xuất hiện, chẳng hạn Leonardo de Vinci (15/4/1452 - 2/5/1519) người Italia, bằng những kỹ xảo và tài năng phi phàm, đã có được những cống hiến tuyệt vời cho sự nghiên cứu phép phối cảnh. Thành quả của họ ảnh hưởng rất nhanh tới hình học và thai nghén một nhánh hình học mới: hình học xạ ảnh (hình học hình chiếu).

L.de Vinci

Cái gọi là hình học xạ ảnh là chỉ chùm tia sáng toả chiếu xuất phát từ trung tâm O làm cho hình vẽ Ω trên mặt phẳng Q thu được ảnh cắt Ω' trên mặt phẳng P (hình 20-2). Vậy Ω' gọi là hình chiếu trên mặt phẳng P của Ω từ trung tâm O. Hình học xạ ảnh chính là môn học nghiên cứu tính chất bất biến trong phép chiếu nói trên. Rõ ràng nó vừa không giống với hình học Euclid mà



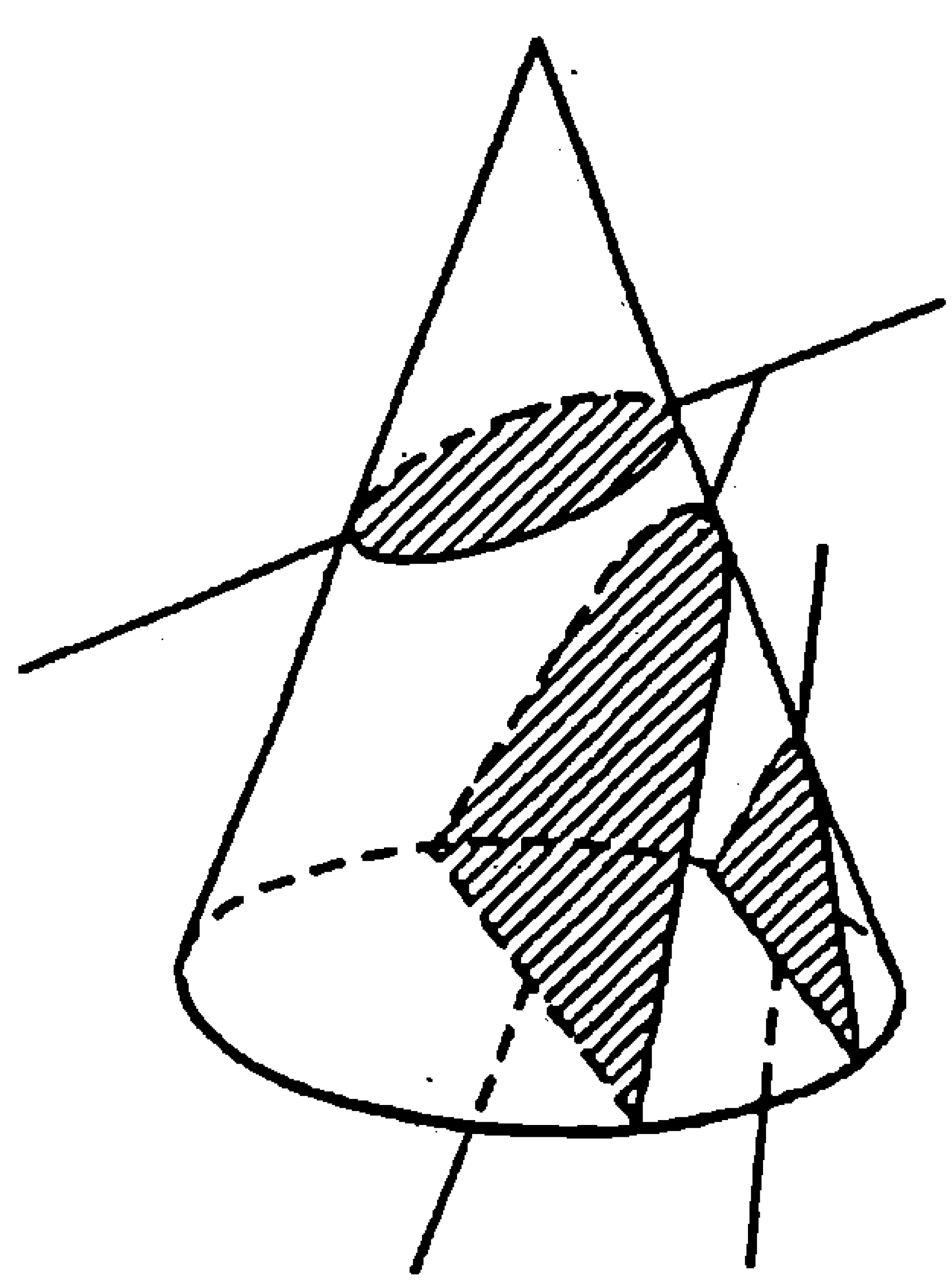
Hình 20-2

học sinh trung học đang học, cũng không giống với hình học trên màng cao su đã giới thiệu ở các mục trước.

Đặt nền móng cho sự ra đời của hình học xạ ảnh là hai nhà toán học người Pháp: Gérard Desargues (2/3/1591 - 10/1661) và Blaise Pascal (19/6/1623 - 19/8/1662).

B. Pascal

Năm 1636, G.Desargues đã công bố cuốn sách: "Phương pháp chung biểu diễn vật thể bằng phép phối cảnh". Trong cuốn sách này tác giả lần đầu tiên đã đưa ra khái niệm "thước đo chiều cao, chiều rộng và chiều sâu", từ đó gắn lý thuyết hội hoạ với khoa học nghiêm túc. Điều không thể tưởng tượng được là đối với tiến bộ khoa học này, khi đó lại bị sự công kích từ nhiều phía, làm cho G.Desargues nổi giận. Ông tuyên bố công khai rằng: Hễ ai tìm thấy sai sót trong phương pháp của ông, nhất loạt ông sẽ thưởng 100 đồng tiền Tây Ban Nha, ai có thể nêu ra phương pháp tốt hơn, bản thân ông bằng lòng chi 1000 franc. Đây quả là một loại chế nhạo đối với lịch sử!



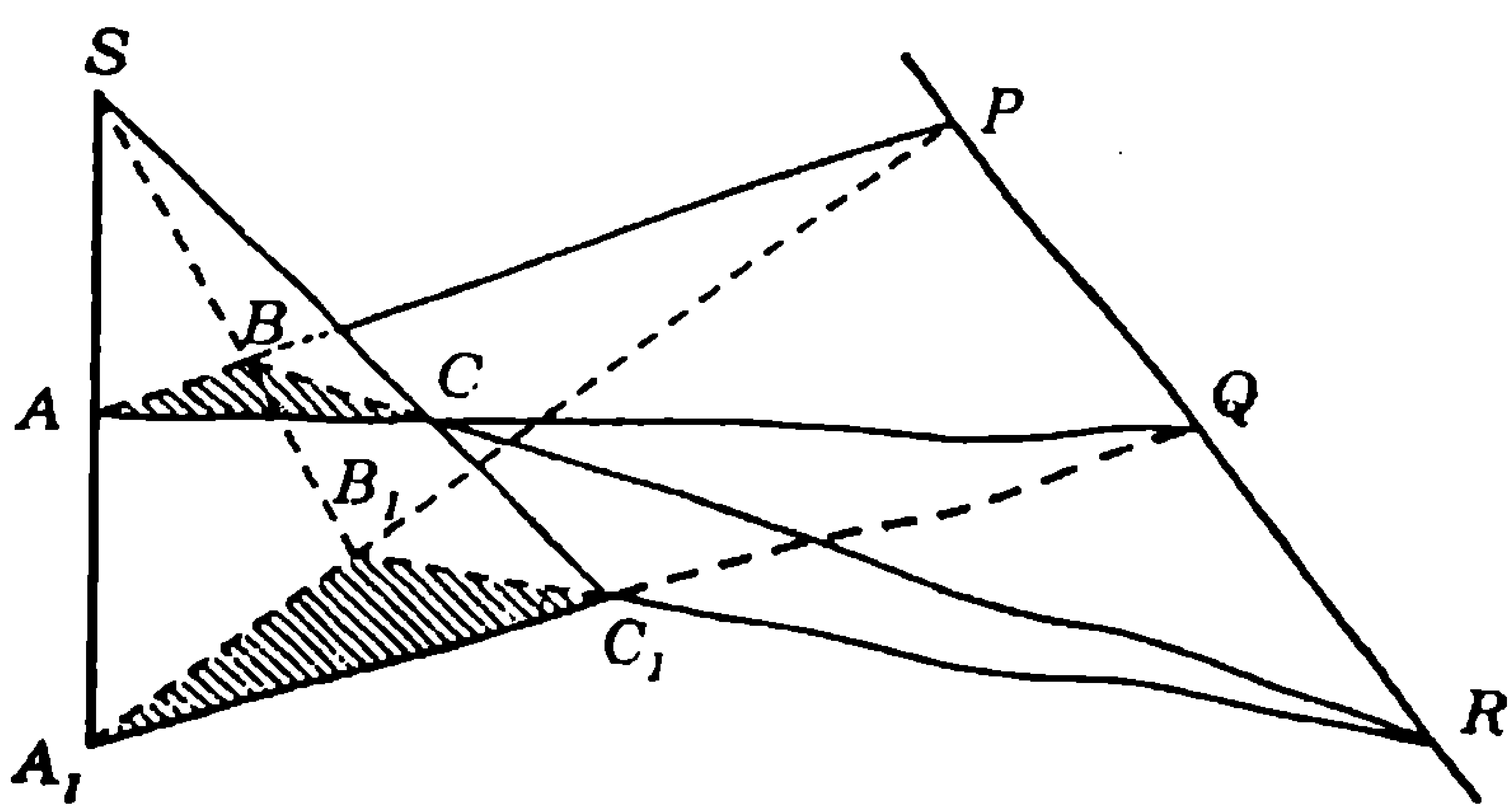
Hình 20-3

Năm 1639, G.Desargues nghiên cứu thiết diện phẳng của mặt nón (thiết diện nón, thiết diện conic) (hình 20-3), đã có đột phá mới. Ông trình bày ba loại đường cong bậc hai đều có thể do mặt phẳng cắt hình nón mà có, từ đó có thể coi ba loại đường cong đều là hình vẽ phối cảnh của đường tròn. Điều này khiến cho những nghiên cứu về thiết diện nón có một hình thức đặc biệt gọn.

Có điều là, các tác phẩm nói trên của G.Desargues sau này lại không may bị thất truyền, mãi tới hơn hai trăm năm sau, vào một ngày của năm 1845, nhà toán học Michel Chasles (15/11/1793 - 18/12/1880) người Pháp, do một sự ngẫu nhiên, ở một quán sách cũ tại Paris, đã kinh ngạc phát hiện bản sao gốc của G.Desargues, từ đó làm cho các thành quả bị mai một của G.Desargues, được toả sáng trở lại.

G.Desargues sở dĩ được lưu danh lịch sử, còn do định lý sau đây:

"Nếu các cạnh tương ứng của các hình ba đỉnh A, B, C và A1, B1, C1 giao nhau tại ba điểm P, Q, R nằm trên một đường thẳng thì ba đường thẳng nối ba đỉnh tương ứng đi qua một điểm S" (hình 20-4). Người ta gọi đây là "Định lý Desargues thứ nhất".



Hình 20-4

Điều thú vị là: nếu sửa "đỉnh" trong "Định lý Desargues thứ nhất" thành "đường thẳng" và sửa "đường thẳng" thành "đỉnh" thì định lý thu được vẫn đúng:

"Nếu ba đường thẳng nối ba đỉnh tương ứng của các hình ba đỉnh A, B, C và A1, B1, C1 đi qua một điểm S thì ba cạnh tương ứng của các hình ba đỉnh đó giao nhau tại ba điểm P, Q, R nằm trên cùng một đường thẳng" (hình 20-4).

Định lý Desargues đúng đối với các hình có ba đỉnh nằm trên cùng một mặt phẳng, cũng như đối với các hình ba đỉnh nằm trên các mặt phẳng khác nhau. Các hình ba đỉnh nêu trong "Định lý Desargues" được gọi là các hình tam giác, vì vậy "Định lý Desargues" thường được gọi là "Định lý Desargues về các hình tam giác".

Trong hình học xạ ảnh, hiện tượng nói ở trên có tính phổ biến. Nói chung, chuyển các từ ngữ trong các mệnh đề đã biết hoặc trong xây dựng bản vẽ theo "từ điển" sau đây:

• Điểm	• Đường thẳng
• Ở trên...	• Đi qua...
• Đường thẳng nối liền hai điểm	• Giao điểm của hai đường thẳng
• Điểm chung	• Đường thẳng
• Hình bốn đỉnh	• Hình bốn cạnh
• Tiếp tuyến	• Tiếp điểm

thì sẽ được một mệnh đề "đối ngẫu" (đối nhau). Hai mệnh đề "đối ngẫu" với nhau thì hoặc là cùng đúng hoặc là cùng sai. Đây chính là "Nguyên lý đối ngẫu" có một không hai trong hình học xạ ảnh.

Chắc bạn đọc còn nhớ câu chuyện về Sofia Vaxilevna Covalevxkaia (15/1/1850 - 10/2/1891) nhà toán học nữ xuất sắc người Nga đã kể ở cuốn "Những câu chuyện lý thú về logic". Ở đó bạn đọc đã thấy được phần nào về sự cản trở của người cha trên con đường mà bà tìm đến với toán học. Rồi cũng trong tập sách đó đã kể câu chuyện về người cha vô tình vì thương con, không muốn con đi theo vết xe tuyệt vọng của mình, mà cản trở con say mê nghiên cứu toán học. Đó là câu chuyện về nhà toán học Janos Bolyai (15/12/1802 - 27/1/1860) người Hunggari, đã sáng lập ra hình học phi Euclide (hình học hypecbolic).

X.V. Covalevxkaia

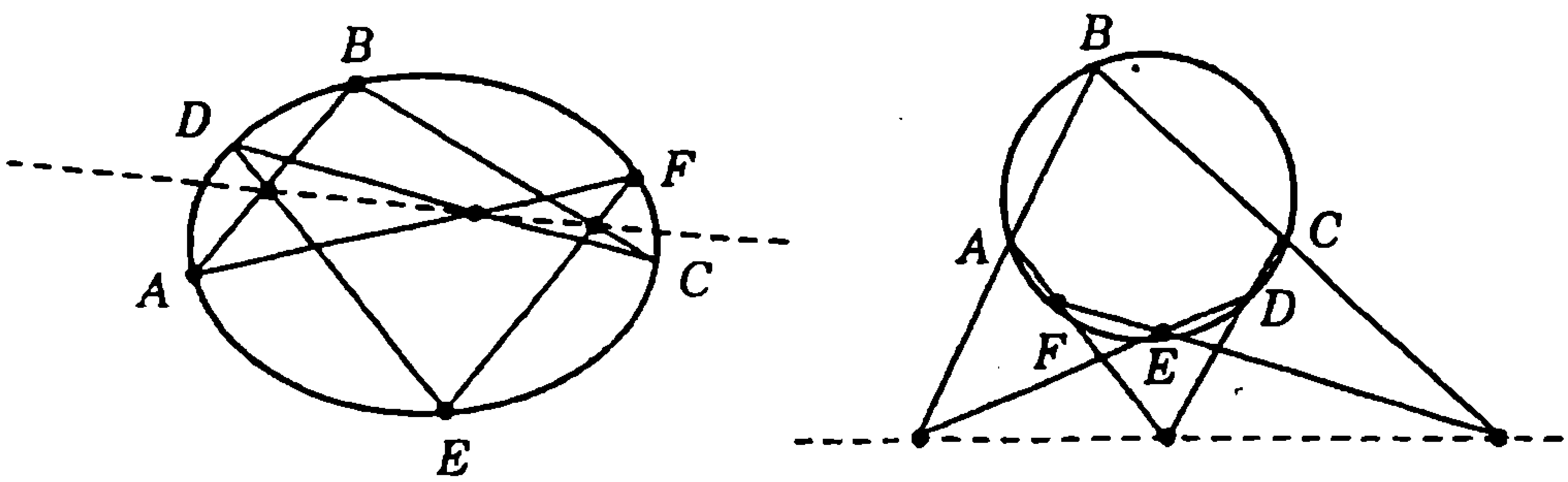
Các câu chuyện như vậy rất nhiều, chứng tỏ con đường đến với khoa học nói chung và toán học nói riêng cũng lắm trắc trở. Thế nhưng hầu hết các nhà khoa học thời còn trẻ đều vượt qua được để tiếp tục đi theo con đường mà mình đã say mê. Sau đây là câu chuyện về nhà toán học "thần đồng" B. Pascal:

Cha của B.Pascal cũng là một nhà toán học nhưng không biết nguyên nhân tại sao mà lại cực lực phản đối B.Pascal học toán, thậm chí thu hết sách toán học. Nào ngờ, tất cả những cái đó lại càng làm cho B.Pascal say sưa suy nghĩ về những điều thần bí của toán học. Bởi vậy, lúc còn nhỏ ông đã tự mình chứng minh lại được nhiều định lý trong hình học phẳng, chẳng hạn: "Tổng ba góc trong của tam giác bằng 180°".

Thiên tài toán học của B.Pascal đã làm cho người cha cảm động ứa nước mắt và từ đó ông đã đổi thái độ: chẳng những bỏ cấm đoán, mà còn đưa con đi dự hội thảo do M.Mersenne[1] - người sáng lập Viện Hàn lâm khoa học Pháp - chủ trì. Khi đó B.Pascal mới 14 tuổi.

Năm 1639, B.Pascal đã phát hiện định lý sau đây khiến tên ông lưu danh lịch sử:

"Nếu A, B, C, D, E và F là 6 điểm bất kỳ trên đường bao của một thiết diện nón thì ba giao điểm của AB và DE, BC và EF, CD và FA cùng nằm trên một đường thẳng" (hình 20-5).



Hình 20-5

Định lý này là tuyệt diệu, nó tỏ rõ một thiết diện nón chỉ cần năm điểm là có thể xác định được, điểm thứ sáu có thể tìm được nhờ điều kiện cộng tuyến (cùng nằm trên một đường thẳng). Suy luận từ định lý này người ta đã tìm được hơn 400 hệ quả, ngang với một bộ sách lớn.

[1] Marin Mersenne (8/9/1588 - 1/9/1648) người Pháp.

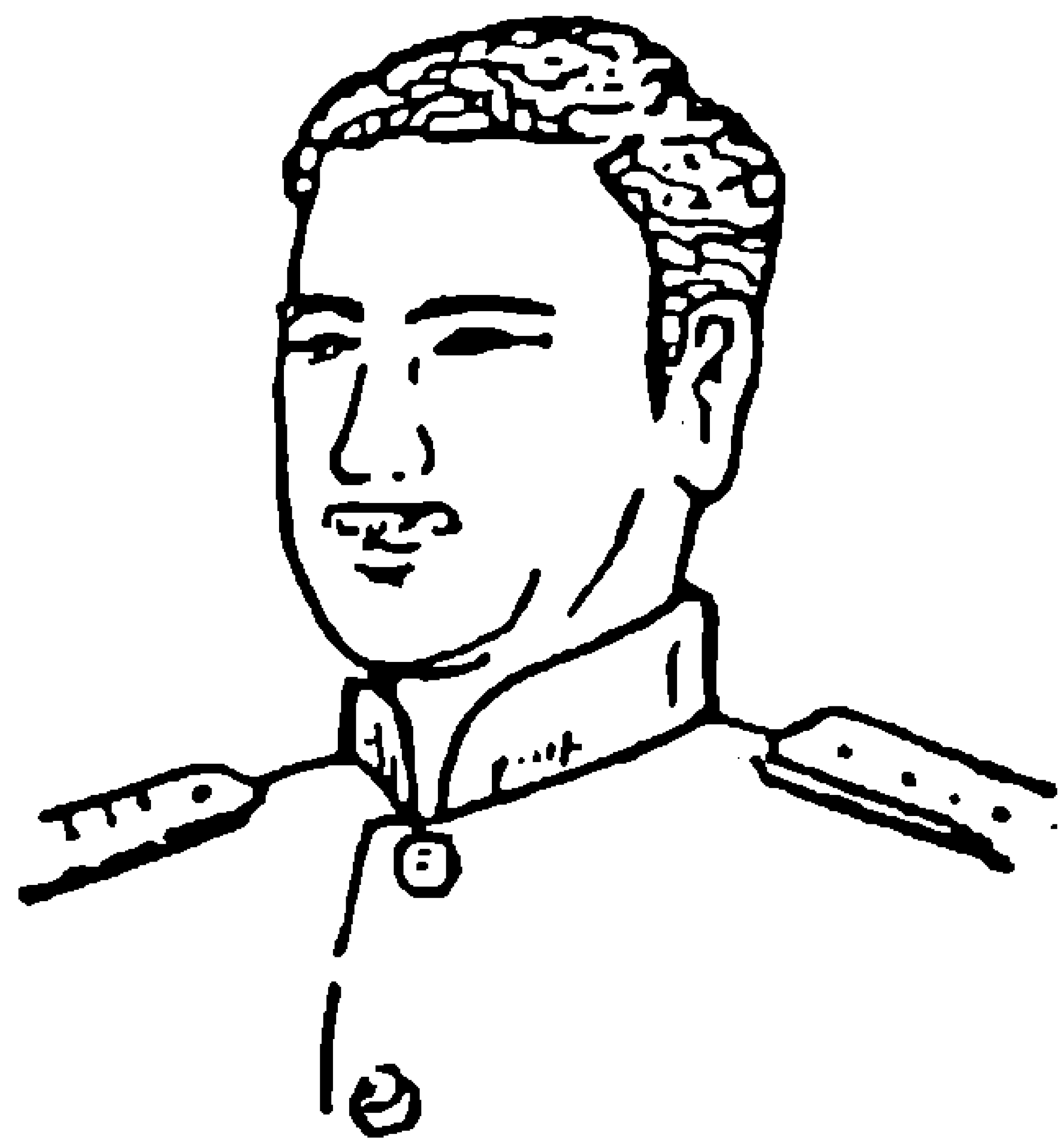
Nào ngờ, thành quả huy hoàng này lại gây nên sự hoài nghi của một số người, trong đó có R.Descartes. R.Descartes không tin rằng đây lại là suy nghĩ của một cậu bé 16 tuổi, mà cho rằng, đây là công sức của người cha cậu. Có điều là thành quả của B.Pascal về sau càng nhiều: 19 tuổi phát minh ra máy tính số học đầu tiên (về sau người ta thường gọi là máy tính cơ điện), 23 tuổi phát minh ra định luật cường độ nén của chất lỏng, 31 tuổi (cùng với Pierre de Fermat (17/8/1601 - 12/1/1665) người Pháp) sáng lập ra lý thuyết xác suất, 35 tuổi thu được thành quả to lớn trong nghiên cứu đường hyperbol, ... Với hàng loạt thành tựu liên tục này, ông đã khuất phục được tất cả những người hoài nghi. Đến lúc này không ai không đồng thanh ca ngợi con người thiên tài này của đất nước Pháp.

P. de Fermat

Điều bất hạnh là từ khi hai nhà toán học dẫn đường của môn hình học xạ ảnh lần lượt qua đời (vào năm 1661 và năm 1662) thì sau đó việc nghiên cứu môn hình học này không được người ta chú trọng, vì thế nó đã lắng đi khoảng một thế kỷ rưỡi, mãi đến khi xuất hiện nhà toán học J.V.Poncelet người Pháp.

21. NHÀ HÌNH HỌC THẦN KỲ J.V.PONCELET

Như đã nói ở mục 20, ở nước Pháp - quê hương của hình học xạ ảnh, sau khi hai nhà toán học G.Desargues và B.Pascal đặt nền móng cho môn hình học này qua đời thì việc nghiên cứu hình học xạ ảnh đã lắng đi khoảng một thế kỷ rưỡi, mãi đến khi xuất hiện nhà hình học thần kỳ J.V.Poncelet.



J.V. Poncelet

Jean Victor Poncelit (1/7/1788 - 22/12/1867) cũng người Pháp. Năm 22 tuổi ông tốt nghiệp Học viện Công trình quân sự ở Paris. Ông cũng đã từng theo học nhà toán học nổi tiếng, người đặt nền móng cho môn hình học hoạ hình Gaspard Monge (10/5/1753 - 28/7/1818) người Pháp và nhà toán học L.N. M.Carnot (13/5/1752 - 2/8/1823) người Pháp. J.V.Poncelet sau khi tốt nghiệp đại học đã đầu quân vào đội quân của Bonaparte Napoleon (1769 - 1821) làm trung uý công binh.

G.Monge

Năm 1812, B.Napoleon tung

hoành ở chiến trận và choáng ngợp trong hàng loạt chiến thắng. Để thực hiện mộng bá chủ châu Âu ấp ủ bấy lâu, B. Napoleon đã đi một nước cờ mạo hiểm, quyết định tự dẫn 60 vạn quân đánh Moskva. Không ngờ Sa hoàng Alexander I đã dùng lại thống soái M.I.Kutuzov (1745 - 1813) "đa mưu túc kế" làm tổng tư lệnh, tránh mũi nhọn tiến quân của B.Napoleon, dụ chúng vào Moskva với "vườn không nhà trống". Quân Pháp sau đó giữ thành Moskva rất vất vả, đói rét đoạ đày, lại bị quân của M.I.Kutuzov chặn đường rút lui về phía Tây, cuối cùng quân của B.Napoleon rơi vào tuyệt vọng.

J.V.Poncelet lúc đó phục vụ ở Quân đoàn Nay của quân viễn chinh Pháp. Khi B.Napoleon quyết định rút khỏi Moskva về phía Tây, quân của M.I. Kutuzov đã phục kích chặn đánh khiến quân Pháp gần như bị tiêu diệt hoàn toàn. Ngày 18/12/1812, Quân đoàn Nay bị xoá sổ. Máu của quân Pháp chảy thành sông, thây chất đầy đồng. J.V.Poncelet bị trọng thương, ngất xỉu trong đám thây quân Pháp.

Khi quân Nga thu dọn chiến trường, phát hiện viên quan Pháp còn thoi thóp, đã đưa về hậu phương cứu chữa, đó chính là J.V.Poncelet.

Tháng 3/1813, J.V.Poncelet bị giam vào Ngục Xaratov bên bờ sông Volga. Tháng đầu tiên ông đối mặt với song sắt nhà tù, sức khoẻ ông kiệt quệ, tinh thần bi quan. Khi mùa xuân đến, ánh dương tươi đẹp lọt qua song sắt vào phòng giam, để lại bên bóng song sắt hiện rõ trên nền phòng giam. Tất cả những cái đó đột nhiên dẫn dắt sự liên tưởng của J.V.Poncelet. "Hình học hoạ hình" của thầy G.Monge và "hình học vị trí" của thầy L.N.M.Carnot ngày xưa hiện dần lên trong đầu ông. J.V.Poncelet phát hiện ra rằng: việc nhớ lại và nghiên cứu những kiến thức đã học trước đây, chính là chỗ gửi gắm tinh thần tốt nhất trong lúc thất vọng này.

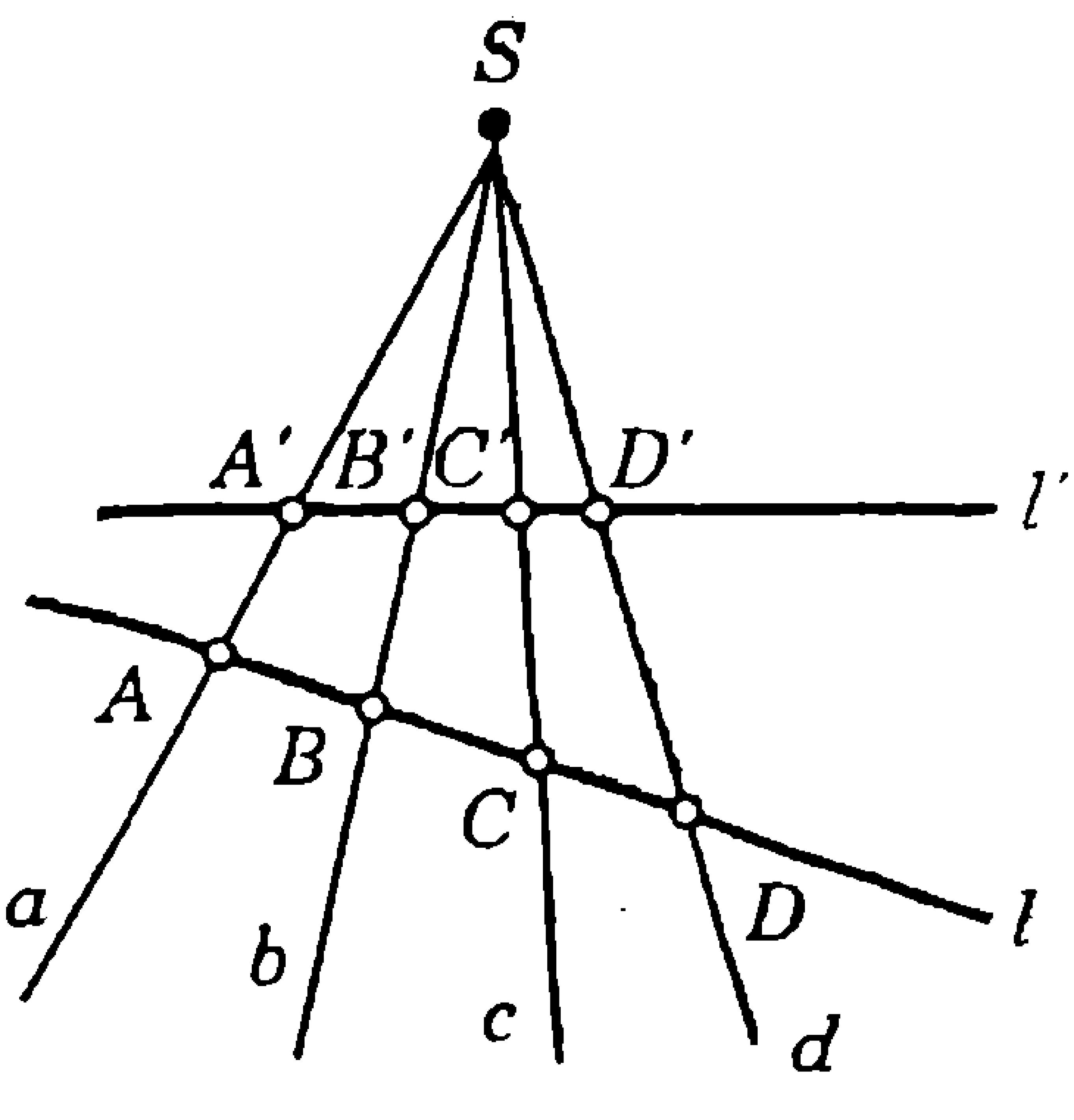
Từ đó J.V.Poncelet tinh thần phấn chấn, người ta thấy ông tận dụng mọi thời gian có thể để ôn lại các kiến thức toán đã học, hoặc chuyên tâm suy nghĩ những vấn đề quanh quẩn trong đầu: hình vẽ có những tính chất nào không thay đổi qua phép phối cảnh thay đổi? Thời đó điều kiện sống trong ngục tù rất kém, không có bút, cũng không có giấy, càng không thể nói đến sách. Song tất cả những cái đó không làm cho J.V.Poncelet nhụt chí. Ông đã lấy than củi làm bút, tường ngục tù làm bảng để tính toán và vẽ sơ đồ, còn tìm giấy bỏ khắp nơi để viết. Cứ như vậy, trải qua hơn 400 ngày đêm, cuối cùng ông đã viết xong bảy cuốn ghi chép nghiên cứu lớn. Chính bằng những trang chữ ghi chép viết ngoáy này ông đã để lại những thành quả sáng chói của một nhánh toán học mới: hình học xạ ảnh.

Tháng 6-1814, J.V.Poncelet được thả. Tháng 9 năm đó, ông về đến Pháp. Sau khi về nước, tuy được thăng cấp lên thượng uý nhưng ông vẫn cần mẫn, không mệt mỏi theo đuổi lý thuyết hình học xạ ảnh. Trên cơ sở bảy cuốn ghi chép nguệch ngoạc trong tù và sau đó là tám năm chỉnh lý, vào năm 1822, ông đã hoàn thành bộ sách lớn với lý thuyết chặt chẽ, cấu tứ mới mẻ: "Bàn về tính chất xạ ảnh của hình vẽ". Sự ra đời của bộ sách này đánh dấu sự ra đời chính thức của hình học xạ ảnh và được coi là một môn học.

Sau đây chúng ta hãy xem xét và thưởng thức một chút cái nền tảng mà J.V.Poncelet đã đưa vào để tạo nên toà nhà hình học xạ ảnh:

J.V.Poncelet bắt đầu nghiên cứu hình học xạ ảnh từ khái niệm "tỷ số kép" (giao tỷ) của bốn điểm (đường thẳng). Tỷ số kép là một khái niệm cơ bản của hình học xạ ảnh.

Trong hình 21-1, S là trung tâm, bốn tia a, b, c và d xuất phát từ S sẽ hợp thành một chùm đường thẳng S (abcd) cố định.



Hình 21-1

Một đường thẳng l lần lượt cắt chùm đường thẳng S ở bốn điểm A, B, C và D. Ông đã định nghĩa tỷ số kép γ:

$$\gamma = (ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} \tag{21-1}$$

Đối với chùm đường thẳng S(abcd) thì γ là một đại lượng không đổi, tức là nếu một đường thẳng l' lần lượt cắt chùm đường thẳng đó ở A', B', C' và D' thì

$$\gamma\,(A'B'C'D') = \gamma\,(ABCD) \tag{21-2}$$

Thực vậy, dựa vào định lý sin ta có:

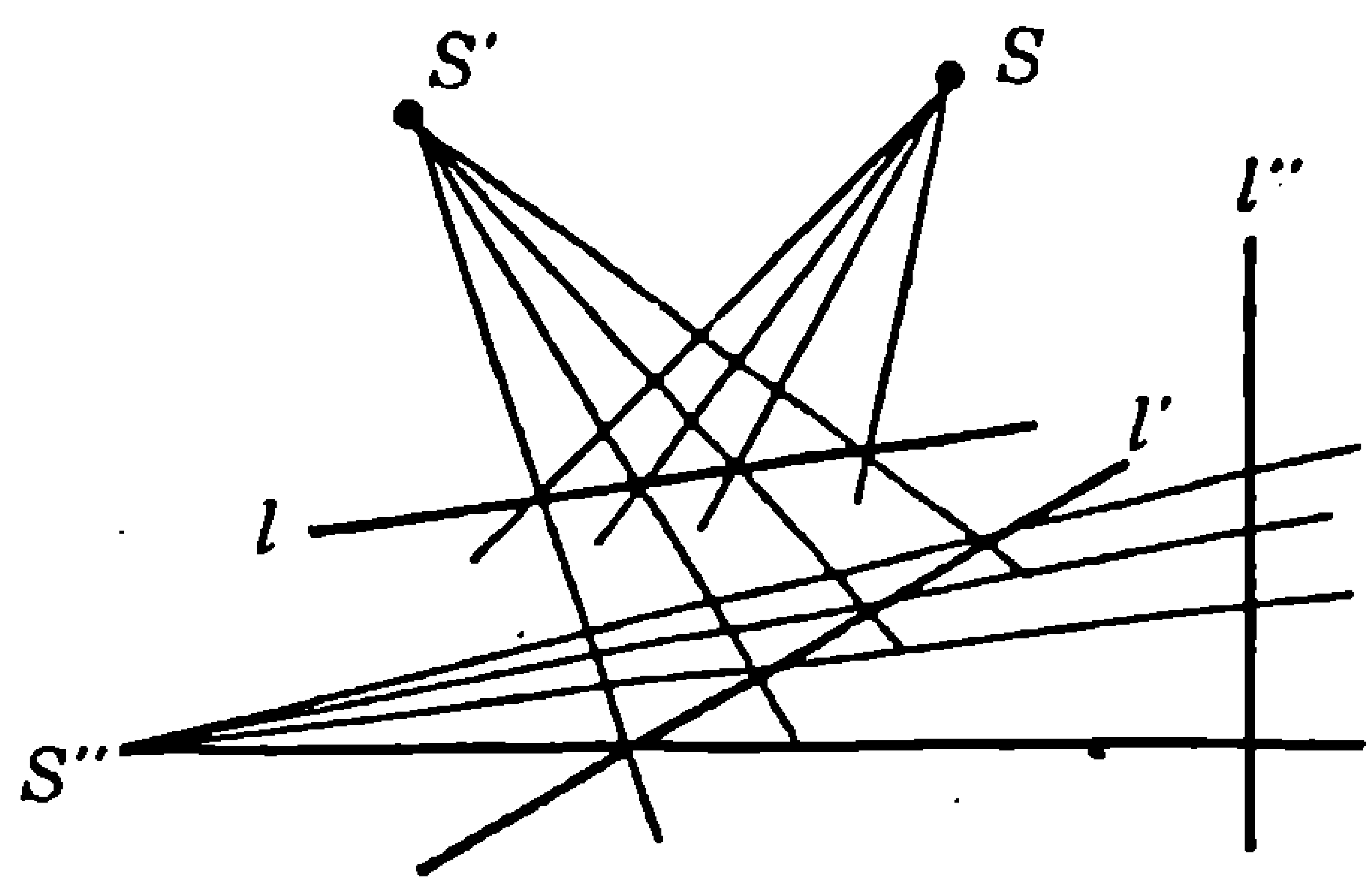
$$\frac{AC}{BC} = \frac{SC.\dfrac{\sin(a,c)}{\sin(a,l)}}{SC.\dfrac{\sin(b,c)}{\sin(b,l)}} = \frac{\sin(a,c)\sin(b,l)}{\sin(b,c)\sin(a,l)} \tag{21-3}$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(a,d)\sin(b,l)}{\sin(b,d)\sin(a,l)} \tag{21-4}$$

Từ (21-4), (21-3) và (21-1), ta có:

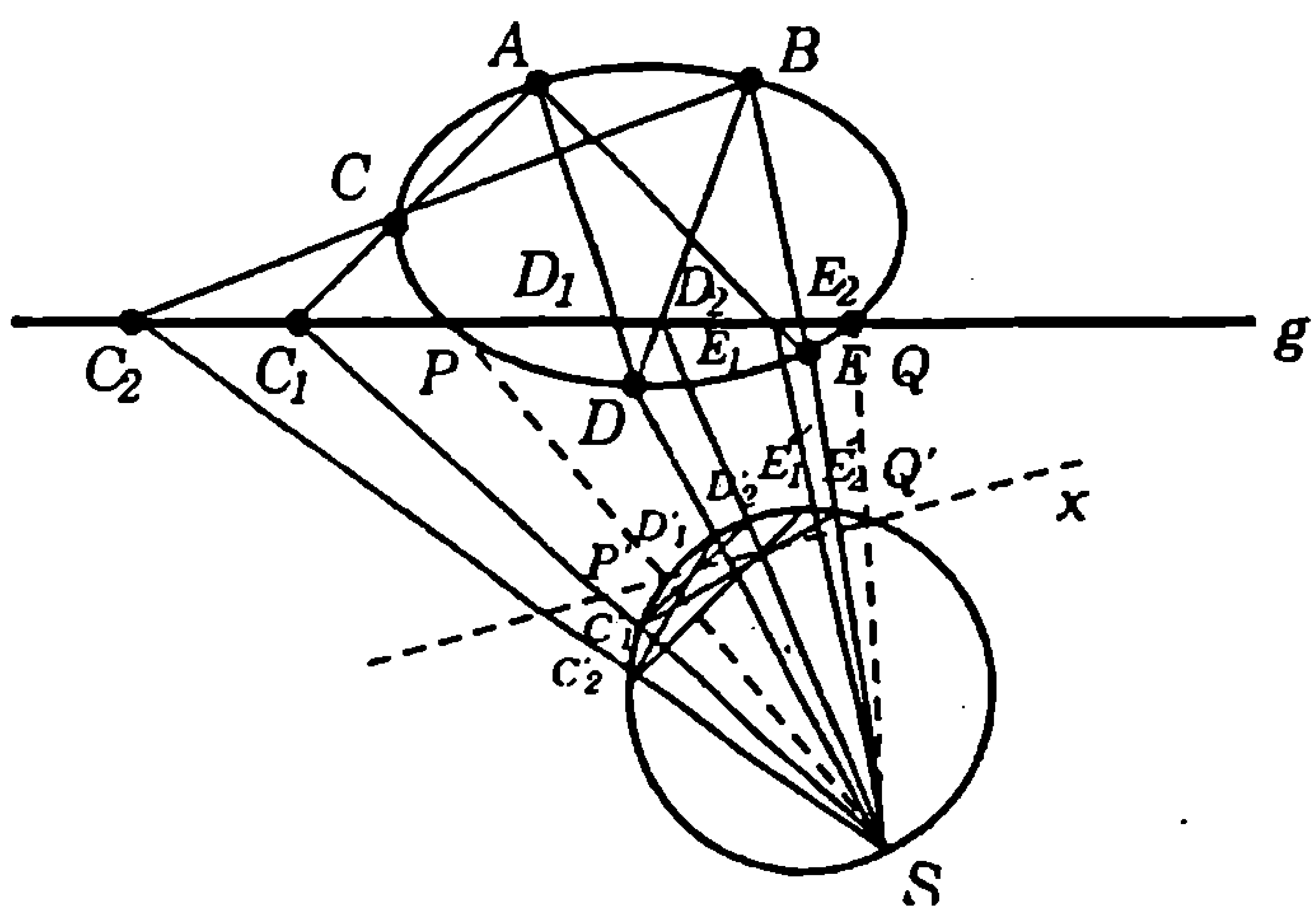
$$\gamma(ABCD)=\frac{\sin(a,c)\sin(b,d)}{\sin(b,c)\sin(a,d)} \qquad (21\text{-}5)$$

Từ (21-5) ta thấy γ là một đại lượng không liên quan tới cách lấy đường cắt l, tức là đối với chùm tia S(abcd) cố định thì tỷ số kép γ là một đại lượng không đổi đối với phép phối cảnh.



Hình 21-2

Sau đây chúng ta lại xem một số tính chất lý thú của chùm tia:



Hình 21-3

Cho chùm tia S và dãy điểm phối cảnh σ của nó trên đường thẳng l như ở hình 21-2. Từ trung tâm S' chiếu rọi vào dãy điểm σ, được chùm tia S'. Lại cắt chùm tia S' bằng đường thẳng l', được dãy điểm phối cảnh σ'. Rồi lại từ trung tâm S", chiếu rọi vào dãy điểm σ', được chùm tia S". Dùng đường thẳng l" cắt chùm tia S", được dãy điểm phối cảnh σ'',... Rất rõ ràng, tất cả chùm tia và dãy điểm phối cảnh nói trên, bốn nhóm tương ứng bất kỳ của nó luôn có tỷ số kép giống nhau.

Tính chất không đổi của tỷ số kép dưới sự thay đổi của phép chiếu và phép cắt, chính là cơ sở mà J.V.Poncelet dùng để nghiên cứu hệ thống lý luận đặc sắc của hình học xạ ảnh.

Chúng ta hãy xem một vấn đề lý thú khác khiến cho các môn hình học khác thấy mình bé nhỏ. Vấn đề có ý nghĩa điển hình này là:

Đã biết năm điểm A, B, C, D và E của đường bao của thiết diện nón, thử tìm giao điểm của đường cong ấy với đường thẳng đã biết g (hình 21-3).

Trong năm điểm đã biết của đường bao của thiết diện nón, lấy hai điểm A và B làm trung tâm của chùm tia. Vẽ ba cặp đường thẳng đối ứng AC và BC, AD và BD, AE và BE.

Cắt chùm tia A và chùm tia B bởi đường thẳng g được hai dãy điểm có liên hệ xạ ảnh:

$$(C_1, D_1, E_1,...) \text{ và } (C_2, D_2, E_2,...)$$

Rất rõ ràng là, hai giao điểm P và Q của đường thẳng và thiết diện nón, là hai điểm trùng nhau của hai dãy điểm nêu trên. Để tìm được hai điểm trùng nhau này, ta có thể sử dụng một đường tròn, lấy một điểm S trên đường tròn làm trung tâm, chiếu đường thẳng g lên đường tròn. Như vậy ta sẽ được hai dãy điểm liên hệ xạ ảnh tương ứng trên đường tròn:

$$(C'_1, D'_1, E'_1,...) \text{ và } (C'_2, D'_2, E'_2,...)$$

Nếu chúng ta tìm được hai điểm trùng nhau P' và Q' của hai dãy điểm này trên đường tròn là trên thực tế cũng sẽ tìm được hai giao điểm P và Q của đường thẳng g với thiết diện nón.

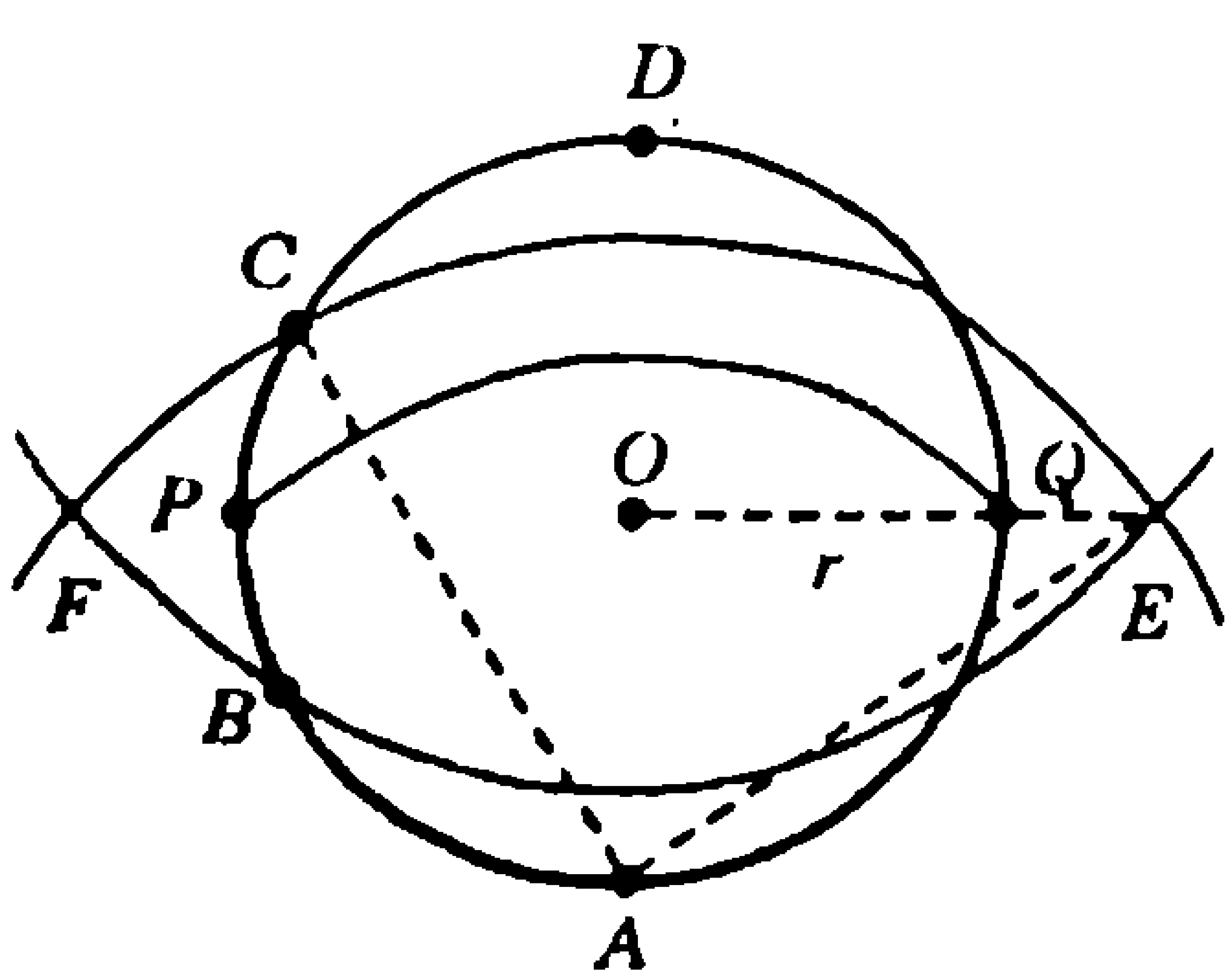
Bây giờ lấy C'_1 và C'_2 làm trung tâm chùm tia đối ứng của biến đổi xạ ảnh trên đường tròn và trục x của biến đổi đó. Có thể chứng minh được rằng: Các giao điểm $C'_1D'_2$ và $C'_2D'_1$, $C'_1E'_2$ và $C'_2E'_1$, $D'_1E'_2$ với $D'_2E'_1$,... cùng thuộc một đường thẳng gọi là trục của biến đổi xạ ảnh đó (xem công thức (21-5)). Nếu còn thêm điều kiện: biến đổi xạ ảnh đó có tính chất đối hợp (tức là nó bằng biến đổi nghịch đảo của nó) thì các đường thẳng $C'_1C'_2$ và $D'_1D'_2$, $E'_1E'_2$ cùng đi qua một điểm (hoặc cùng song song),...

Hai giao điểm P' và Q' của đường tròn với trục biến đổi xạ ảnh, chắc chắn chính là hai điểm trùng nhau của hai dãy điểm tương ứng trên đường tròn. Từ đó, từ trung tâm S chiếu P' và Q' lên đường thẳng g thì hai điểm P và Q thu được tất nhiên cũng là hai điểm trùng nhau của hai dãy điểm tương ứng trên đường bao của thiết diện nón. Đây chính là giao điểm cần tìm của đường thẳng g với đường bao của thiết diện nón.

22. CHỈ DÙNG COMPA ĐỂ DỰNG HÌNH

Bạn đọc có thể không ngờ tới vị hoàng đế B.Napoleon của nước Pháp đã từng "nam chinh bắc chiến", rong ruổi nơi sa trường, uy danh lừng lẫy lại là một người yêu thích toán học. Trình độ sâu về hình học của ông có thể gọi là độc đáo.

Người ta đồn rằng, B.Napoleon rất hứng thú với việc dựng hình hình học chỉ dùng compa. Ông từng ra đề toán cho các nhà toán học Pháp lúc đó: "Chỉ dùng compa (không dùng thước thẳng), hãy chia một đường tròn đã biết ra bốn phần bằng nhau".



Hình 22-1

Đề toán này của B.Napoleon, nếu tâm đường tròn đã biết thì không khó. Hình 22-1 là một cách làm.

Lấy một điểm A bất kỳ trên đường tròn có tâm O(r) đã biết, sau đó bắt đầu từ điểm A, dùng compa đo bán kính, vẽ lần lượt ba điểm B, C và D trên đường tròn sao cho khoảng cách AB, BC, CD bằng nhau và bằng bán kính r. Dựng đường tròn A(AC) cắt đường tròn D(DB) ở E và F. Dựng đường tròn A(OE) cắt đường tròn O(r) ở P và Q. Bốn điểm A, P, D và Q chia đều đường tròn O(r).

Bạn đọc có thể dễ dàng tính ra:

$$AE = AC = \sqrt{3}r$$

$$OE = \sqrt{AE^2 - AO^2}$$

$$= \sqrt{3r^2 - r^2} = \sqrt{2}r$$

Từ đó bốn điểm A, P, D và Q chia đều đường tròn O(r) ra bốn phần bằng nhau.

Có điều là, vấn đề B.Napoleon nêu ra, nếu không cho tâm đường tròn thì sẽ rất khó, song vẫn có thể thực hiện được. Bạn chịu khó đọc hết mục này sẽ rõ.

Năm 1797, nhà hình học Lorenzo Mascheroni (14/5/1750 - 30/7/1800) người Italia đã chỉ ra rằng: Bất cứ một hình hình học nào nếu dùng thước thẳng và compa để dựng được thì đều có thể chỉ dùng compa cũng dựng được. Điều này chứng tỏ "thước thẳng là thừa!".

Về sau, người ta gọi đây là "Phép dựng hình Mascheroni". Tuy vậy, gọi như vậy không đúng với lịch sử của các phép dựng hình trên mặt phẳng mà chỉ dùng compa. Bởi vì, trước đó hơn một thế kỷ, năm 1672 nhà toán học George Mohr (1/4/1640 - 26/1/1697) người Đan Mạch đã nghiên cứu phép dựng hình chỉ dùng compa và đã đưa ra định lý mà về sau người ta gọi là "Định lý Mohr". Như vậy phải gọi là "Phép dựng hình Mohr - Mascheroni" mới đúng, và định lý này cũng phải gọi là "Định lý Mohr - Mascheroni", như sau:

"Mọi bài toán dựng hình thực hiện được bằng thước thẳng và compa đều có thể dựng được chỉ bằng compa".

Cũng cần ghi nhận công lao của nhà toán học Adler người Áo đã đặt cơ sở lý thuyết cho phép dựng hình nói trên.

Cách nói "Thước thẳng là thừa" đúng khi ta cho rằng đường thẳng là dựng được khi dựng được hai điểm của nó.

Những người đã học hình học phẳng chắc đã hiểu rõ: Mọi phép dựng hình bằng thước thẳng và compa xét cho cùng đều quyết định bởi các vấn đề sau đây:

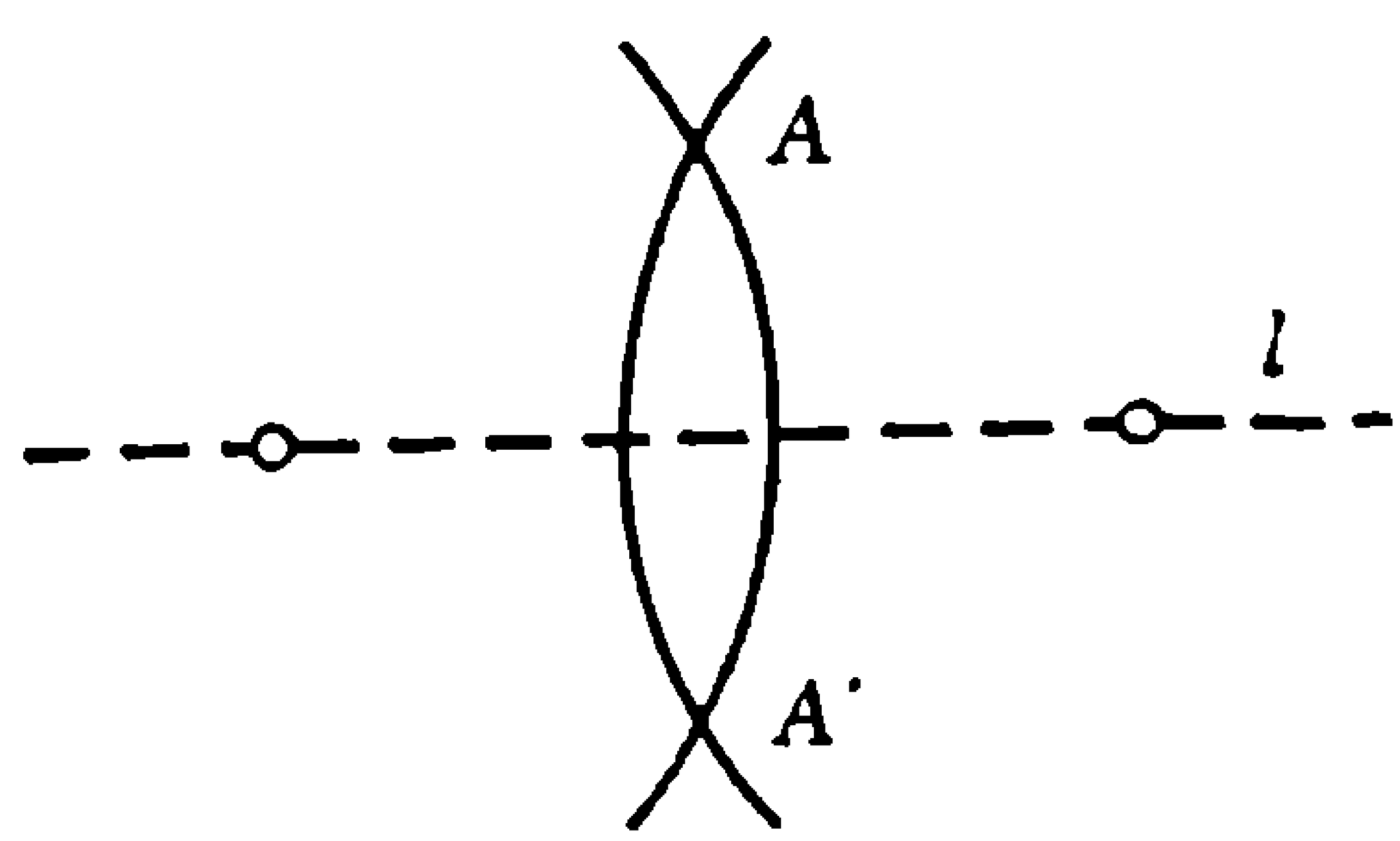
a/ Tìm giao điểm của hai đường tròn;

b/ Tìm giao điểm của đường thẳng và đường tròn;

c/ Tìm giao điểm của hai đường thẳng.

Đối với ba vấn đề nêu trên thì a/ đương nhiên có thể dùng compa để thực hiện được, mấu chốt là ở b/ và c/. Để làm rõ hai vấn đề này, chúng ta hãy xem một loại dựng hình cơ bản chỉ dùng compa:

1. Thử chỉ dùng compa, dựng điểm đối xứng A' với A qua đường thẳng l (hình 22-2).

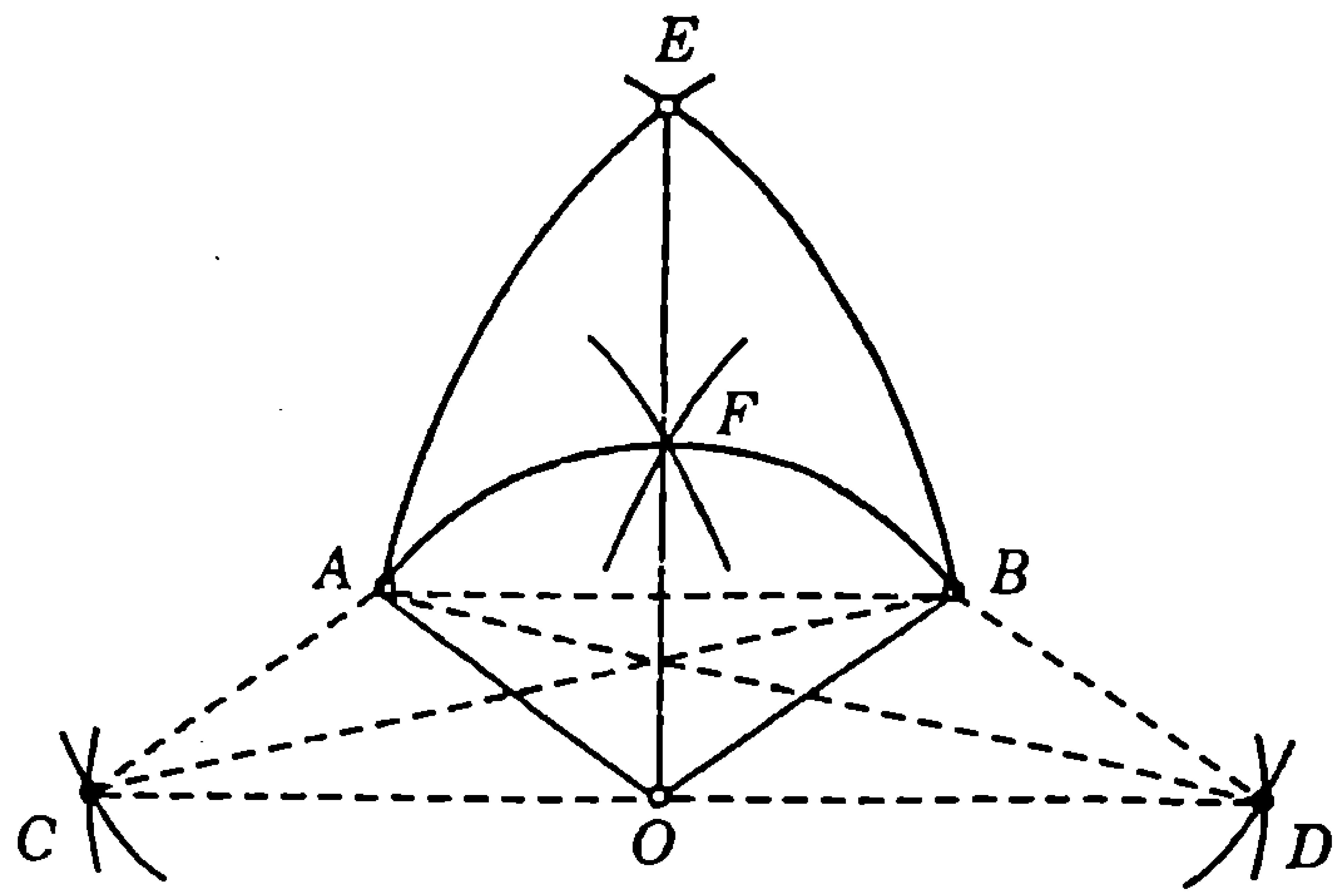


Hình 22-2

Cách dựng: Vẽ hai đường tròn cùng bán kính hoặc khác bán kính nhưng tâm phải nằm trên đường thẳng *l* và đều qua điểm A. Ta sẽ được giao điểm A' của hai đường tròn vừa vẽ chính là điểm đối xứng với A qua đường thẳng *l*.

2. Trong trường hợp đã biết tâm đường tròn, hãy chỉ dùng compa để tìm điểm giữa của cung AB trên đường tròn O.

Cách dựng: Dùng compa dựng hai tứ giác ABOC và ABDO (hình 22-3).



Hình 22-3

Gọi OA = r, AB = m thì trong tứ giác ABOC, ta có:

$$CB^2 + OA^2 = 2(AB^2 + OB^2).$$

Vậy:

$$CB^2 + r^2 = 2(m^2 + r^2).$$

Do đó:

$$CB^2 = 2m^2 + r^2.$$

Bây giờ ta dựng đường tròn C(CB) và đường tròn D(DA). Hai đường tròn này cắt nhau ở điểm E. Ta có:

$$OE^2 = CE^2 - OC^2 = CB^2 - OC^2.$$

Vậy:

$$OE^2 = 2m^2 + r^2 - m^2 = m^2 + r^2.$$

Sau đó ta dựng đường tròn C(OE) và đường tròn D(OE). Hai đường tròn này cắt nhau ở điểm F. Ta có:

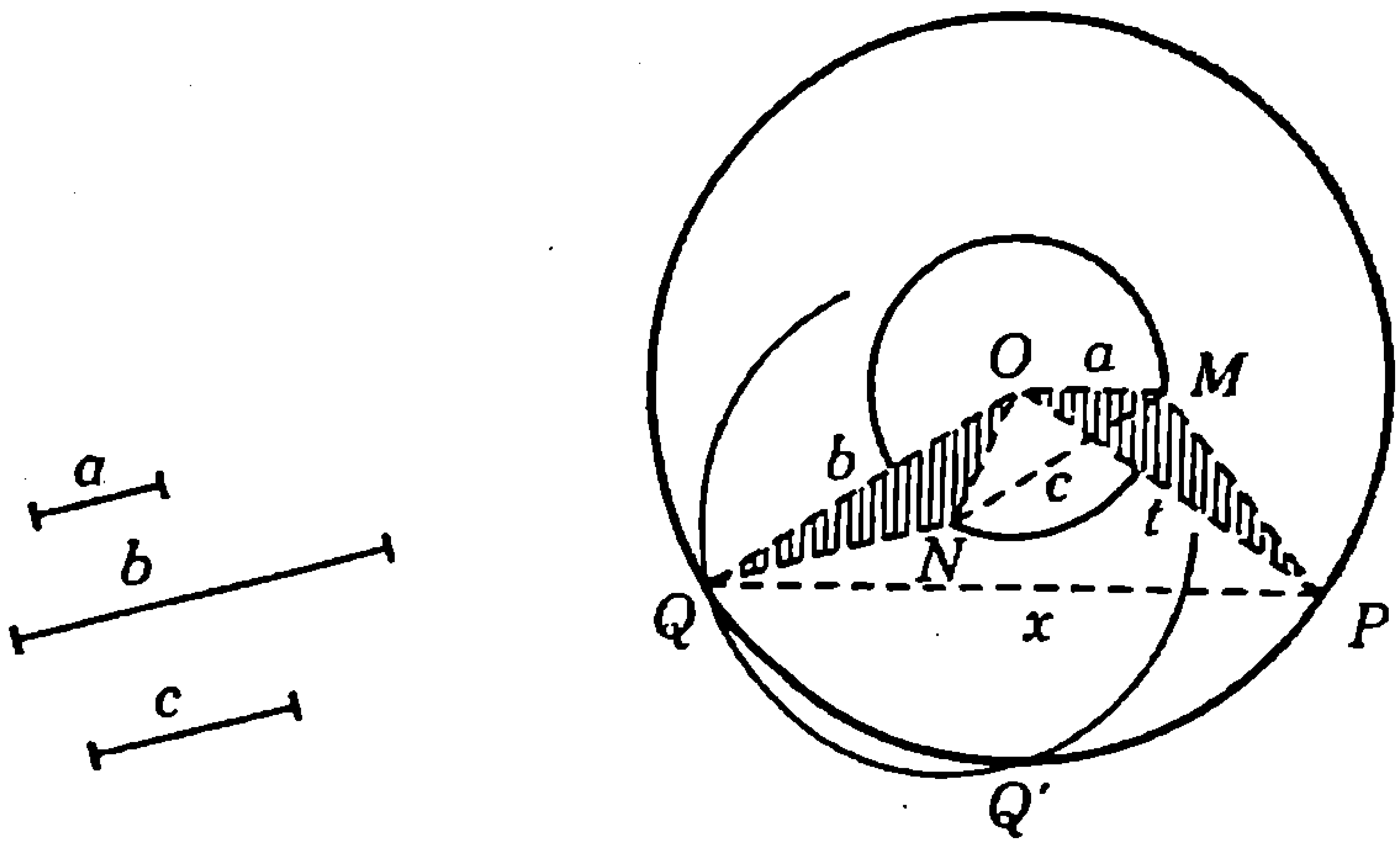
$$OF^2 = CF^2 - OC^2 = OE^2 - OC^2.$$

Vậy:

$$OF^2 = m^2 + r^2 - m^2 = r^2.$$

Từ đó, F là điểm trên đường tròn O. Lại căn cứ vào tính đối xứng của hình vẽ ta biết F là điểm giữa của cung AB.

3. Hãy chỉ dùng compa, tìm đoạn tỷ lệ thứ tư của ba đoạn thẳng a, b và c (hình 22-4).



Hình 22-4

Cách dựng: Chúng ta chỉ làm một trường hợp phổ biến nhất, các trường hợp còn lại bạn đọc tiếp tục làm nốt.

Lấy một điểm O, dựng đường tròn O(a); đường tròn O(b). Lấy một điểm M bất kỳ trên đường tròn O(a) và tìm được một điểm N trên đường tròn O(a) sao cho dây cung MN = c. Chọn bán kính r, dựng đường tròn M(r) và đường tròn N(r) lần lượt cắt đường tròn O(b) ở điểm P và điểm Q và để cho OP hoặc OQ ở trong góc MON. Như vậy:

$$\Delta OMN \backsim \Delta OPQ$$

Từ đó:

$$OM : OP = MN : PQ.$$

tức là:

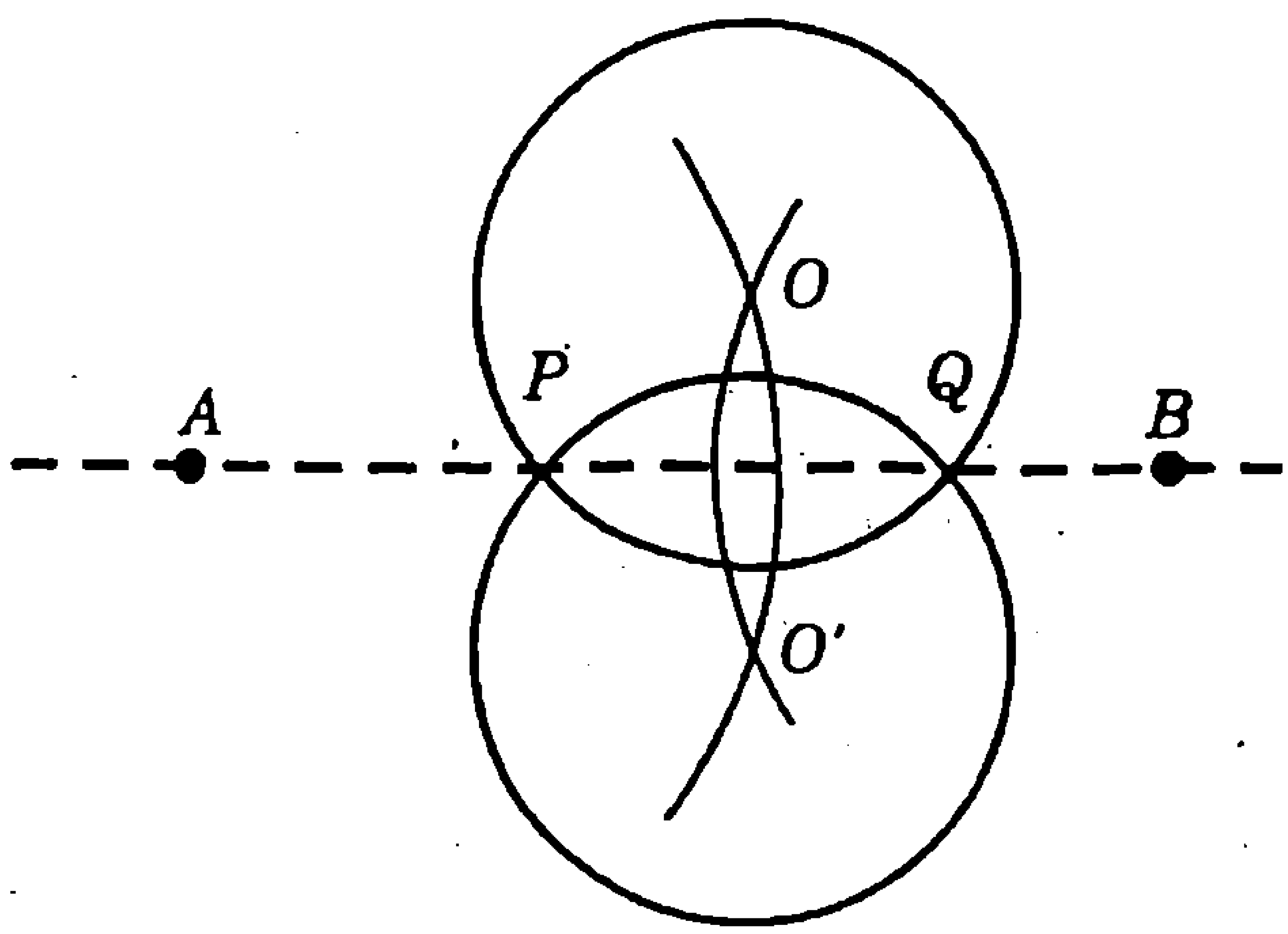
$$a : b = c : x.$$

Do đó dây cung PQ là đoạn tỷ lệ thứ tư x cần tìm.

Bây giờ chúng ta hãy quay về hai vấn đề dựng hình mấu chốt b/ và c/ mà chỉ dùng compa.

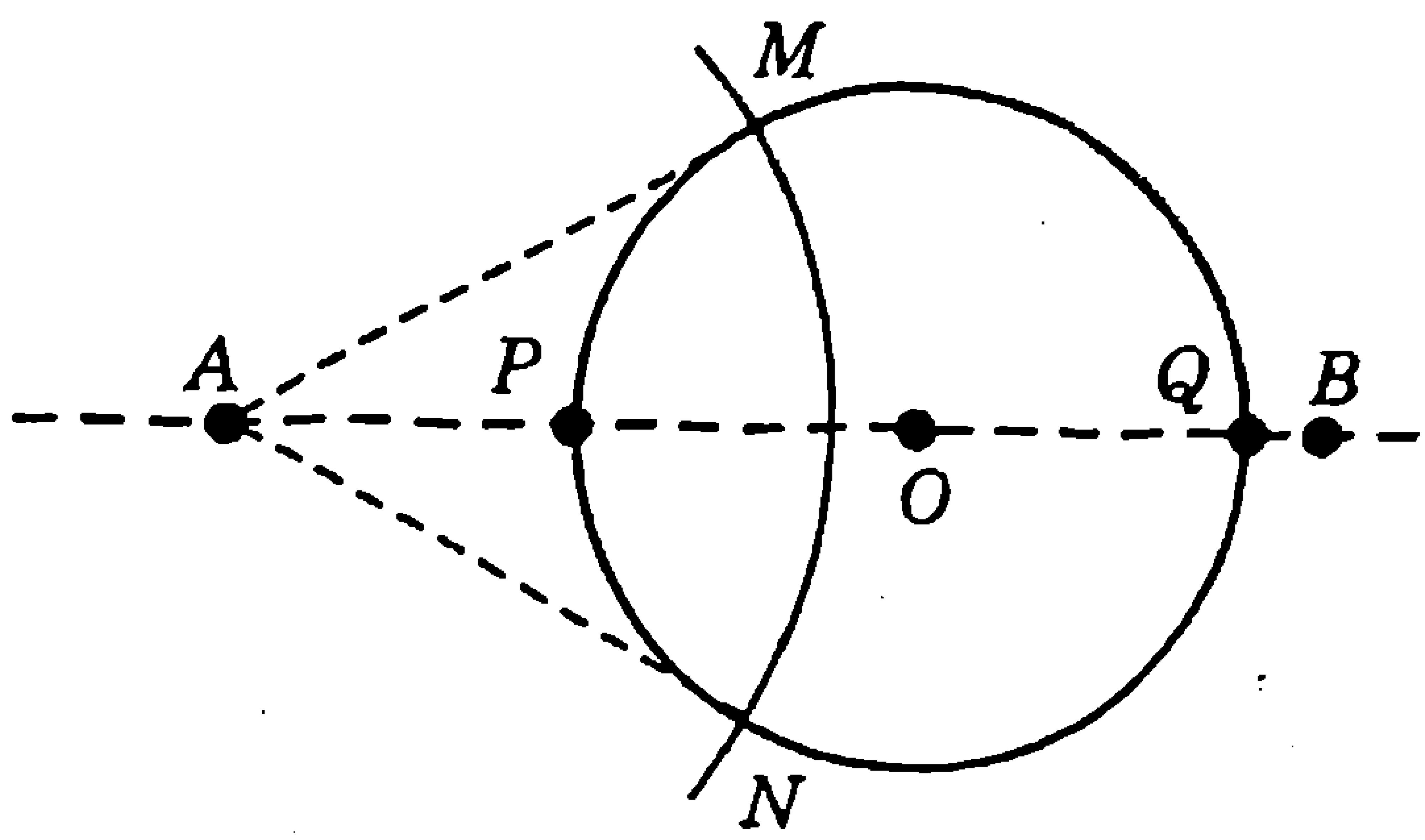
Sự thực, chỉ dùng compa để tìm giao điểm của một đường thẳng với đường tròn (vấn đề b/) là không còn khó khăn nữa.

Dựng hình cơ bản 1, dựng điểm O' đối xứng với tâm đường tròn O của đường tròn O(r) đã cho qua đường thẳng AB (hình 22-5). Vậy hai giao điểm P và Q của đường tròn O(r) và đường tròn O'(r), đó là hai giao điểm cần tìm của đường thẳng AB với đường tròn O(r) đã biết.



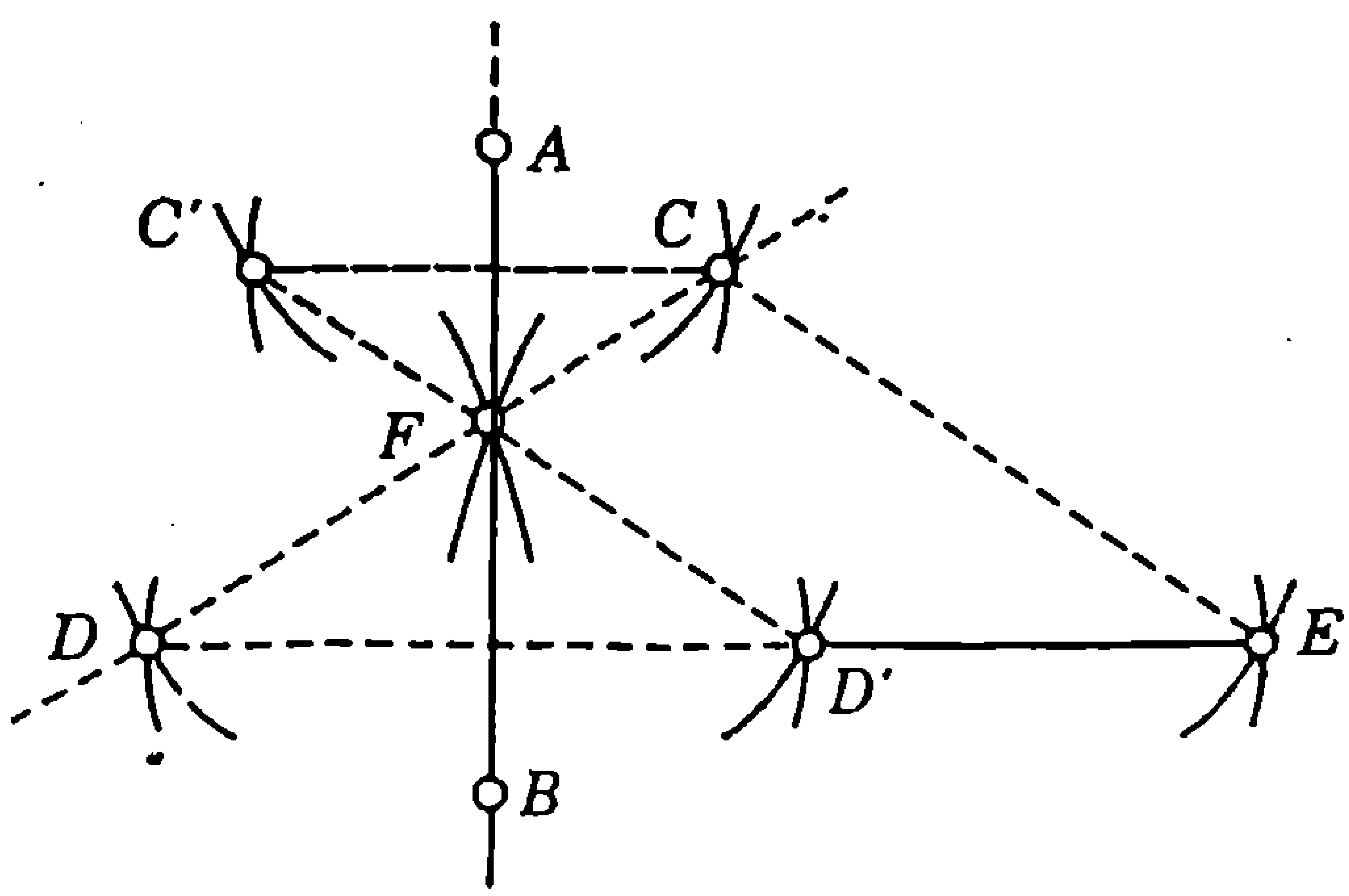
Hình 22-5

Có điều là, có một trường hợp gần như ngoại lệ, tức là đường thẳng AB vừa đúng đi qua điểm O. Khi đó cách dựng hình cơ bản 1 mất tác dụng. Nhưng chúng ta có thể lại sử dụng cách dựng hình cơ bản 2, như ở hình 22-6, tìm ra điểm giữa P (và Q). Rõ ràng P và Q là hai giao điểm của đường tròn O với đường thẳng AB. Như vậy, chúng ta đã giải quyết xong vấn đề dựng hình mấu chốt b/.



Hình 22-6

Bây giờ ta xem xét vấn đề dựng hình mấu chốt c/, tức là chỉ dùng compa để tìm giao điểm của hai đường thẳng. Trên thực tế, vấn đề này có thể quy về cách dựng hình cơ bản 3.



Hình 22-7

Trước tiên ta dựng hai điểm đối xứng C' và D' với hai điểm C và D qua đường thẳng AB theo cách dựng hình cơ bản 1, sau đó lại xác định điểm E (hình 22-7), sao cho bốn điểm C, C', D', E là bốn đỉnh của hình bình hành. Điều này chỉ dùng compa là có thể thực hiện được. Như vậy rõ ràng là, ba điểm D, D' và E cùng nằm trên một đường thẳng.

Gọi giao điểm của CD với AB là F. Mục đích bây giờ là phải tìm ra điểm F. Ta có:

$$D'F \parallel EC.$$

Vậy:

$$DE : DD' = DC : DF,$$

tức là DF = x là đoạn tỷ lệ thứ tư của ba đoạn thẳng DE, DD' và DC, do đó cũng có thể chỉ dùng compa là dựng được. Nhiệm vụ tiếp theo là tìm giao điểm F của đường tròn D(x) và đường tròn D'(x). Đây là việc dễ dàng thực hiện được.

Như vậy là đã chứng minh được kết luận của L.Mascheroni: "Thước thẳng là thừa!".

23. CHỈ DÙNG THƯỚC THẲNG ĐỂ DỰNG HÌNH

Trong mục 22 đã nói về vấn đề chỉ dùng compa để dựng hình, như vậy "Thước thẳng là thừa" - đó là kết luận của L.Mascheroni. Vậy, nếu như chỉ dùng thước thẳng để dựng hình thì "Compa cũng là thừa!"?

Câu trả lời cho vấn đề này là: không được!

Để khẳng định vấn đề không thể chỉ dùng thước thẳng để dựng hình được, chỉ cần nêu một phản ví dụ như sau:

Cho một đường tròn nhưng không cho vị trí của tâm thì không có cách gì chỉ dùng thước thẳng mà tìm được tâm của nó. Bạn hãy thử xem!

J. Steiner

Có điều là, một kết luận khác làm cho người ta chú ý hơn. Đó là, năm 1833, nhà toán học Jacob Steiner (18/3/1796 - 1/4/1863) người Thụy Sĩ gốc Đức đã chứng minh rằng: "Bất cứ loại dựng hình hình học nào mà có thể thực hiện bằng thước thẳng và compa thì đều có thể thực hiện được chỉ dùng thước thẳng, chỉ cần cho sẵn một đường tròn và tâm của nó".

Nội dung vừa nêu được gọi là "Phép dựng hình Steiner", hay "Định lý Steiner". Đây là phép dựng hình trên mặt phẳng chỉ dùng thước thẳng.

Muốn chứng minh kết luận này của J.Steiner, cũng giống như kết luận của L.Mascheroni ở mục 22, phải giải quyết ba vấn đề sau đây (đương nhiên trường hợp này phải lấy đường tròn và tâm của nó cho trước làm tiên đề):

a/ Tìm giao điểm của hai đường thẳng;

b/ Tìm giao điểm của đường tròn đã biết với đường thẳng (đường tròn đã biết ở đây là chỉ tâm và một điểm trên đường tròn hoặc bán kính r);

c/ Tìm giao điểm của hai đường tròn (hai đường tròn đã biết ở đây chỉ tâm của chúng và một điểm trên mỗi đường tròn hoặc hai bán kính).

Đối với ba vấn đề nêu trên thì a/ đương nhiên có thể dùng thước thẳng để thực hiện được, mấu chốt là ở b/ và c/.

Liệu có thể thực hiện được hai vấn đề mấu chốt b/ và c/ khi chỉ dùng thước thẳng và cho trước một đường tròn không?

Phương pháp chứng minh mà J.Steiner đưa ra là vô cùng đẹp đẽ.

Để làm rõ hai vấn đề mấu chốt b/ và c/, chúng ta hãy xem một số loại dựng hình cơ bản chỉ dùng thước thẳng:

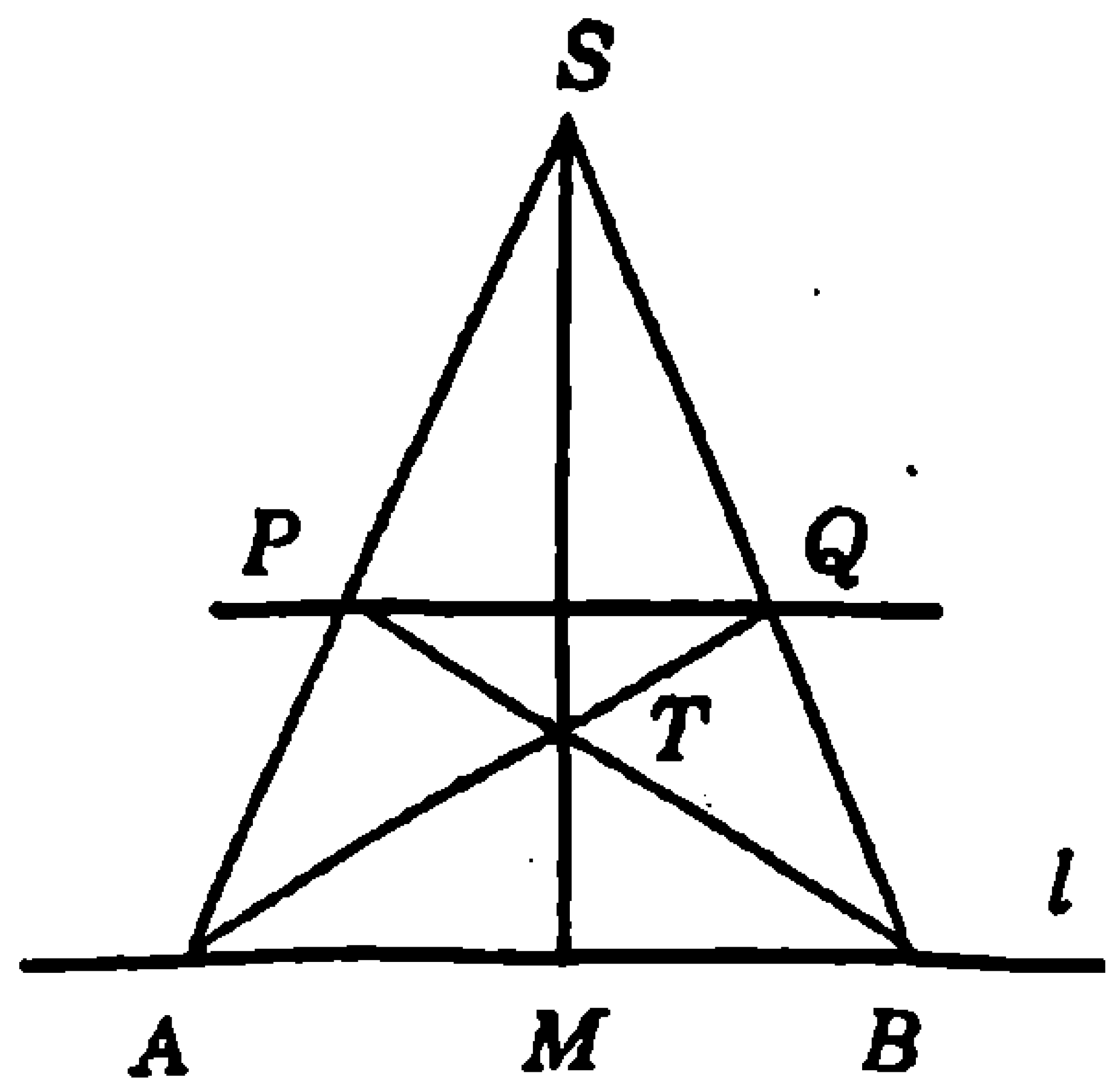
1. Cho đường thẳng l và một điểm P ngoài đường thẳng đó (hình 23-1), hãy chỉ dùng thước thẳng để dựng một đường thẳng qua điểm P và song song với đường thẳng l.

Cách dựng: Gọi A và B là hai điểm trên đường thẳng l và biết điểm giữa M của AB. Nối AP, trên AP kéo dài lấy một điểm S, nối SM, SB và PB; PB cắt SM ở điểm T. Lại nối AT và kéo dài AT cắt SB ở điểm Q. Nối PQ. Khi đó:

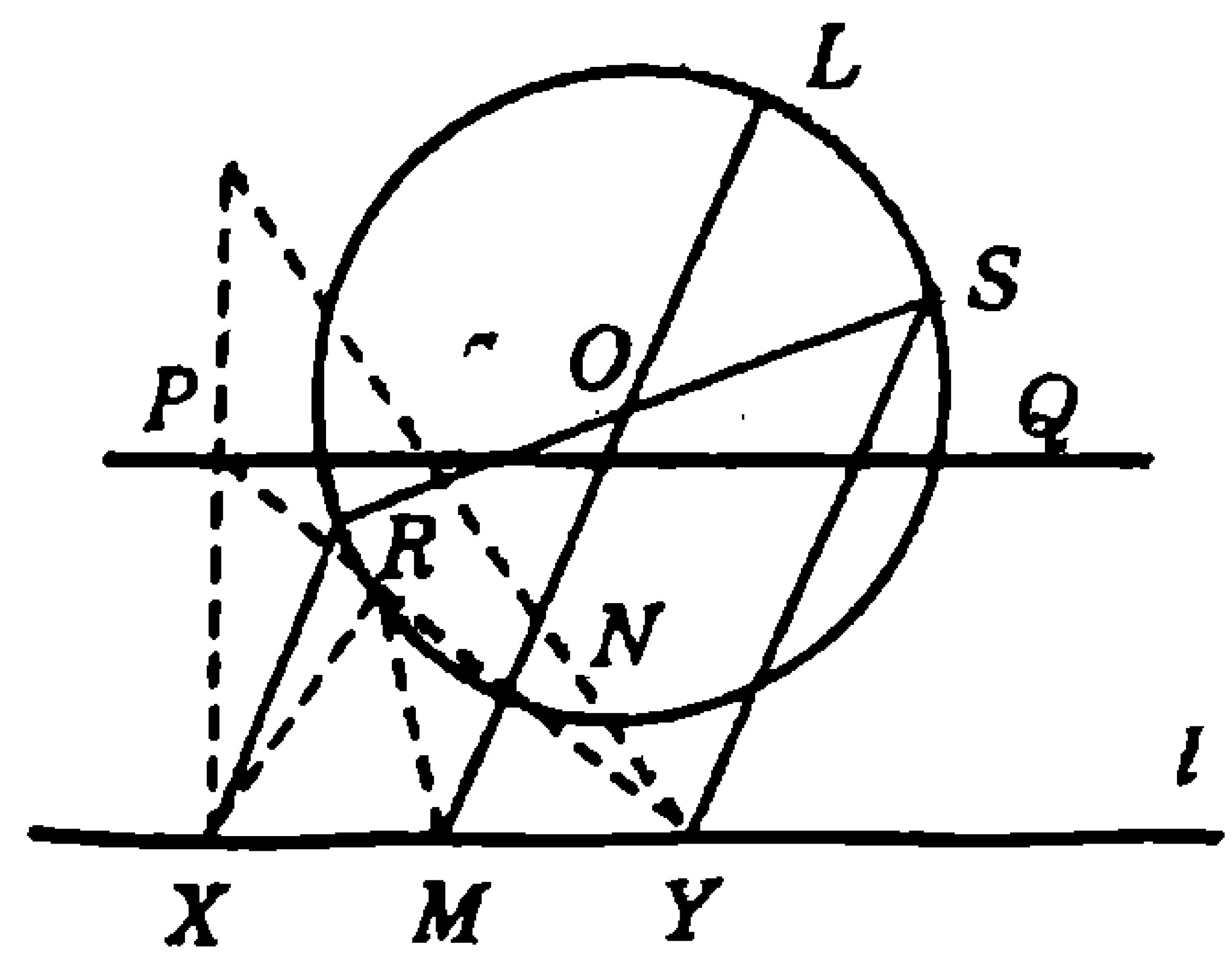
$$PQ \parallel l.$$

Việc chứng minh kết luận nêu trên không khó, nhường cho bạn đọc.

Bây giờ giả sử không tồn tại đoạn thẳng AB trên đường thẳng l. Vậy ta có thể lợi dụng đường tròn O đã biết, dựng đường kính LN qua điểm M như hình 23-2. Rõ ràng tâm đường tròn O là điểm giữa của đường kính LN.



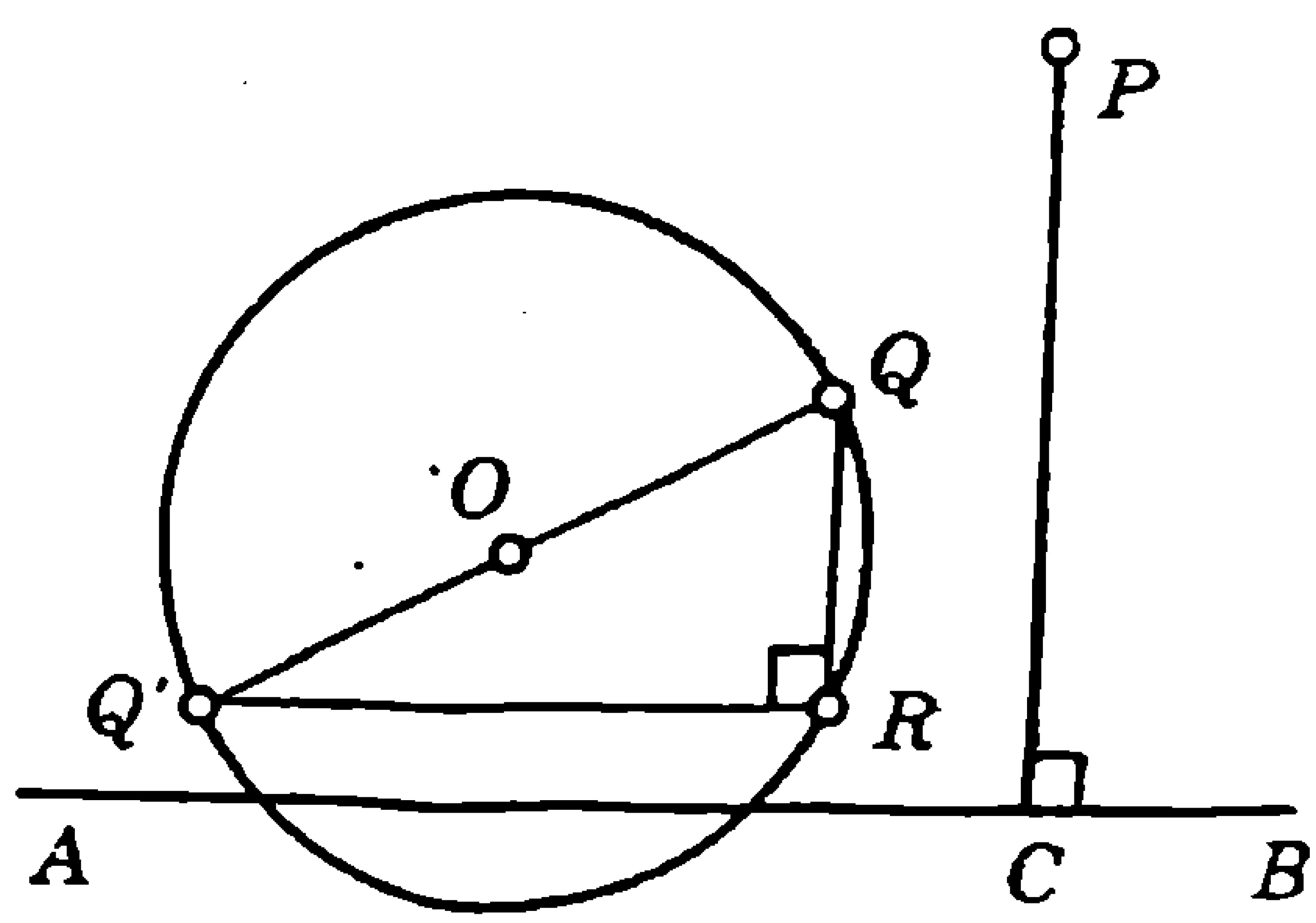
Hình 23-1



Hình 23-2

Lại dựng một đường kính RS. Lợi dụng đường thẳng LN dựng RX // LN và SY // LN, có X và Y trên đường thẳng l. Dễ thấy M chính là điểm giữa của đoạn thẳng XY.

Tiếp theo dựng đường thẳng qua điểm P và song song với đường thẳng l như cách dựng ở trên.



Hình 23-3

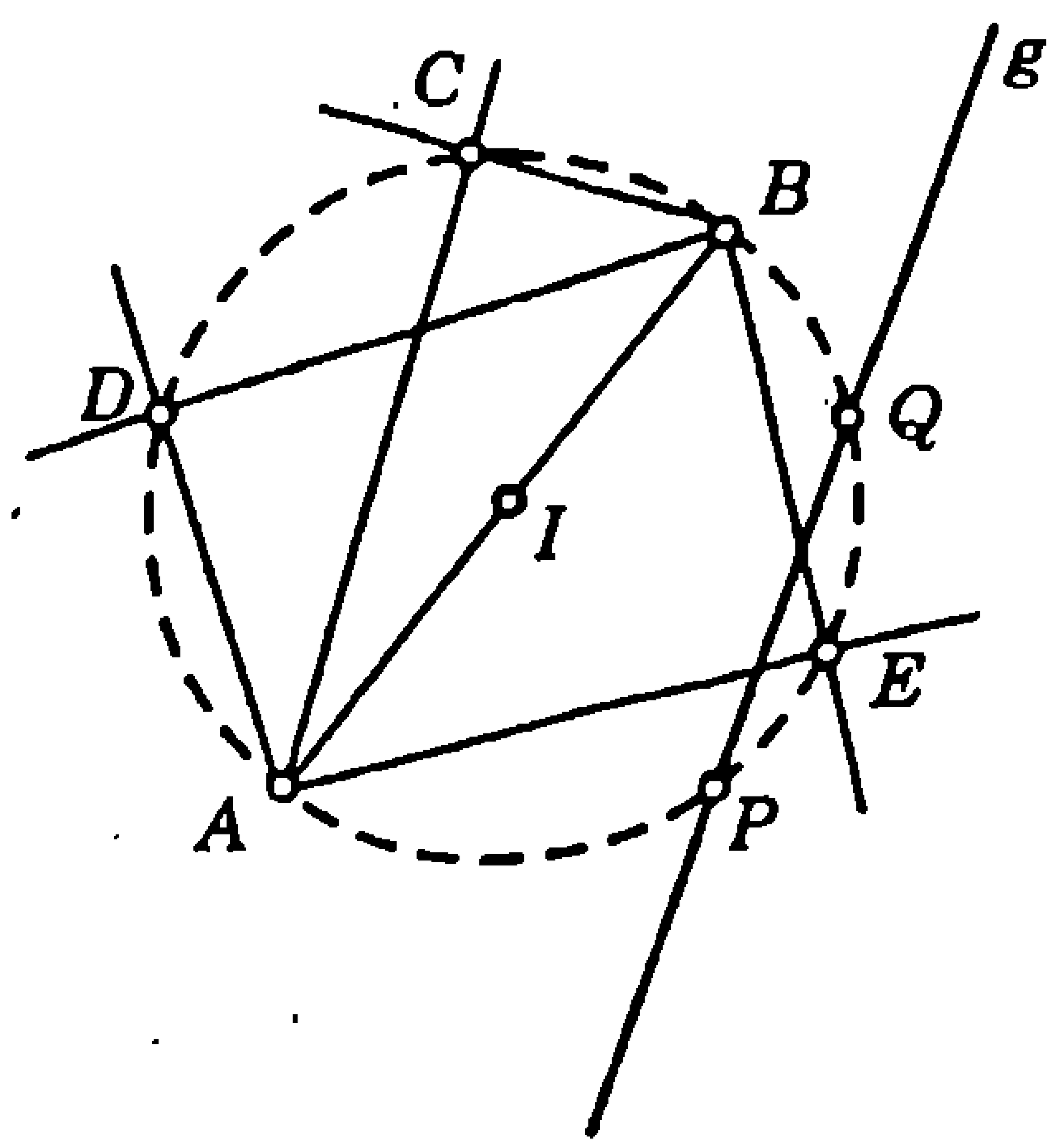
2. Cho đường tròn O. Hãy chỉ dùng thước thẳng để dựng đường thẳng qua điểm P và vuông góc với đường thẳng AB đã biết (hình 23-3).

Cách dựng: Lấy đường kính QQ' của đường tròn đã cho, dựng đường thẳng Q'R qua Q' và song song với đường thẳng AB, R trên đường tròn O. Rõ ràng ta có QR vuông góc với Q'R.

Bây giờ qua P dựng PC // QR. Vậy PC vuông góc với AB, đó chính là đường vuông góc phải tìm.

Sau đây ta trở lại hai vấn đề mấu chốt b/ và c/.

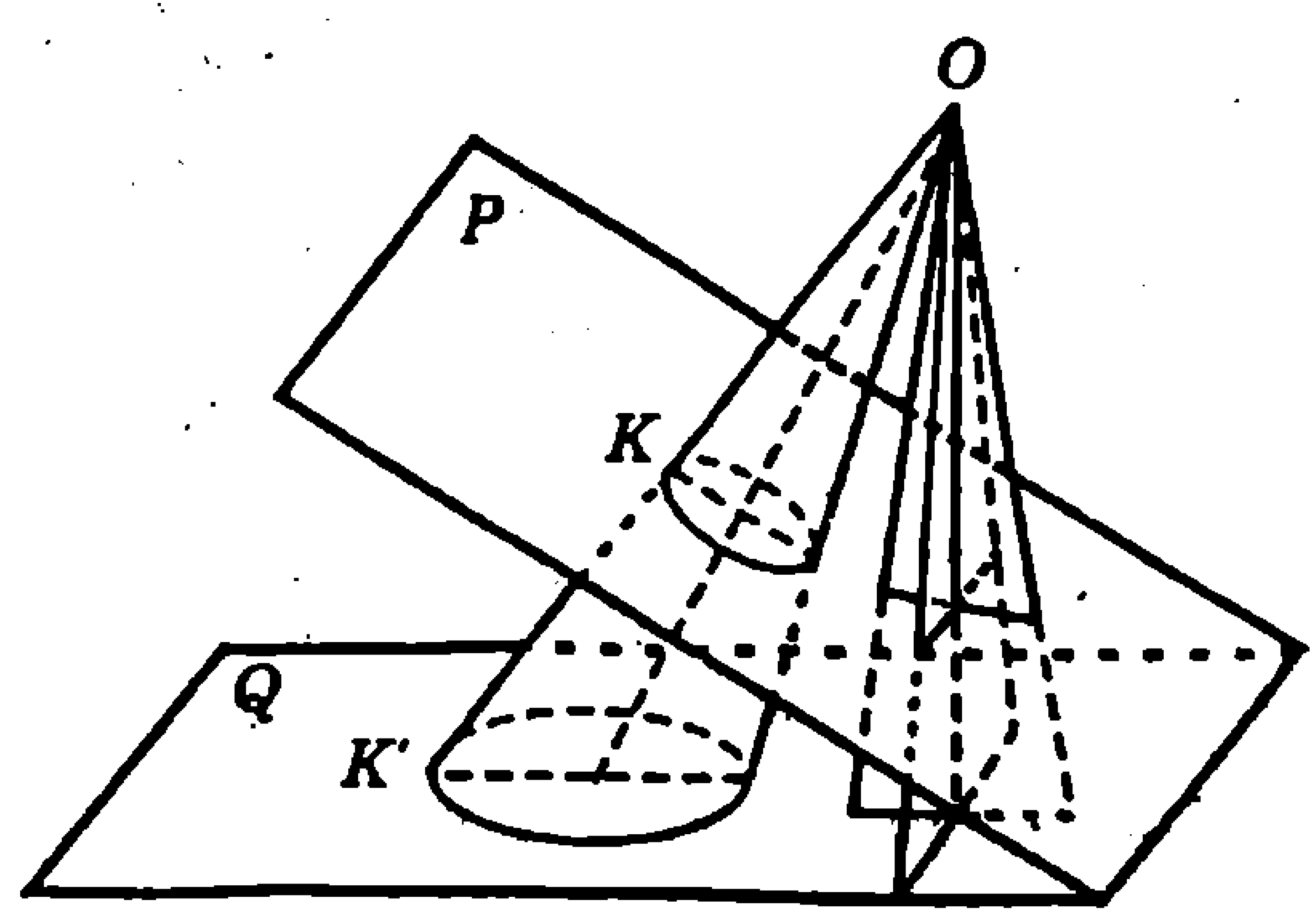
Cho đường thẳng g, đường tròn có tâm I và một điểm A trên đường tròn đó (hình 23-4). Hiển nhiên, ta có thể thông qua cách dựng hình cơ bản 1 mà tìm được điểm B trên đường tròn I, đối xứng với A qua I, sau đó lại qua cách dựng hình cơ bản 2 tìm ra ba điểm C, D và E trên đường tròn I. Như vậy ta đã có năm điểm A, B, C, D và E trên đường tròn I.



Hình 23-4

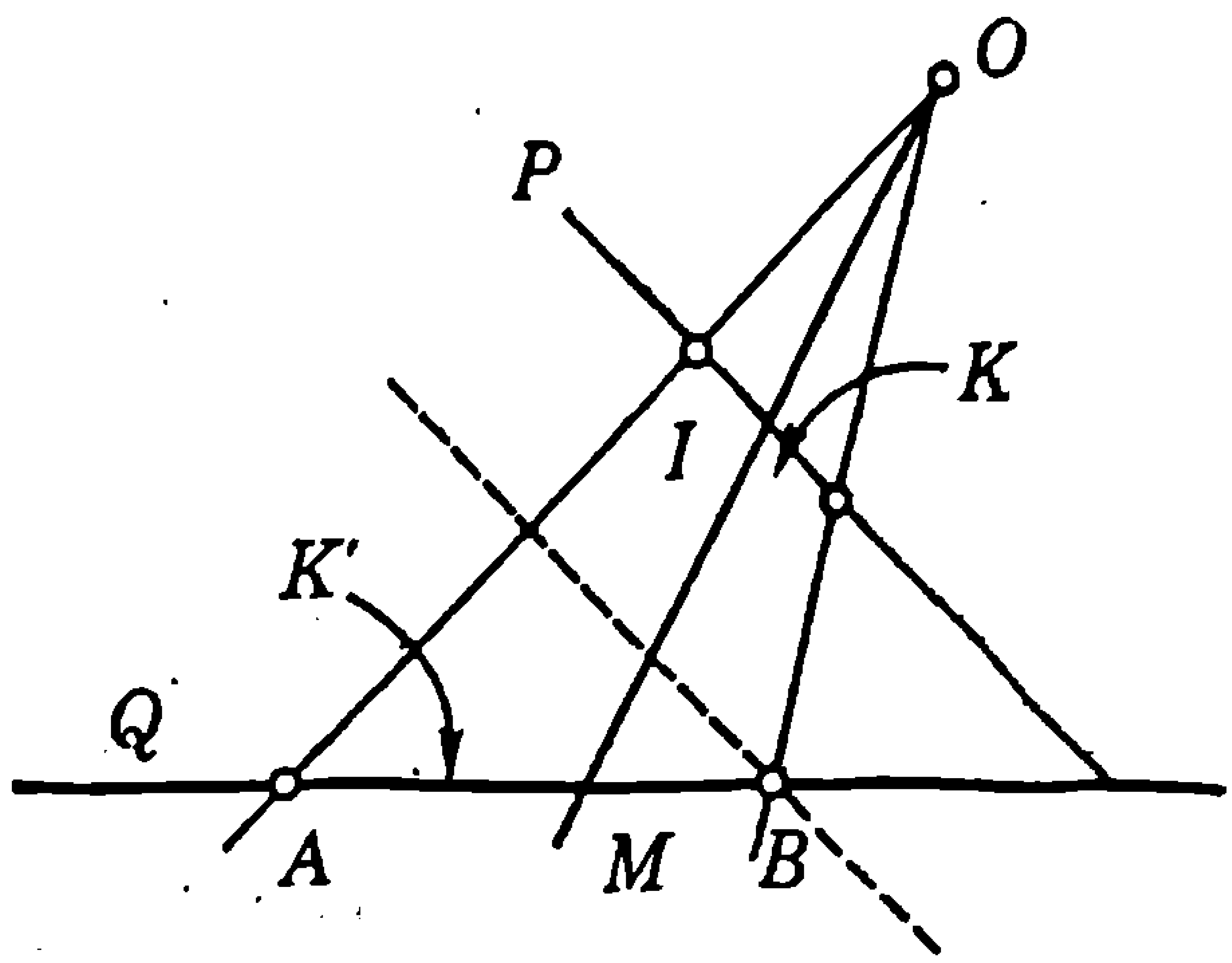
Căn cứ vào ví dụ cuối cùng trong mục 21 của "Nhà hình học thần kỳ J.V.Poncelet", chúng ta biết: hoàn toàn có thể tìm được hai giao điểm P và Q của đường thẳng g với đường tròn I (chỉ dùng thước thẳng).

Như đã nói ở trên: trong "Bài toán Steiner", việc cho biết tâm đường tròn là vô cùng quan trọng. Có thể có người vẫn còn hoài nghi về điều này, thậm chí còn cho rằng; cứ làm thử nhiều nữa, chưa biết chừng có thể tìm được phương pháp tốt hơn. Kỳ thực, phương pháp như vậy thì cơ bản là không có. Đây không phải là phỏng đoán, mà là khoa học!.



Hình 23-5

Sự thực, nếu đúng là tồn tại phương pháp tìm tâm đường tròn bằng thước thẳng thì trên mặt phẳng P ta có thể đưa ra các bước để tìm tâm I của đường tròn K (hình 23-5). Vậy ta có thể chọn một điểm O trong không gian, rồi lấy O làm trung tâm để chiếu tất cả các đường trên mặt phẳng P lên mặt phẳng Q (mặt phẳng Q không song song với mặt phẳng P), làm sao để hình chiếu của đường tròn K trên mặt phẳng P vẫn là đường tròn K' trên mặt phẳng Q (chúng ta có thể chọn O và mặt phẳng Q để đảm bảo thực hiện được điều này). Các đường thẳng khác trên mặt phẳng P cũng thành đường thẳng trên mặt phẳng Q qua phép chiếu đó. Song, có thể thấy rõ ràng, điểm hình chiếu M trên mặt phẳng Q của điểm (tâm) I trên mặt phẳng P không thể là tâm của đường tròn K', nếu không sẽ có OM // OA hoặc OM // OB (hình 23-6), mà điều này hiển nhiên là hoang đường.



Hình 23-6

Kết luận vừa nêu chứng tỏ rằng: Nếu trên mặt phẳng P chỉ dùng thước thẳng thực hiện các bước dựng hình nào đó để thu được tâm của một đường tròn nào đó thì dùng các bước dựng hình giống như thế lại thu được trên mặt phẳng Q không phải là tâm của đường tròn tương ứng. Do vậy, không có phép dựng hình mong muốn.

Trong dựng hình chỉ dùng compa, "thước thẳng là thừa" nhưng khi dựng hình chỉ dùng thước thẳng thì không thể tuỳ tiện bỏ compa. Vì vậy, chỉ dùng thước thẳng để dựng hình đôi khi phải dùng trí tuệ rất cao.

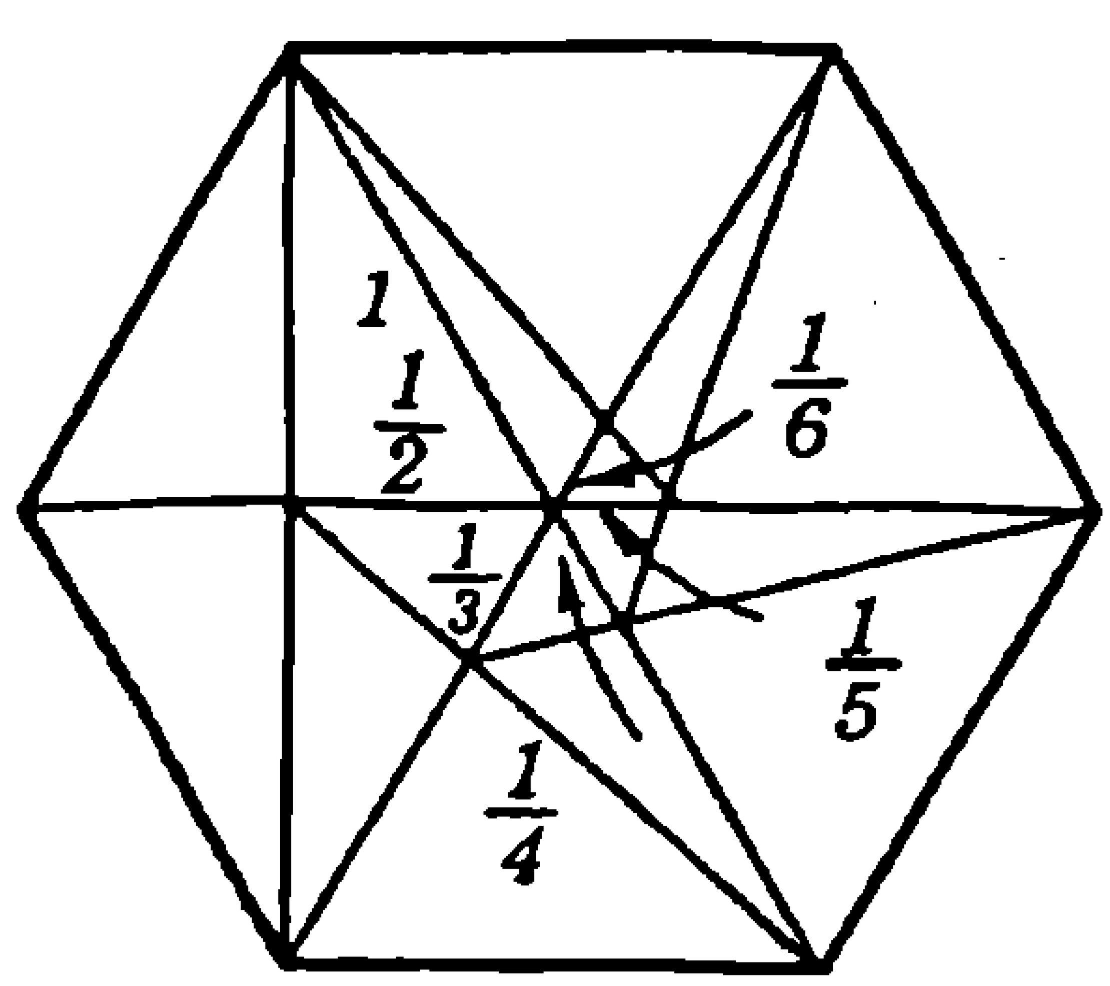
Sau đây là mấy đề toán chỉ dùng thước thẳng để dựng hình dành để bạn đọc luyện tập. Cần nói thêm rằng, việc hạn chế chỉ dùng thước thẳng để dựng hình không phải là đòi hỏi bạn đọc tự trói mình, mà là thông qua dụng cụ hạn chế để rèn luyện tư duy.

1. Cho một hình lục giác đều, hãy chỉ dùng thước thẳng dựng các đoạn thẳng có độ dài bằng $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$ của chiều dài cạnh của nó.

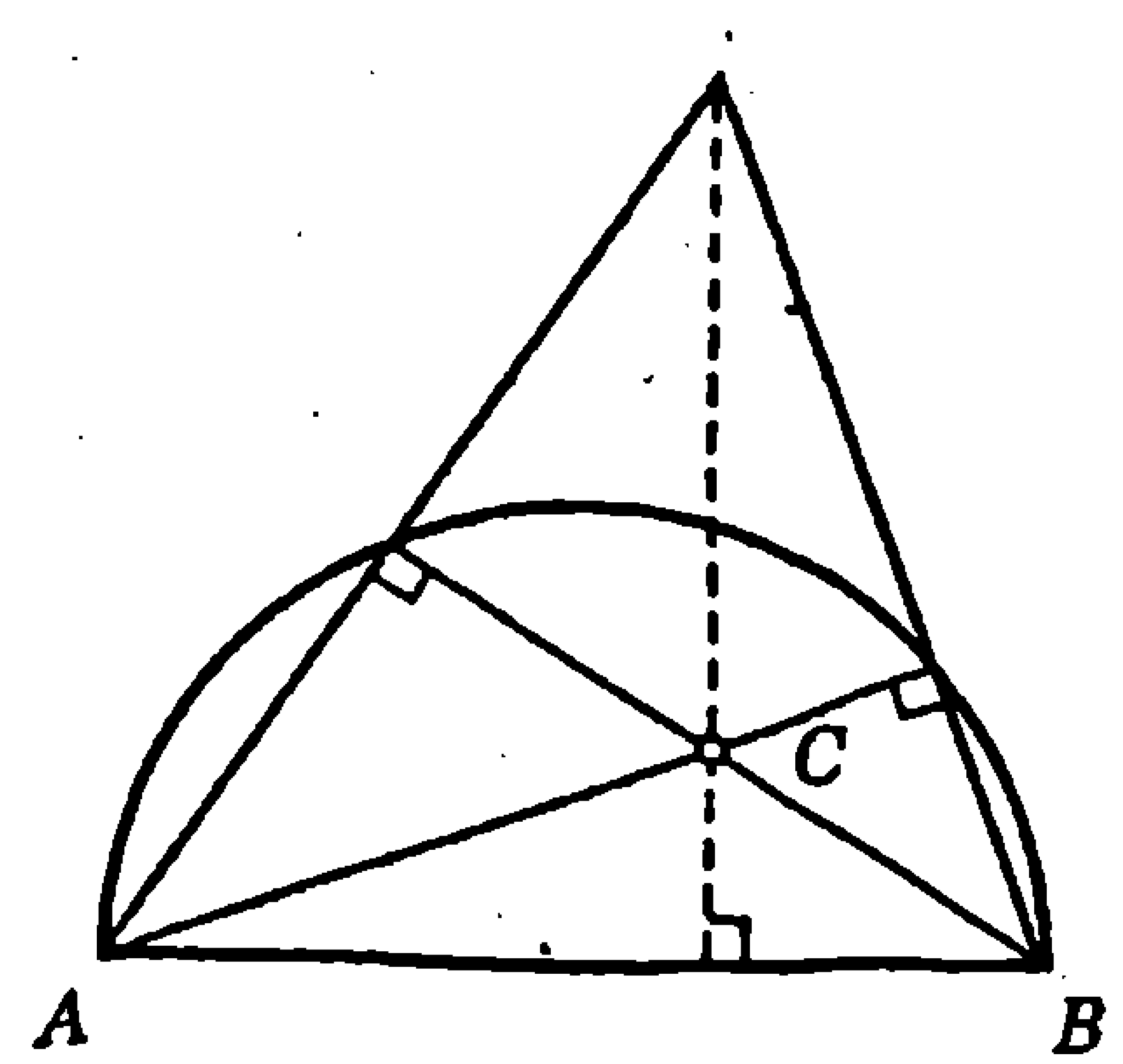
2. Cho biết AB là đường kính của đường tròn, C là một điểm trong đường tròn đó, hãy chỉ dùng thước thẳng dựng đường thẳng qua điểm C và vuông góc với đường kính AB.

Bạn đừng coi thường các vấn đề này, chúng có thể làm bạn đau đầu đấy.

Hình 23-7 và hình 23-8 là lời giải của hai đề toán trên. Bạn đọc hãy đối chiếu xem.



Hình 23-7



Hình 23-8

24. TOÁN HỌC CHIA CẮT HÌNH

A Phàm Đề là nhân vật thần thoại trong dân gian, hoá thân của trí tuệ dân tộc Duy Ngô Nhĩ vùng Tân Cương của Trung Quốc. Có một câu chuyện ở Tân Cương mà ai cũng biết về A Phàm Đề đã bày mưu cho người làm thuê lấy được chuỗi vàng bạc của ông nhà giàu. Chuyện kể rằng:

Một hôm ông chủ nhà giàu bảo với người làm thuê: "Ta có một chuỗi vòng bạc, tất cả có bảy vòng. Anh làm thuê cho ta thì cứ mỗi ngày ta trả cho một vòng, anh bằng lòng không?".

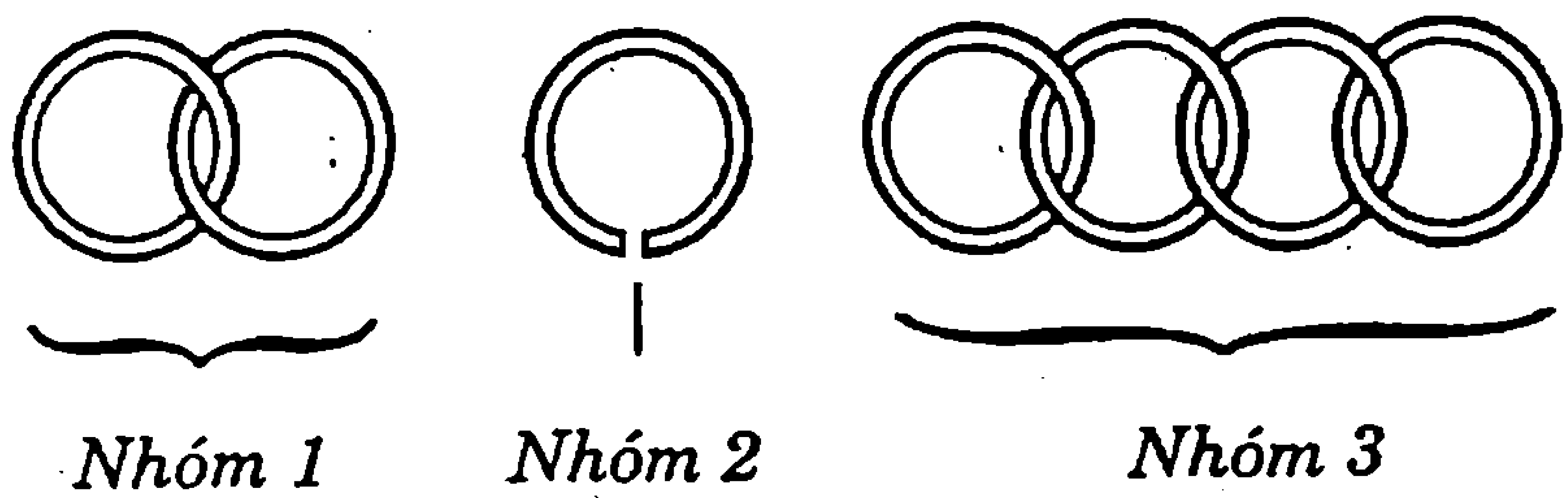
Người làm thuê nửa tin nửa ngờ. Nhưng ông chủ nhà giàu lại nói tiếp:

"Có điều là, với một điều kiện: chuỗi vòng bạc này có bảy vòng móc vào nhau, nhiều nhất là anh chỉ có thể cắt rời một vòng trong đó. Nếu anh không có cách gì để mỗi ngày lấy một vòng thì anh sẽ không có tiền công trong cả tuần ấy".

Người làm thuê đành chấp nhận, nhưng anh ta chưa biết làm cách nào, nên vội đi tìm A Phàm Đề, nhờ A Phàm Đề bày cách cho. Quả nhiên A Phàm Đề đã bày cho một cách tuyệt diệu và người làm thuê cứ mỗi ngày lấy một vòng bạc, trước sự ngạc nhiên và tiếc của của ông chủ nhà giàu nọ.

Kỳ thực, điều kiện của ông chủ nhà giàu đưa ra không khó lắm, không cần nhờ đến trí khôn siêu nhân của A Phàm Đề, bạn đọc cũng có thể nghĩ ra.

Nếu cắt rời vòng thứ ba của chuỗi vòng thì ta được ba nhóm vòng (hình 24-1). Số vòng của ba nhóm vòng này lần lượt là: 2, 1 và 4.



Hình 24-1

Cách mà A Phàm Đề bày cho người làm thuê như sau: Ngày thứ nhất lấy nhóm 2 (một vòng), ngày thứ hai trả lại nhóm 2 để lấy nhóm 1 (hai vòng), ngày thứ ba lấy thêm nhóm 2, ngày thứ tư trả nhóm 1 và nhóm 2 để lấy nhóm 3, ngày thứ năm lấy thêm nhóm 2, ngày thứ sáu trả nhóm 2 để lấy nhóm 1 và ngày thứ bảy lấy nốt nhóm 2.

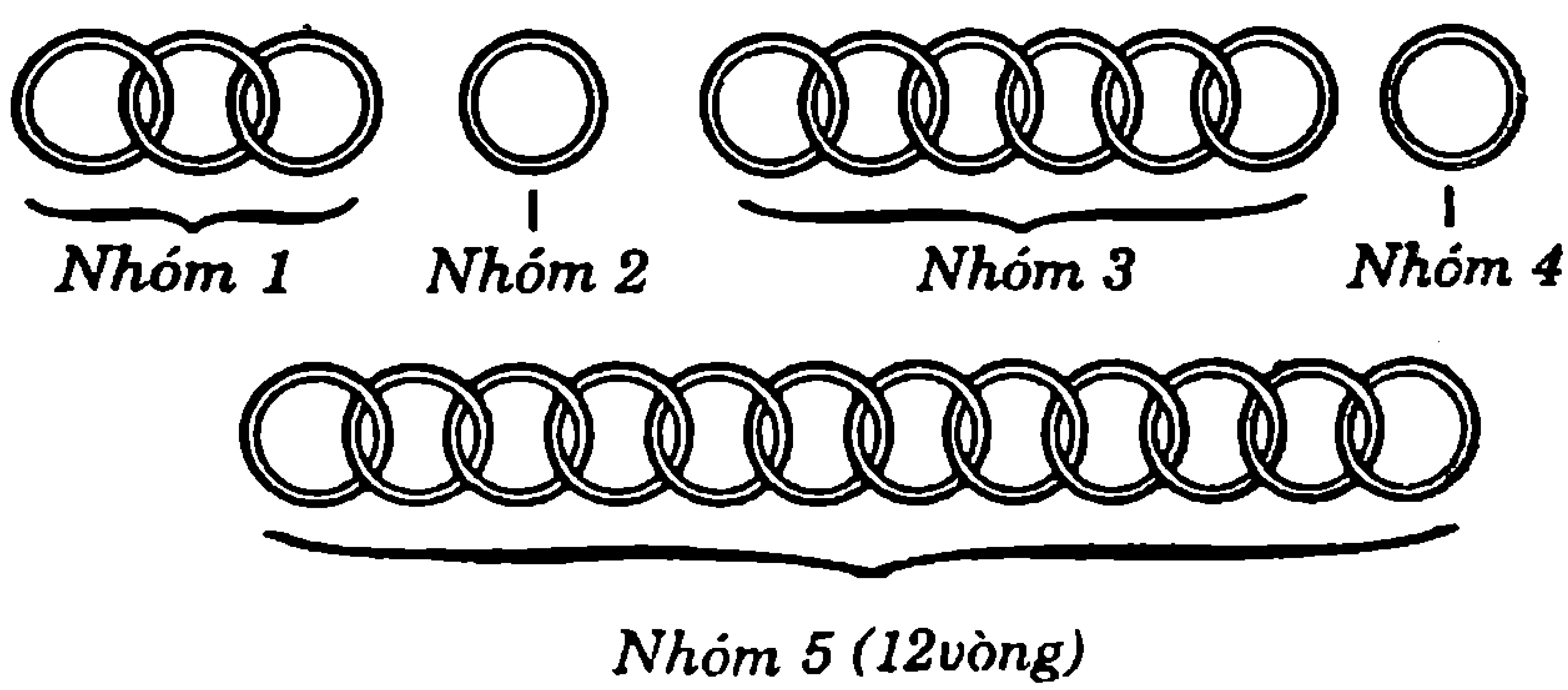
Như vậy cả bảy vòng bạc đã về tay người làm thuê.

Các vấn đề tương tự như câu chuyện này cũng xuất hiện trong cuốn sách: "A ha, nhanh trí một chút" của chuyên gia trò chơi toán học Madin Katna người Mỹ.

Điều cần phải suy nghĩ đối với vấn đề nêu trên là: Trong điều kiện cho phép cắt đứt m vòng, nhiều nhất có thể xử lý chuỗi vòng gồm bao nhiêu vòng (số vòng trong chuỗi là n) mới có thể làm được n ngày, mỗi ngày tiền công là một vòng?

Để tìm quan hệ giữa m và n, trước tiên chúng ta xét trường hợp cắt rời hai vòng đơn, tức là m = 2. Hiển nhiên, lúc này chuỗi vòng được cắt thành năm nhóm (hình 24-2), trong đó có hai nhóm là vòng đơn (một vòng) có thể lấy tiền công cho hai ngày đầu. Muốn lấy tiền công ngày thứ ba thì trả lại hai vòng đã lấy (nhóm 2 và nhóm 4) để lấy nhóm 1 (ba vòng). Ba nhóm (1, 2 và 4) đã đủ để trả công cho năm ngày đầu, vì vậy nhóm tiếp theo phải là sáu vòng (nhóm 3). Tương tự suy ra nhóm 5 phải là 12 vòng. Như vậy ta cần số vòng của năm nhóm vòng là:

1, 1, 3, 6 và 12.



Hình 24-2

Nhưng điều kiện là chỉ được cắt ra hai vòng đơn, do vậy thứ tự các nhóm phải là như hình 24-2.

Từ đó, ta có:

$$n = 1 + 1 + 3 + 6 + 12 = 23.$$

Như vậy khi m = 2 thì ta phải cắt chuỗi vòng thành năm nhóm như hình 24-2 và trả được cho 23 ngày, mỗi ngày một vòng.

Tương tự, khi m = 3 thì có thể tìm được số vòng bảy nhóm như sau:

1, 1, 1, 4, 8, 16 và 32.

Từ đó, ta có:

$$1 + 1 + 1 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63.$$

Như vậy chuỗi vòng phải gồm 63 vòng.

Ta thấy, khi cho phép cắt ra m vòng đơn thì số vòng của 2m + 1 nhóm cắt ra là:

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{m số 1}}, m + 1, 2(m + 1), \ldots, 2^m(m + 1)$$

tức là:

$$n = m + (m + 1) \times (2^{m+1} - 1) = (m + 1)2^{m+1} - 1. \quad (24\text{-}1)$$

Đây chính là giải đáp chung của vấn đề cắt chuỗi vòng.

Bây giờ chúng ta hãy xem ví dụ có liên quan đến cắt mặt phẳng, chắc chắn sẽ phức tạp hơn rất nhiều so với vấn đề cắt chuỗi vòng.

Năm 1751, L.Euler đã nêu ra vấn đề thú vị: Một hình lồi phẳng n cạnh thì có bao nhiêu biện pháp cắt thành hình tam giác theo các đường chéo?

Năm 1758, nhà toán học Xigena đã đưa ra một công thức quy nạp:

$$D_n = D_2D_{n-1} + D_3D_{n-2} + \ldots + D_{n-1}D_2, \quad (24\text{-}2)$$

để giải bài toán L.Euler đặt ra. Công thức (24-2) về sau người ta gọi là "Công thức Xigena".

Dùng (24-2) có thể tính ra các trị số khi n = 3, 4, 5... Khi n rất lớn thì tính toán có phức tạp hơn.

Đầu thế kỷ XX, nhà toán học Ureban sau khi tính $\frac{D_3}{D_2}=1$, $\frac{D_4}{D_3}=2$, $\frac{D_5}{D_4}=\frac{5}{2}$, $\frac{D_6}{D_5}=\frac{14}{5}$,... đã tìm ra công thức tổng quát:

$$\frac{D_{n+1}}{D_n}=\frac{4n-6}{n} \qquad (24\text{-}3)$$

Ureban đã dùng một biện pháp khéo léo để chứng minh (24-3). Biện pháp này có mấu chốt là đưa vào một hàm số g(x):

$$g(x) = D_2x^2 + D_3x^3 + \ldots + D_nx^n + \ldots \qquad (24\text{-}4)$$

Từ (24-2) suy ra (24-4) phải thoả mãn phương trình bậc hai:

$$W^2 - xW + x^3 = 0. \qquad (24\text{-}5)$$

Từ đó tìm được:

$$g(x)=\left(\frac{x}{2}\right)(1-\sqrt{1-4x}) \qquad (24\text{-}6)$$

Sau khi khai triển và so sánh, ta được:

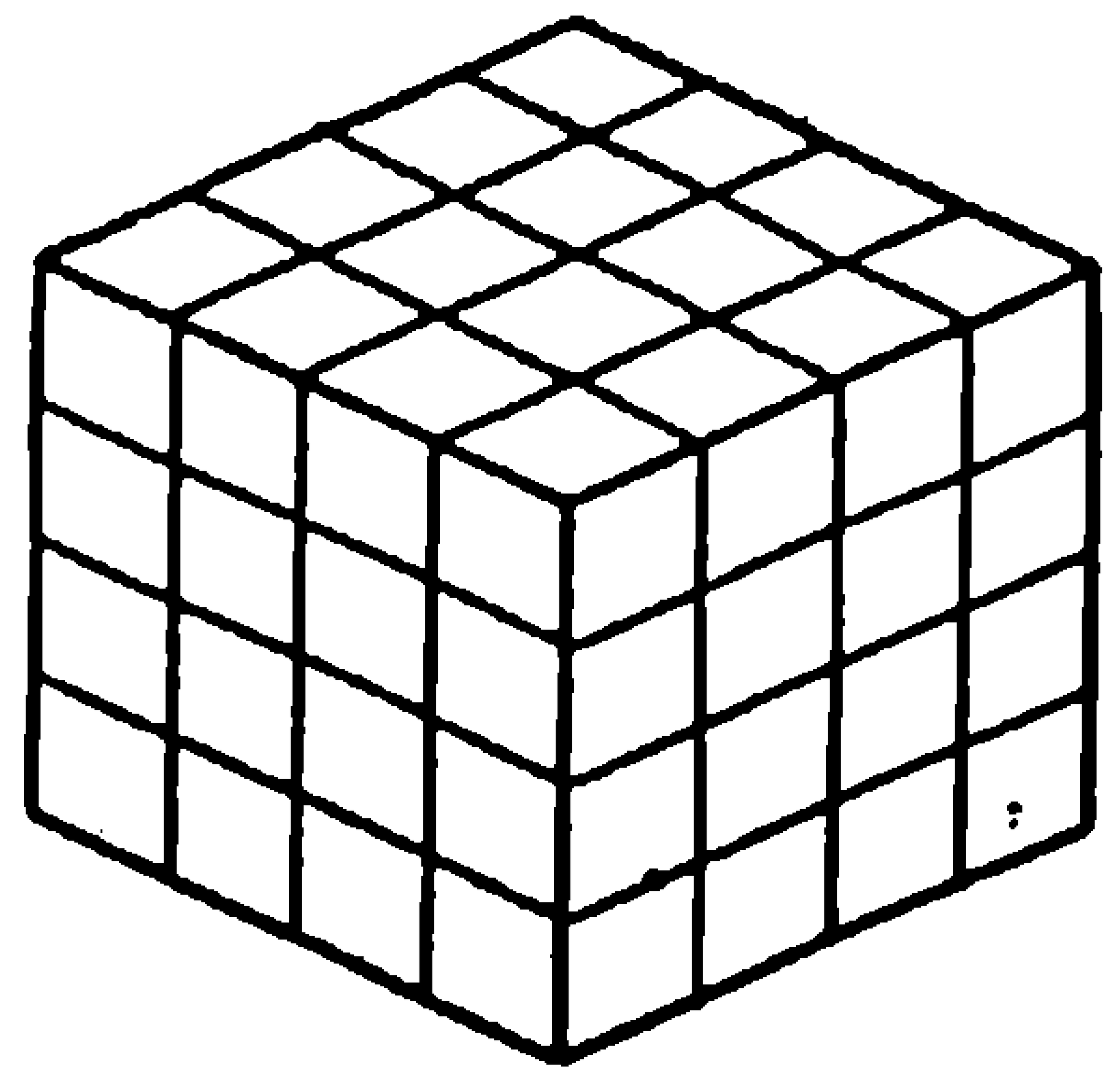
$$D_n=\frac{2\times 6\times 10\times\ldots\times(4n-10)}{1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)} \qquad (24\text{-}7)$$

Từ đó chứng minh được (24-3).

Việc dùng (24-3) thì học sinh Tiểu học cũng làm được.

Khi cắt trong không gian (khối) thì mức độ trừu tượng phức tạp hơn khi cắt trong mặt phẳng. Sau đây là một ví dụ cắt trong không gian rất có ý nghĩa, đăng ở Báo "Hai tuần toán học" của Mỹ, số ra ngày 10-9-1950, của Martin Katna:

"Nếu cắt một khối lập phương lớn thành 64 khối lập phương nhỏ (hình 24-3) thì cần mấy lát cắt?".



Hình 24-3

Nếu ta dùng cưa để cắt thì phải cắt chín lần. Nhưng nếu trong quá trình thực hiện mà sắp xếp lại các miếng vừa cắt ra thì chỉ cần sáu lần cắt là đủ để hoàn thành. Tuy vậy có một điều cần khẳng định là: số lần cắt không thể ít hơn sáu. Bởi vì các khối lập phương nhỏ ở trung tâm chưa có sẵn một số mặt như các khối lập phương nhỏ ở xung quanh nên sáu mặt của chúng đều phải cắt thành, mà hiển nhiên không thể một lần cắt mà cắt được quá một mặt, do đó số lần cắt không thể ít hơn sáu.

Tổng quát của vấn đề M.Katna đưa ra là: Cắt một khối lập phương lớn thành n^3 khối lập phương nhỏ giống nhau thì ít nhất cần mấy lần cắt?

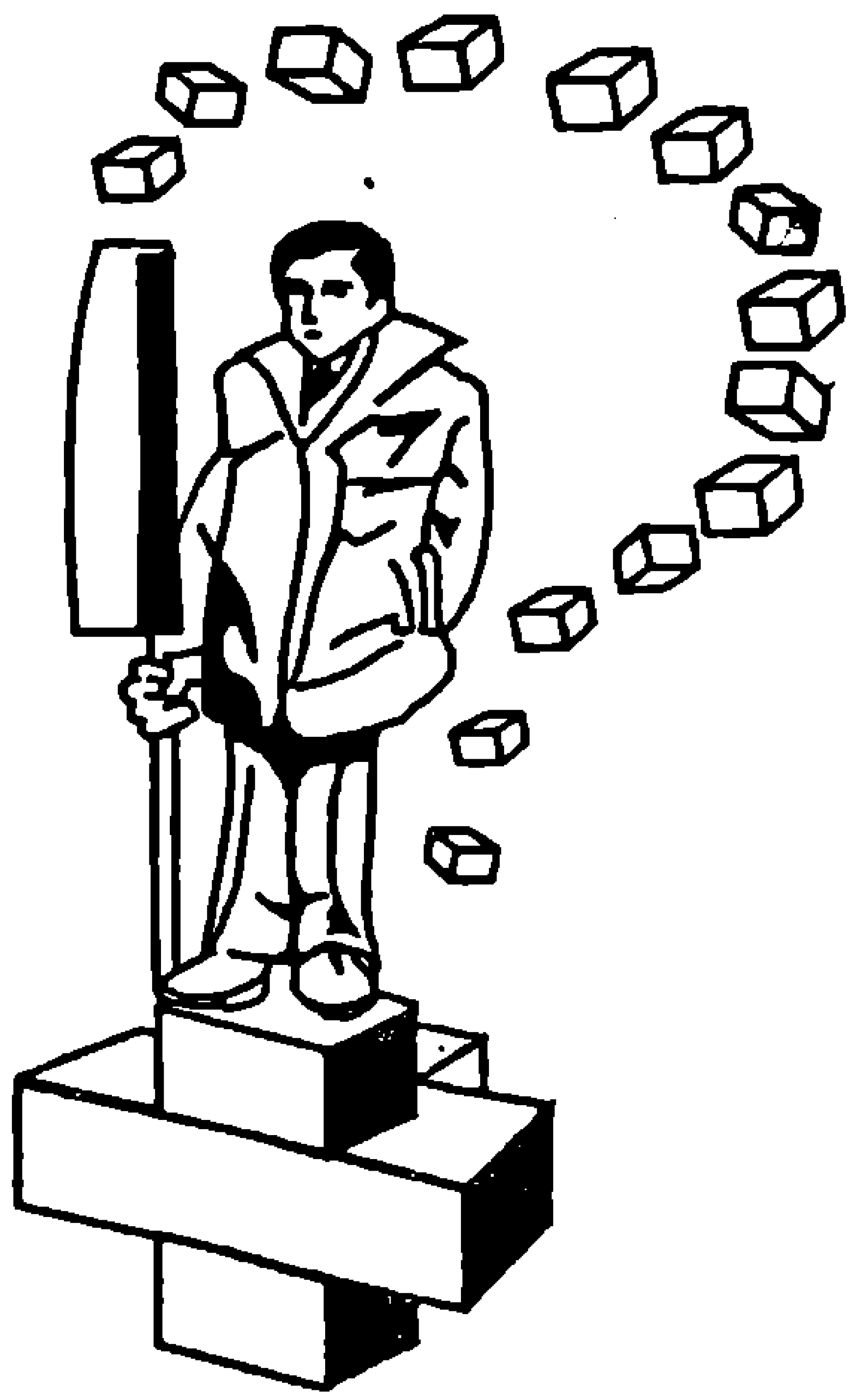
Vấn đề này tưởng là phức tạp nhưng thật ra lại giản đơn hơn vấn đề cắt trong mặt phẳng mà L.Euler đã đưa ra ở trên.

Sự thực là khi tìm số lần cắt ít nhất, như trên đã nói, nếu biết sắp xếp lại các miếng vừa cắt thì số lần cắt mới ít nhất. Người ta đã tìm được biểu thức:

$$2^k \geq n > 2^{k-1} \qquad (24\text{-}8)$$

trong đó k là số lần sắp xếp lại.

Chẳng hạn, như trường hợp M.Katna nêu ra ở trên thì $n = 4$ và từ (24-8) ta tính được $k = 2$.

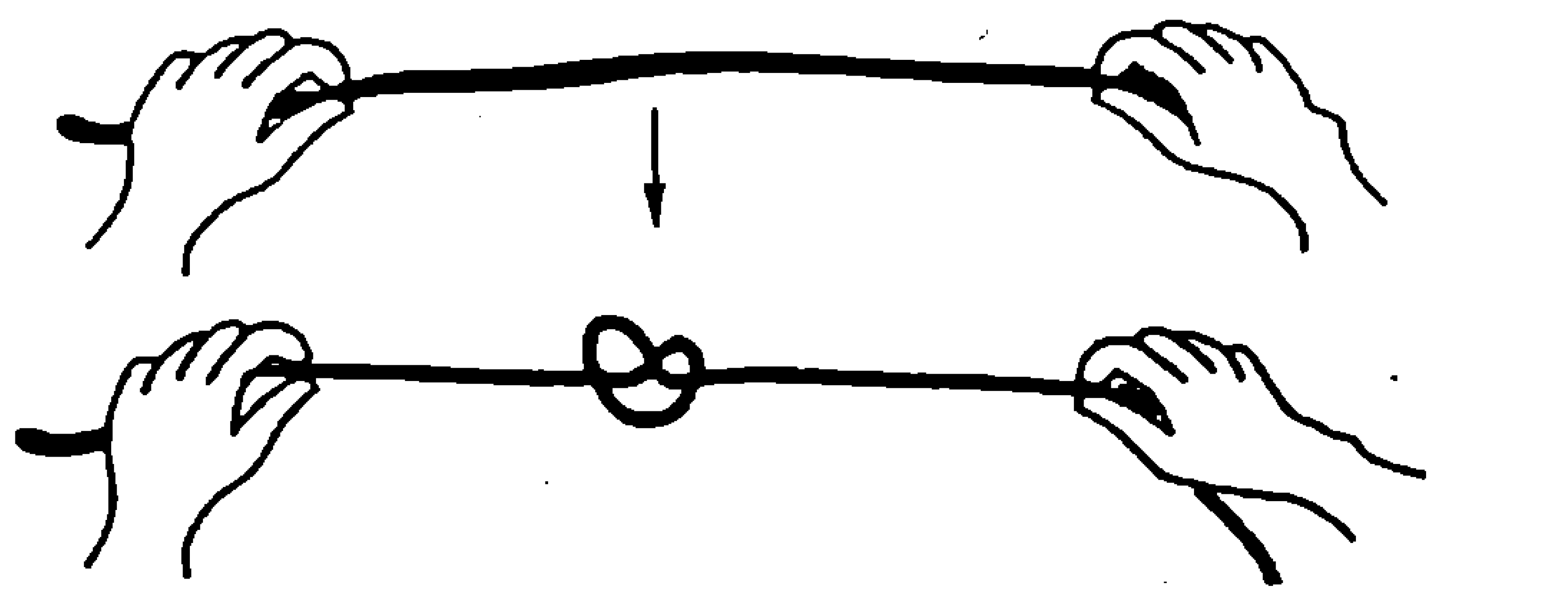


Hình 24-4

Về lý thuyết chia cắt hình thì muôn màu muôn vẻ. Có lúc vấn đề tưởng chừng đơn giản nhưng giải đáp lại không dễ, ngược lại có lúc tưởng chừng phức tạp nhưng chỉ một lời là giải đáp được.

25. SUY LUẬN NGƯỢC

Có một câu đố sau đây gần như trò chơi nhưng đã làm cho rất nhiều người thông minh mà vẫn cảm thấy lúng túng: Hai tay bạn mỗi tay giữ một đầu dây, đầu dây không được rời khỏi tay, hỏi bạn có thể thắt được một nút bình thường không? (hình 25-1).

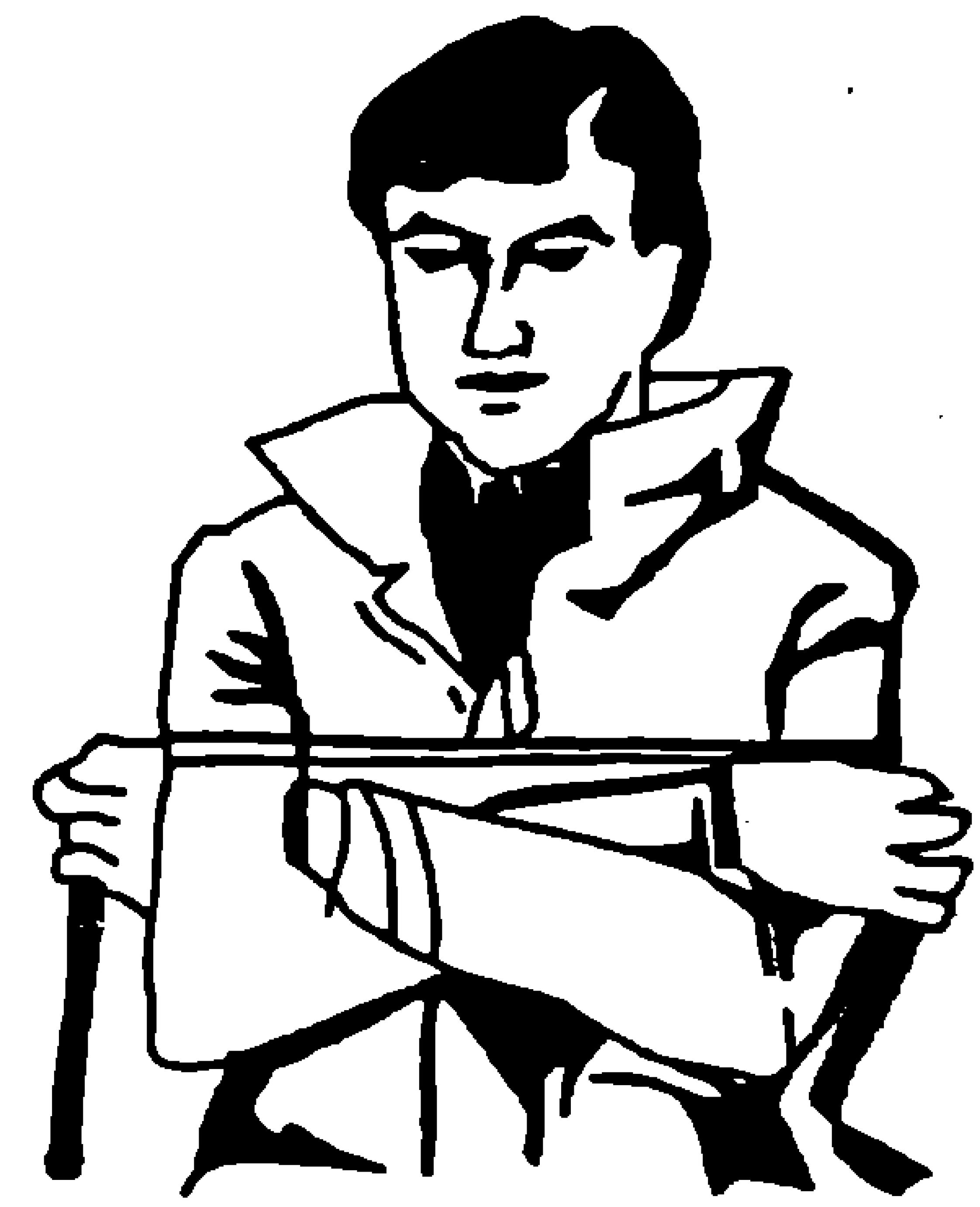


Hình 25-1

Câu trả lời là được. Có điều là rất nhiều người không nghĩ ra, bởi vì ngờ vực: dây và người tạo thành vòng tròn khép kín, làm sao bỗng dưng lại có thể tạo nên một cái nút được?

Vậy vấn đề là ở chỗ nào? Hoá ra, khi suy nghĩ người ta luôn quen đi từ nguyên nhân để tìm kết quả, mà không quen đi từ kết quả để tìm nguyên nhân. Đề trí khôn vừa nêu, nếu "Suy luận ngược" thì đáp án gần như mới nhìn đã rõ.

Sự thực là, tay chỉ là công cụ nối cơ thể với dây. Cơ thể coi như một đoạn dây ẩn, nó nối thành một hệ thống liên tục qua tay và sợi dây. Mặc dù lúc đầu, trên sợi dây nhìn thấy không hề có nút, mà sau đó lại xuất hiện một cái nút, nói rõ rằng cái nút này chắc chắn là chuyển dịch ra từ đoạn dây ẩn. Có thể thấy, chỉ cần ban đầu tay và cơ thể tồn tại một cái nút, sau đó hãy công khai hoá cái dây ẩn dấu này, biến thành một cái nút trên sợi dây nhìn thấy được. Vậy là kết quả xuất hiện trong trò chơi là có thể được. Còn như làm thế nào để cho tay đan xen vào nhau làm cho nó và cơ thể tạo thành một cái nút kín, việc này không phải là một việc khó nữa. Hình 25-2 là giải đáp đề trí khôn này. Trong hình không có một cái nút nào trên sợi dây có thể nhìn thấy được, còn cái nút ẩn dấu trên cơ thể thì có thể thấy rõ.



Hình 25-2

Một trò chơi trí khôn khác bắt nguồn từ một câu chuyện từ thời La Mã cổ đại: Thời đó có một vị quốc vương có cô con gái xinh đẹp tên là Joséphine. Đồn rằng công chúa Joséphine đang ở đầu tuổi xuân, lại tài hoa xuất chúng, lại kiều diễm hết mức, làm cho vô số chàng trai ngưỡng mộ và số người cầu hôn rất nhiều. Có điều là công chúa đã thầm yêu chàng Choizji.

Tục ngữ có câu: "Muốn được việc tốt phải dày công". Vị quốc vương là người có đầu óc xơ cứng, bảo thủ. Tuy rất yêu quý con gái nhưng ông lại nhất quyết phải tuân thủ một nghi thức truyền thống khi chọn phò mã. Nghi thức đó như sau:

Trước tiên công chúa chọn ra 10 người mà mình ưng ý trong số những người đến cầu hôn, sau đó để 10 người này vây thành một vòng quanh công chúa (hình 25-3). Tiếp theo, công chúa chọn ra một người bất kỳ làm khởi điểm, đếm từng người theo chiều kim đồng hồ, khi đến số 17 (là tuổi của công chúa) thì người này bị loại. Sau đó lại tiếp tục đếm đến số 17 và người này lại bị loại. Cứ như vậy cho đến khi chỉ còn lại một người thì đó chính là phò mã.

Hình 25-3

Làm sao để người cuối cùng đó là Choizji thân yêu? Joséphine suy nghĩ khổ sở về điều này. Cô lấy ra 10 đồng tiền quây thành một vòng, thử đi thử lại, cuối cùng đã tìm ra cách "Vừa ý thoả lòng".

Hoá ra Joséphine đã phát hiện ra rằng: Dù cho bắt đầu từ đồng tiền nào, nếu đến số 17 thì số đó bị loại, đồng tiền cuối cùng còn lại luôn là đồng tiền thứ ba kể từ đồng tiền chọn đếm số 1 ban đầu. Thế là trong nghi thức, công chúa không hề do dự chọn người trước Choizji hai người làm khởi điểm.

Thế còn các trường hợp: Tuổi của công chúa không phải là 17 hoặc số người chọn không phải là 10 thì sao? Bạn đọc hãy tiếp tục giải quyết.

Vấn đề của Joséphine cũng được gọi là "Vấn đề mưu mẹo", đã được nhà toán học nổi tiếng Niccolo Tartaglia (1499 - 13.12.1557) người Italia thay hình đổi dạng sưu tập vào trước tác. Ở Nhật Bản, loại vấn đề này gọi là "Kế tử lập", ý là những người kế thừa tài sản quây thành một vòng, theo thứ tự loại bỏ dần để còn lại một số người nào đó. Ở châu Âu, vấn đề này còn mang những bộ mặt khác nhau, xuất hiện trong trò chơi trí khôn, thậm chí còn xuất bản thành sách. Có điều, cách giải quyết vấn đề này đều nhờ vào "Suy luận ngược".

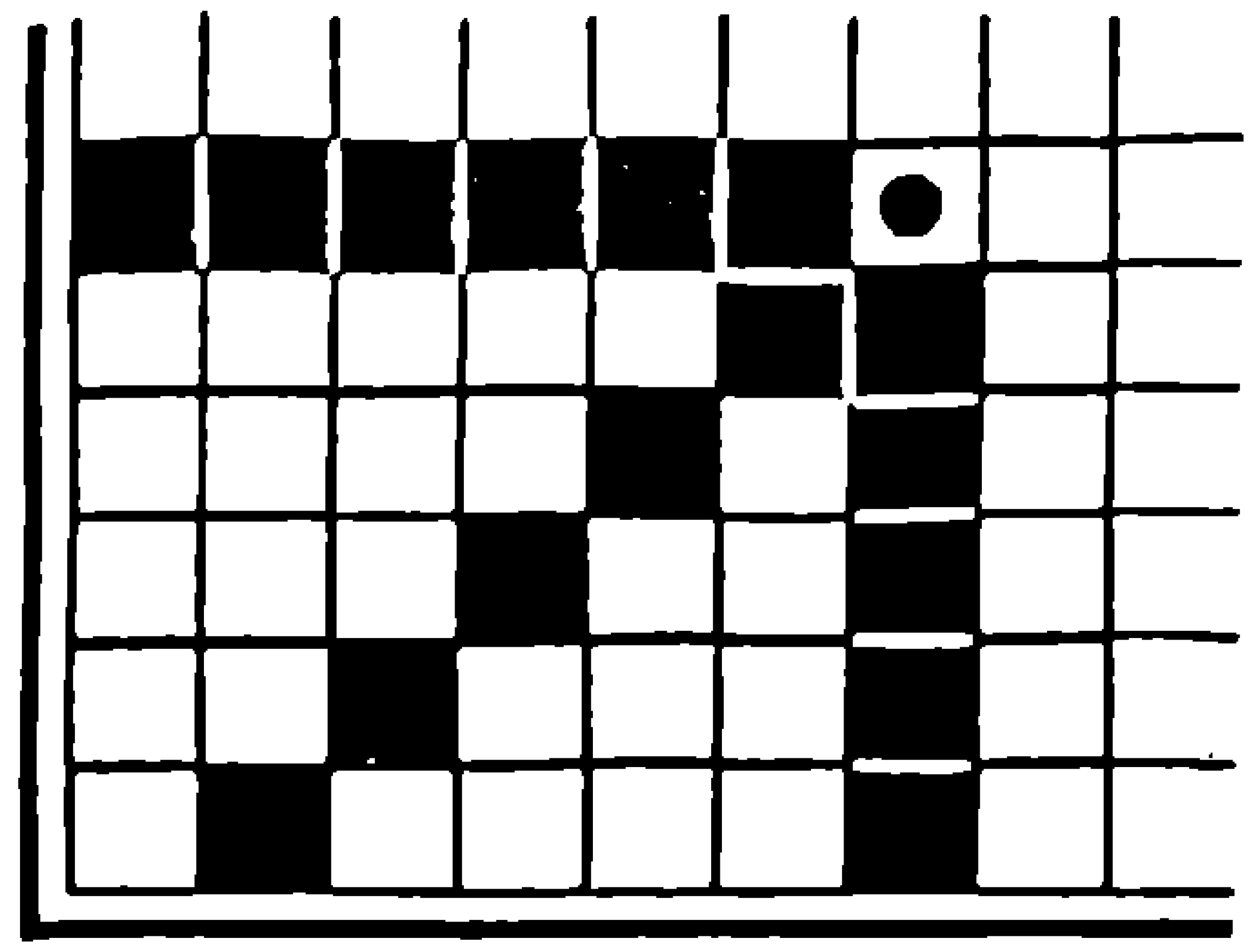
Vậy "Suy luận ngược" là gì?

Thực chất của "Suy luận ngược" là xuất phát từ kết quả, từng bước ngược lên ngọn nguồn nguyên nhân phía trước, do đó thường trở thành con đường giành thắng lợi của những đối sách ứng phó với trò chơi.

"Giành một trăm" là trò chơi nhi đồng lưu truyền rộng rãi trong dân gian ở Trung Quốc. Cách chơi cực kỳ đơn giản: Hai người bắt đầu từ 1 thay nhau báo số liền nhau, mỗi người mỗi lần báo một số, nhiều nhất là báo năm số liền nhau, ai báo trước "100" đầu tiên sẽ giành thắng lợi.

Trò chơi này người báo số đầu tiên chỉ cần nắm lấy then chốt chuyển biến thì tất nhiên là giành thắng lợi. Sự thực là, muốn giành được "100" thì phải giành "94", muốn giành được "94" thì phải giành trước đến "88",... Cái đầu tiên trong một loạt điểm chiến thắng này là "4", ai báo trước đến "4", người đó có thể cuối cùng báo được "100", cho nên người thứ nhất báo số chỉ cần mỗi lần giành trước điểm chiến thắng thì có thể cầm chắc vé chiến thắng.

Một loại trò chơi khác là hai người tiến hành trên bàn cờ vây. Người đi trước có thể đặt một quân cờ ở hàng trên cùng hoặc ở cột tận cùng bên phải của bàn cờ mà mình cho là ô thích hợp nhất. Tiếp theo, hai người thay nhau đi các quân cờ. Phương thức đi chỉ có thể là một trong ba loại: sang trái, xuống dưới, sang trái xuống dưới (chéo), như các ô đen ở hình 25-4. Chỉ có thể đi vào các ô đen trong hình, đi bao nhiêu ô tuỳ ý nhưng không được không đi. Ai đi quân cờ xuống ô góc trái phía dưới cùng trước tiên là thắng.

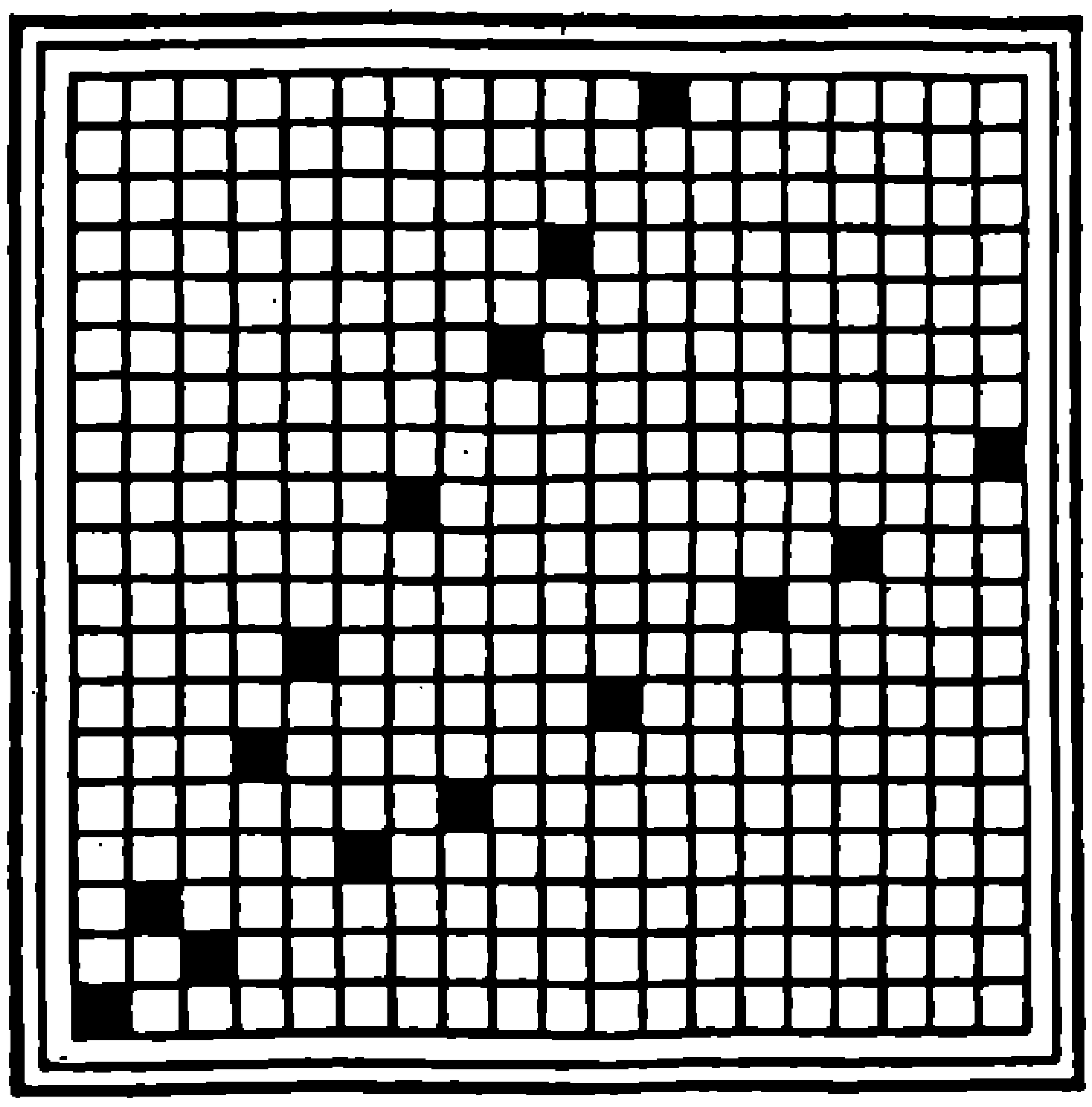


Hình 25-4

Trò chơi vừa nêu tuy phức tạp hơn rất nhiều so với "giành một trăm" nhưng con đường giành thắng lợi là như nhau, cách sử dụng chiến thuật đều là "Suy luận ngược".

Các ô đen ở hình 25-5 là các vị trí chiến thắng. Chỉ cần một bên của đối sách hễ chiếm lĩnh được vị trí chiến thắng nào đó, sau này luôn có cách lần lượt chiếm lĩnh các vị trí chiến thắng cho đến thắng lợi cuối cùng. Nhưng các ô đen này tìm như thế nào? Bạn đọc hãy suy nghĩ xem.

"Suy luận ngược" là một phương pháp tư duy quan trọng. Nó dùng một loại phương thức khơi thông quan hệ giữa nguyên nhân và kết quả. Hẳn bạn đọc còn nhớ "lục thông" ở mục 15: "Ma phương khối", nhưng có thể không biết rằng sáu thang gỗ cấu thành "lục thông" chưa chắc đã là duy nhất. Hiện nay người ta cũng chưa khẳng định cái "lục thông" mà Lỗ Ban làm có dạng đúng như giới thiệu ở mục 15 hay không. Chẳng qua người ta đã dùng "Suy luận ngược" để suy ra cấu tạo "lục thông" ban đầu mà thôi.

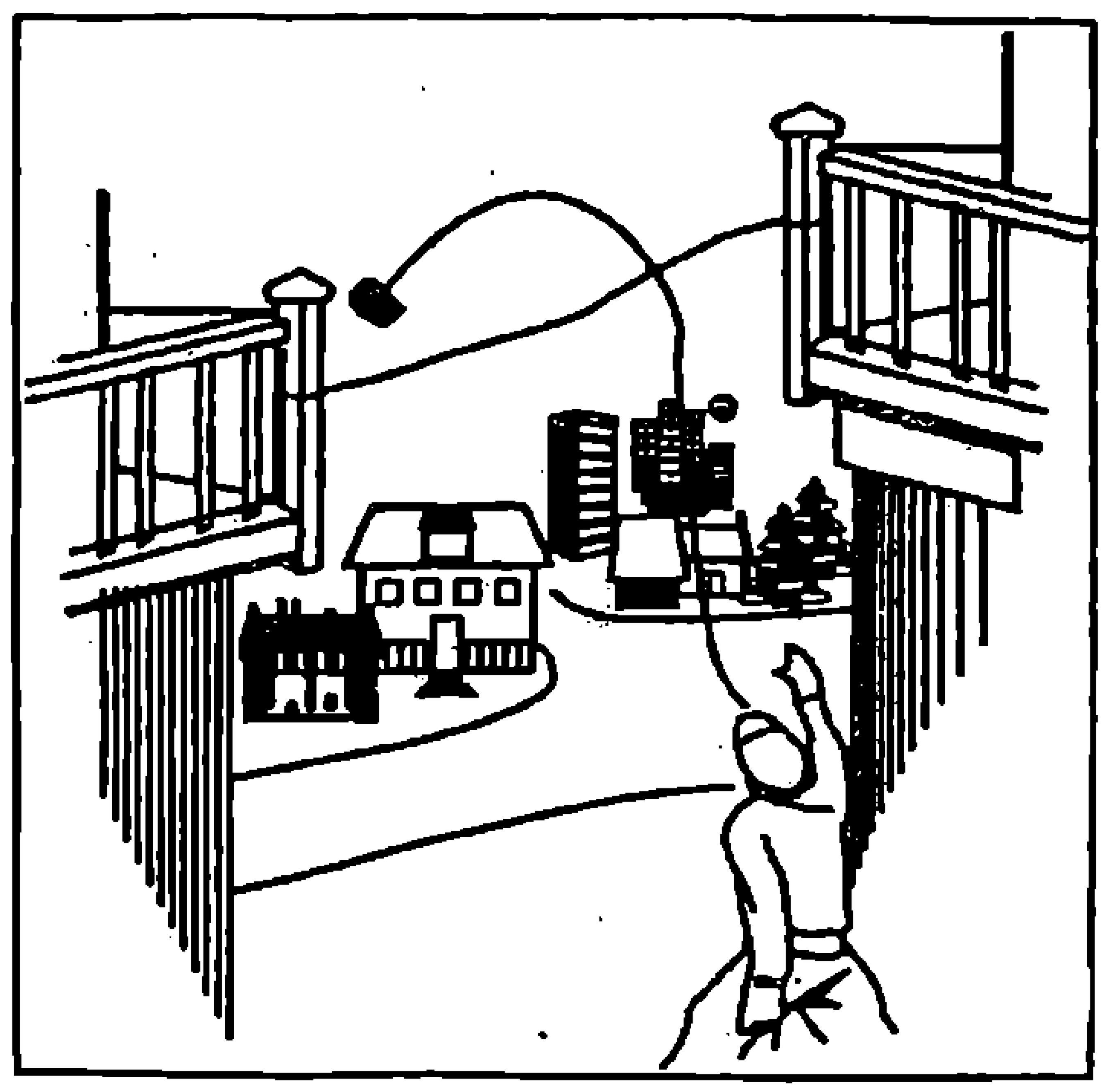


Hình 25-5

26. CẦU NỐI GIỮA TƯỞNG TƯỢNG VÀ HIỆN THỰC

Trong sự tưởng tượng vô cùng phong phú của nhân loại, đã thai nghén vô số những sáng tạo và phát minh. Song những sáng tạo mới, có ý nghĩa đã vượt qua những kinh nghiệm cụ thể. Giữa tưởng tượng của trừu tượng với hình tượng cụ thể, chắc chắn cần một cầu nối sinh động. Các loại hình vẽ chính là cầu nối thường gặp nhất giữa tưởng tượng và hiện thực.

Ngày 18-4-1985, trong cuộc triển lãm quốc tế lần thứ 13 về phát minh và kỹ thuật mới, tổ chức Genève (Thụy Sĩ) có "Dụng cụ móc dây" do học sinh tiểu học Mao Gia Lăng (Thượng Hải, Trung Quốc) phát minh ra, gây chú ý cho khách xem và không ít người hâm mộ bởi cách suy nghĩ kỳ diệu của tác giả. Đài phát thanh quốc gia Thụy Sĩ đã truyền tin trực tiếp 8 phút về việc này.



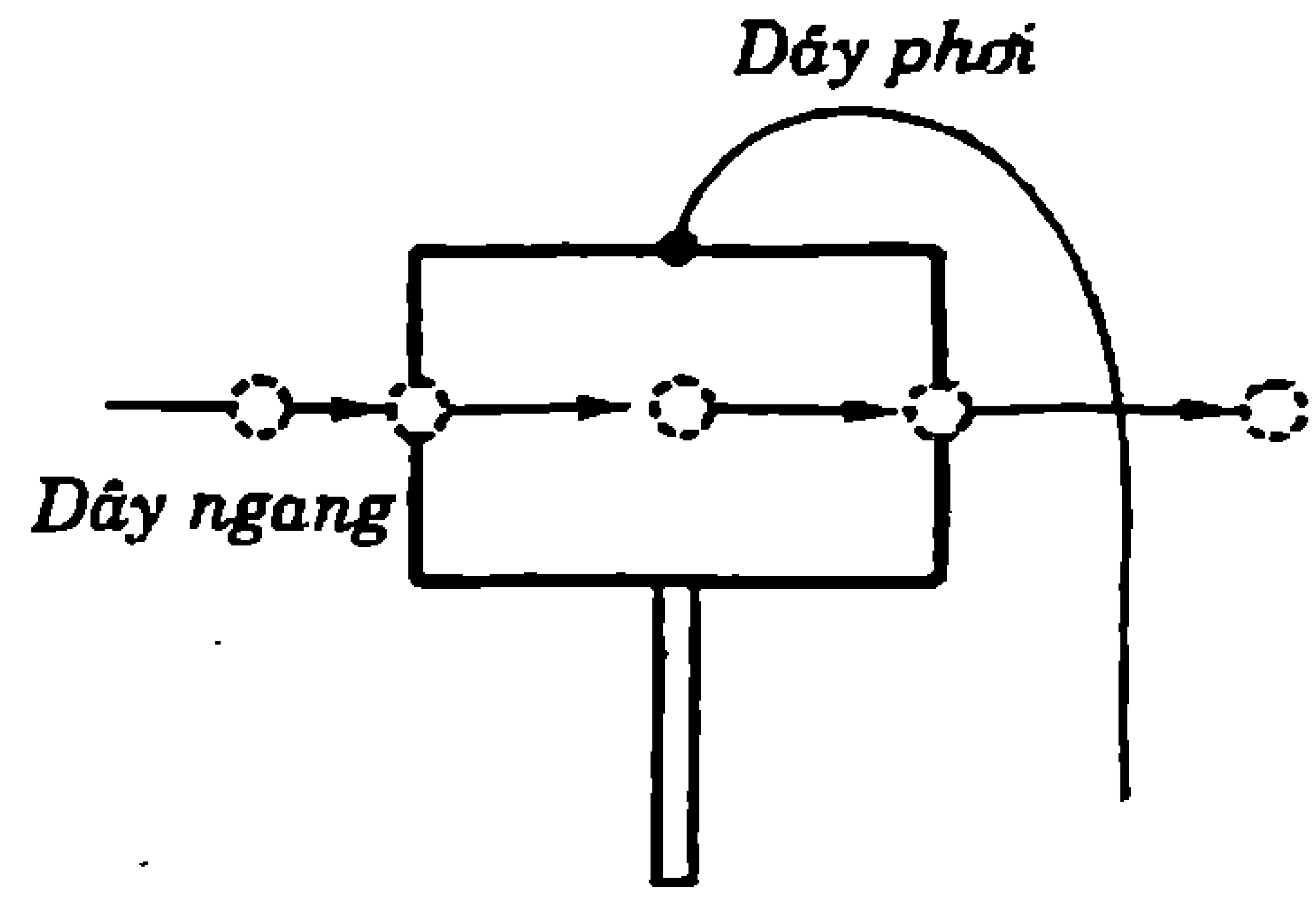
Hình 26-1

Vậy "Dụng cụ móc dây" như thế nào?

"Dụng cụ móc dây" được tạo ra để khắc phục tình trạng khi buộc dây phơi quần áo, muốn buộc một dây với một dây khác hay sào phơi,... trên cao, người ta thường dùng một vật nặng buộc vào đầu dây để ném qua (hình 26-1).

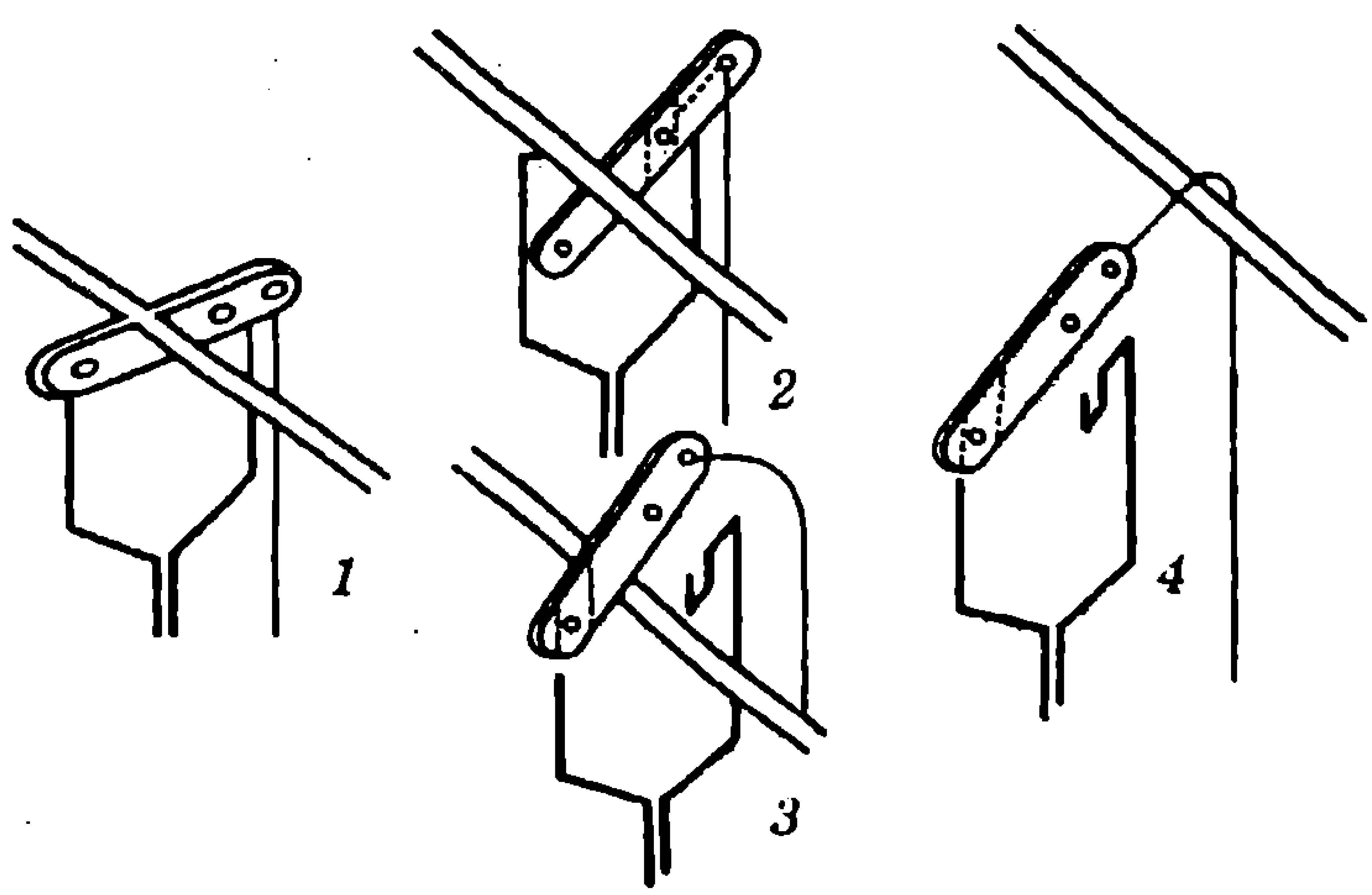
Quá trình tưởng tượng để sáng tạo ra "Dụng cụ móc dây" như sau: Khi dây ngang hay sào muốn vào được trong khung hình chữ nhật (hình 26-2) thì phải có một "cửa" chế tạo đặc biệt tự động mở ra để dây ngang hoặc sào chui vào. Dây ngang hoặc sào vào được trong khung hình chữ nhật thì "cửa" tự động đóng lại. Khi dây ngang hoặc sào muốn ra khỏi khung hình chữ nhật cũng qua một "cửa" chế tạo đặc biệt để ra, ra xong "cửa" cũng tự động đóng lại ngay.

Mao Gia Lăng lúc đó 14 tuổi, đã vận dụng sự thông minh và tài trí của mình, kéo một cầu nối giữa tưởng tượng và hiện thực, từ đó hoàn thành một phát minh đơn giản nhưng hữu ích.



Hình 26-2

Hình 26-3 là "Dụng cụ móc dây" của Mao Gia Lăng trong thực tế. Nó giành được giải bạc của hàng triển lãm loại I quốc tế về phát minh và kỹ thuật mới và được Tổ chức Quyền tài sản trí thức thế giới (WIPO) tặng "Giải phát minh trẻ tốt nhất".



Hình 26-3

MỤC LỤC

NHỮNG CÂU CHUYỆN LÝ THÚ VỀ HÌNH HỌC

Nguyễn Bá Đô

NHÀ XUẤT BẢN DÂN TRÍ

Số 9 - Ngõ 26 - Phố Hoàng Cầu - TP. Hà Nội

ĐT: (04) 66860751 - (04) 66860752

VPGD: số 45 TT2 KĐT Văn Phú - Q. Hà Đông - TP. Hà Nội

Email: nxbdantri@gmail.com

Website: nxbdantri.com.vn

Chi nhánh NXB Dân Trí tại miền Trung và Tây Nguyên

63 Phan Đăng Lưu - phường Hoà Cường Nam

quận Hải Châu - TP. Đà Nẵng

ĐT: (051)16254168 - (051)16254105 * Fax: (051)16254101

Email: dantridanang@gmail.com

Chịu trách nhiệm xuất bản:

BÙI THỊ HƯƠNG

Chịu trách nhiệm bản thảo:

NGUYỄN PHAN HÁCH

Biên tập:	**Ban Biên tập**
Vẽ bìa:	**Dương Thanh**
Chế bản:	**Thu Huế**
Sửa bản in:	**Thu Hà**

In 1500 cuốn, khổ 14,5x20,5cm tại TTCN In Khảo sát và Xây dựng. Quyết định xuất bản số 240-2013/CXB/20-07/DT do Nhà xuất bản Dân trí cấp ngày 3 tháng 5 năm 2013. In xong, nộp lưu chiểu Quý II - 2013.