

TUYỂN TẬP 100 ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN KHỐI 8 CÁC TỈNH-HUYỆN NĂM 2023-2024



Người tổng hợp, sưu tầm : Thầy giáo Hồ Khắc Vũ
Zalo-hotline : 03.4348.1625-03.5352.6757

Thành phố Tam Kỳ - tỉnh Quảng Nam
15-03-2024

PHÒNG GD & ĐT SƠN

ĐỀ KHẢO SÁT SINH GIỎI CẤP HUYỀN

HÒA

LỚP 8 NĂM HỌC 2023-2024

MÔN TOÁN

Thời gian : 150 phút (*không kể thời gian giao*

đề)

Bài 1:(4 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

1) $(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$

2) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$

Bài 2: (3 điểm)

1) Với giá trị nào của a và b thì đa thức : $x^3 + ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa

thức: $x^2 + x + 1$.

2) Chứng minh rằng $x^5 - 5x^3 + 4x$ chia hết cho 120 với mọi x nguyên

Bài 3 : (3 điểm)

Giải các phương trình sau:

1) $x^2 - 4x + 4 = 25$

2) $\frac{x-17}{2001} + \frac{x-21}{1997} + \frac{x+2}{1010} = 4$

Bài 4 :(4 điểm)

1) Chứng minh rằng : $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$

2) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Bài 5: (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Điểm M thuộc cạnh BC . Gọi E và F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB , AC . Chứng minh rằng khi M chuyển động trên BC thì:

- 1) Chu vi của tứ giác $MEAF$ không đổi.
- 2) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định.
- 3) Tam giác KEF có diện tích nhỏ nhất khi M là trung điểm của BC .

- Hết -

(*Giám thị không giải thích gì thêm*)

Bài	Ý	Đáp án	Điểm	
1	1	$(x^2 + x)^2 - 2(x^2 + x) - 15$		
		Đặt $y = x^2 + x$ ta được	0,25	
		$y^2 - 2y - 15 = y^2 - 5y + 3y - 15$	0,5	
		$= y(y - 5) + 3(y - 5)$	0,5	
		$= (y - 5)(y + 3)$	0,25	
			$= (x^2 + x - 5)(x^2 + x + 3)$	0,5
	2	$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$		
		$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$		
		Đặt $a = x^2 + 5x + 4$ ta được	0,25	
		$a(a + 2) - 24 = a^2 + 2a - 24$		

		$= a^2 + 6a - 4a - 24$	0,5
		$= a(a + 6) - 4(a + 6)$	0,25
		$= (a + 6)(a - 4)$	0,5
		$= (x^2 + 5x + 10)(x^2 + x)$	0,25
		$= x(x + 1)(x^2 + 5x + 10)$	0,25
2	1	Đa thức : $x^3 + ax^2 + 2x + b$ chia hết cho đa thức: $x^2 + x + 1$ thì ta được một nhị thức bậc nhất có hệ số bậc 1 bằng 1 và hệ số tự do bằng b nên ta có:	0,5
		$x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)(x + b)$	
		$= x^3 + bx^2 + x^2 + bx + x + b$	0,5
		$\Leftrightarrow (a - b + 1)x^2 + (2 - b)x = 0$	
		$\Leftrightarrow b = 2$ và $a = -1$	0,5
	2	Chứng minh rằng $x^5 - 5x^3 + 4x$ chia hết cho 120	

		$x^5 - 5x^3 + 4x = x(x^4 - 5x^2 + 4)$ $= x(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4)$ $= x[x^2(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1)]$ $= x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ $= (x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2)$ <p>Ta có $x - 2$; $x - 1$; x ; $x + 1$; $x + 2$ là 5 số nguyên liên tiếp với</p> <p>mọi x nguyên nên</p> $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) : 5!$ <p>Hay $(x - 2)(x - 1)x(x + 1)(x + 2) : 120$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
3	1	$x^2 - 4x + 4 = 25 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 5^2$ $\Leftrightarrow x - 2 = 5 \quad \text{hoặc} \quad x - 2 = -5$ $\Leftrightarrow x = 7 \quad \text{hoặc} \quad x = -3$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

		$\frac{x-17}{2001} + \frac{x-21}{1997} + \frac{x+2}{1010} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{x-17}{2001} - 1 + \frac{x-21}{1997} - 1 + \frac{x+2}{1010} - 2 = 0$ $\Leftrightarrow \frac{x-2018}{2001} + \frac{x-2018}{1997} + \frac{x-2018}{1010} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2018) \left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{1997} + \frac{1}{1010} \right) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2018$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
4		$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq a + b + c$ $\Leftrightarrow \left(a^2 - a + \frac{1}{4} \right) + \left(b^2 - b + \frac{1}{4} \right) + \left(c^2 - c + \frac{1}{4} \right) > 0$ $\Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(c - \frac{1}{2} \right)^2 > 0 \text{ luôn đúng với mọi } a, b, c$	2

			0,5
	H.v		
5	1	<p>Xét MEAF : có $A = E = F = 90^0$</p> <p>\Rightarrow MEAF là hình chữ nhật.</p> <p>$\Rightarrow ME = AF; \quad MF = AE$</p> <p>Mặt khác : $\triangle ABC$ vuông cân</p>	0,5

	<p>Nên $\triangle CFM$ vuông cân</p> <p>$\Rightarrow CF = FM = AE$</p> <p>Nên chu vi $MEAF = AE + EM + FM + AF$</p> <p>$= 2(AF + FM) = 2(AF + FC)$</p> <p>$= 2AC$ không đổi vì AC không đổi.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>Gọi K là điểm đối xứng của A qua BC.</p> <p>Vì $\triangle ABC$ vuông cân nên AK cũng là đường trung trực của BC</p> <p>Suy ra : $ABKC$ là hình vuông.</p> <p>Gọi $P = FM \cap BK$; $Q = ME \cap CK$; H là hình chiếu của M xuống EF.</p> <p>Suy ra : + $MPKQ$ là hình chữ nhật.</p> <p>+ $MFCQ$; $MEBP$ là hình vuông.</p>	<p>0,5</p>

	<p>Xét $\triangle MFE$ và $\triangle KPM$:</p> <p>$FM = KP$ (= MQ); $ME = MP$ (2 cạnh của hình vuông $MEBP$);</p> <p>$\angle EMF = \angle P = 90^\circ$</p> <p>Nên $\triangle MFE = \triangle KPM$ (c - g - c)</p> <p>Suy ra: $\angle MEF = \angle KMP$</p> <p>Mặt khác : $\angle MEF + \angle EMH = 90^\circ$</p> <p>Nên $\angle MEF + \angle EMH + \angle EMP = 180^\circ$ hay M; H và K thẳng hàng.</p> <p>Vậy HM luôn đi qua điểm K cố định hay đường thẳng đi qua M vuông góc với EF luôn đi qua điểm K cố định.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	$S_{KEF} = S_{ABCD} - (S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK})$	

		<p>mà $S_{CKF} + S_{BEK} = \frac{1}{2}(CK \cdot CF + KB \cdot EB) =$</p> $\frac{1}{2}KB \cdot (EB + CF) = \frac{1}{2}KB \cdot AB = \frac{S_{ABCD}}{2}$ <p>Vậy S_{KEF} nhỏ nhất khi S_{AEF} lớn nhất.</p> <p>Mặt khác : $S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF$ đạt giá trị lớn nhất khi $AE = AF$ (</p> <p>bđthức Cô si)</p> <p>Hay $\text{Max } S_{AEF} = \frac{1}{2}AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{S_{ABCD}}{8}$</p> <p>Nên $\text{Min } S_{KEF} = S_{ABCD} - (S_{AEF} + S_{CKF} + S_{BEK}) =$</p> $S_{ABCD} - \left(\frac{S_{ABCD}}{2} + \frac{S_{ABCD}}{8} \right) = \frac{3S_{ABCD}}{8}$	0,5
			0,5
			0,5

			0,5
--	--	--	-----

(***Ghi chú** : Nếu học sinh giải theo cách khác đúng thì cũng cho đủ điểm câu hỏi*

đó)

TRƯỜNG THCS NGHĨA ĐỒNG

ĐỀ THI KĐCL VÒNG 2 MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2023-2024

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (4 điểm) Cho biểu thức: $P = \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\right)$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = 7$.

Câu 2: (3 điểm)

a) Tìm a nguyên để $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ chia hết cho $a^2 + 3$.

b) Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11}$ với $\frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}$.

Câu 3: (4 điểm)

a) Cho x, y là số hữu tỷ khác 1 thỏa mãn $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1$.

Chứng minh $M = x^2 + y^2 - xy$ là bình phương của một số hữu tỷ

b) Tìm số nguyên tố p sao cho $2p + 1$ là lập phương của một số tự nhiên.

Câu 4: (7 điểm)

Cho điểm M di động trên đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông $AMCD$, $BMEF$.

a) Chứng minh rằng: $AE \perp BC$.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC . Chứng minh ba điểm D , H , F thẳng hàng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB .

Câu 5: (2 điểm)

a) Cho $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng nếu $2n+1$ và $3n+1$ là các số chính phương thì n chia hết cho 40.

b) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2$.

----- Hết -----

Họ và tên:Số báo danh:

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	1. ĐKXĐ: $x \neq 1$.	0.5đ
	<p>Ta có: $P = \left(1 + \frac{x}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3 - x^2 + x - 1}\right)$</p> $= \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}\right) : \left(\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} - \frac{2x}{(x-1)(x^2 + 1)}\right)$	0.5đ

	$= \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right) : \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x^2 + 1)} \right) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x-1)(x^2 + 1)}{(x-1)^2}$ $= \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$ <p>Vậy với $x \neq 1$ ta có $P = \frac{x^2 + x + 1}{x-1}$.</p>	0.5đ
		0.5đ
1b	<p>2. Với $P = 7 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x-1} = 7$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 7(x-1).$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(\text{TM}) \\ x = 4(\text{TM}) \end{cases}$</p>	0.5đ

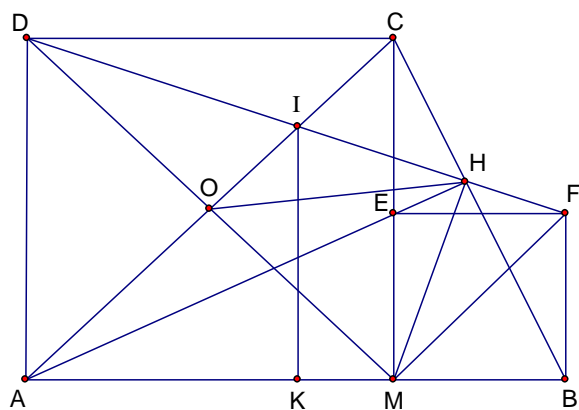
	Vậy $P = 7$ với $x \in \{2; 4\}$.	1.0đ
		0.5đ
2a	+) Thực hiện phép chia $a^3 - 2a^2 + 7a - 7$ cho $a^2 + 3$, kết quả :	
	$a^3 - 2a^2 + 7a - 7 = (a^2 + 3)(a - 2) + (4a - 1)$	0,25đ
	+) Lập luận để phép chia hết thì $4a - 1$ phải chia hết cho $a^2 + 3$	
	$(4a - 1) : (a^2 + 3)$	0,25đ
	$\Rightarrow (4a - 1)(4a + 1) : (a^2 + 3)$ (vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $4a + 1 \in \mathbb{Z}$)	
	$\Rightarrow (16a^2 - 1) : (a^2 + 3)$	0,25đ
	$\Rightarrow [16(a^2 + 3) - 49] : (a^2 + 3)$	
	$\Rightarrow 49 : (a^2 + 3)$	
	+) Tìm a, thử lại và kết luận $a \in \{-2; 2\}$	

		0,5đ
		0,25đ
2b	<p>Ta có $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 = 3x - 1$</p> <p>Khi đó $x^3 = x^2 \cdot x = (3x - 1)x = 3x^2 - x = 3(3x - 1) - x = 8x - 3$</p> <p>$x^4 = x^3 \cdot x = (8x - 3)x = 8x^2 - 3x = 8(3x - 1) - 3x = 21x - 8$</p> <p>$x^5 = x^4 \cdot x = (21x - 8)x = 21x^2 - 8x = 21(3x - 1) - 8x = 55x - 21$</p> <p>Suy ra $P = \frac{x^5 - 4x^3 - 17x + 9}{x^4 + 3x^2 + 2x + 11} = \frac{(55x - 21) - 4(8x - 3) - 17x + 9}{(21x - 8) + 3(3x - 1) + 2x + 11}$</p> <p>$= \frac{6x}{32x} = \frac{3}{16}$ (do $x \neq 0$). Vậy $P = \frac{3}{16}$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

		0,5
3a	<p>Ta có $\frac{1-2x}{1-x} + \frac{1-2y}{1-y} = 1 \Leftrightarrow (1-2x)(1-y) + (1-2y)(1-x) = (1-x)(1-y)$</p> <p>$\Leftrightarrow 1-y-2x+2xy+1-x-2y+2xy = 1-x-y+xy \Leftrightarrow x+y = \frac{3xy+1}{2}$</p> <p>Ta có $M = x^2 + y^2 - xy = (x+y)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy+1}{2}\right)^2 - 3xy = \left(\frac{3xy-1}{2}\right)^2$</p> <p>Vì $x, y \in \mathcal{Q}$ nên $\frac{3xy-1}{2}$ là số hữu tỷ.</p> <p>Vậy M là bình phương của một số hữu tỷ</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,75đ</p> <p>0,5</p>

3b	Đặt $2p + 1 = a^3$ ($a \geq 0$)	
	Vì p là số nguyên tố và $2p + 1 = a^3 \Rightarrow a$ lẻ. Đặt $a = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$)	0.5đ
	Khi đó: $2p + 1 = (2k + 1)^3$ $\Leftrightarrow 2p = (2k + 1)^3 - 1$	
	$\Leftrightarrow 2p = 2k(4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 + 1)$ $\Leftrightarrow p = k(4k^2 + 6k + 3)$	0.5đ
	$\Rightarrow \begin{cases} p \vdots k \\ p \vdots 4k^2 + 6k + 3 \end{cases}$	0.5đ
	Do p là số nguyên tố, $k < 4k^2 + 6k + 3 \Rightarrow k = 1$ Khi đó : $p = 13$ (là số nguyên tố) Thử lại: $2.13+1 = 27 = 3^3$	0.5đ

Vậy số nguyên tố cần tìm là 13.



$$\triangle AME = \triangle CMB \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \angle EAM = \angle BCM$$

$$\text{Mà } \angle BCM + \angle MBC = 90^\circ \Rightarrow \angle EAM + \angle MBC = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$$

Vậy $AE \perp BC$

0,5đ

		0,5đ
		0,5đ
		0,5đ
4b	Gọi O là giao điểm của AC và BD.	
	ΔAHC vuông tại H có HO là đường trung tuyến	0,5đ
	$\Rightarrow HO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DM$	0,5đ
	$\Rightarrow \Delta DHM$ vuông tại H	
	$\Rightarrow \angle DHM = 90^0$	0,5đ
		0,5đ

	<p>Chúng minh tương tự ta có: $\angle MHF = 90^0$</p> <p>Suy ra: $\angle DHM + \angle MHF = 180^0$</p> <p>Vậy ba điểm D, H, F thẳng hàng.</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
4c	<p>Gọi I là giao điểm của AC và DF.</p> <p>Ta có: $\angle DMF = 90^0 \Rightarrow MF \perp DM$ mà $IO \perp DM \Rightarrow IO \parallel MF$</p> <p>Vì O là trung điểm của DM nên I là trung điểm của DF</p> <p>Kẻ $IK \perp AB$ ($K \in AB$)</p> <p>$\Rightarrow IK$ là đường trung bình của hình thang ABFD</p> <p>$\Rightarrow IK = \frac{AD + BF}{2} = \frac{AM + BM}{2} = \frac{AB}{2}$ (không đổi)</p> <p>Do A, B cố định nên K cố định, mà IK không đổi nên I cố định.</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

	Vậy đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi điểm M di động trên đoạn thẳng AB	0,5đ
5	<p>a) Giả sử $2n+1=m^2$, $3n+1=k^2$ ($m, k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow m^2$ là số lẻ $\Rightarrow m$ là số lẻ.</p> <p>$\Rightarrow 2n = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) : 4$, Suy ra : n chẵn, k lẻ</p> <p>Vì k là số lẻ nên $k-1, k+1$ là hai số chẵn liên tiếp và $(3, 8) = 1$ nên</p> <p>Từ $3n+1=k^2 \Rightarrow 3n = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) : 8 \Rightarrow n : 8$ (1)</p> <p>Khi chia một số chính phương cho 5 thì số dư chỉ có thể là 0 ; 1 ; 4. Ta xét các trường hợp:</p> <p>Nếu n chia cho 5 dư 1 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)</p> <p>Nếu n chia cho 5 dư 2 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)</p> <p>Nếu n chia cho 5 dư 3 thì $2n + 1$ chia cho 5 dư 2. (vô lí)</p> <p>Nếu n chia cho 5 dư 4 thì $3n + 1$ chia cho 5 dư 3. (vô lí)</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>

	Vì $(5, 8) = 1$ nên từ (1) và (2) suy ra n chia hết cho 40.	0,25đ
	<p>b) Ta có</p> $x^2 + 2y^2 + 2xy = y + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = -y^2 + y + 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 = (1 + y)(2 - y)$ <p>Do $(x + y)^2 \geq 0, \forall x, y$ nên $(1 + y)(2 - y) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 2$. Suy ra $y \in \{-1; 0; 1; 2\}$</p> <p>Với $y = -1$, PT trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$</p> <p>Với $y = 0$, PT trở thành $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$</p> <p>Với $y = 1$, PT trở thành $x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$</p> <p>Với $y = 2$, PT trở thành $x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Vậy có 2 cặp $(x; y)$ thỏa mãn đề bài $(1; -1); (-2; 2)$.</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>

		0,25đ
--	--	-------

ĐỀ KIỂM TRA HỌC SINH GIỎI - THCS PHÚ DIÊN BẮC TỪ LIÊM

MÔN: TOÁN 8 -2023-2024

Thời gian làm bài 90 phút

Bài 1: (4 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

1) Rút gọn biểu thức P

2) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

Bài 2: (3 điểm) 1) Tìm x, y, z biết: $5x^2 + 11y^2 + 28z^2 - 14xy - 16yz + 8zx - 20z + 5 = 0$

2) Giải phương trình: $\frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \frac{x-3}{2013} + \dots + \frac{x-2014}{2} + x = 4030.$

Bài 3: (4 điểm) 1) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của: $N = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

2) Chứng minh rằng, nếu: $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \\ a + b + c = abc \end{cases}$ thì $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2$

Bài 4: (1 điểm) Chứng minh rằng: Trong $n + 1$ số tự nhiên bất kỳ $a_1; a_2; \dots; a_n; a_{n+1}$ luôn tìm được hai số sao cho hiệu của chúng chia hết cho n .

Bài 5: (8 điểm) Cho hình vuông ABCD độ dài cạnh a ($a > 0$, a không đổi), M bất kì trên cạnh BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C vẽ hình vuông AMHN. Qua M kẻ đường thẳng d song song với AB, d cắt AH tại E, AH cắt CD tại F.

1) Chứng minh $BM = CN$

2) Chứng minh N, D, C thẳng hàng

3) Gọi O và K thứ tự là tâm của hình vuông AMHN và ABCD. Tứ giác EMFN là hình gì? Chứng minh đường thẳng OK đi qua B.

4) Chứng minh chu vi tam giác MFC không đổi khi M di động trên BC.

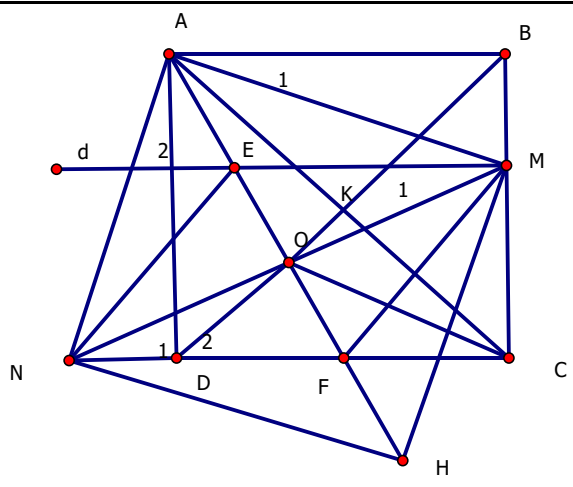
ĐÁP ÁN

BÀI	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1.1	Điều kiện: x≠0; x≠±1	0,5
(2 đ)	$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1)+x+2-x^2}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$	0,5 0,5 0,5

1.2 (1 đ)	$P = \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$ $x = \frac{1}{2}$	0,5 0,5
1.3 (1 đ)	$P = x - 1 + \frac{1}{x-1} + 2$ Áp dụng bất Cô si ta có $P \geq 4$ MinP = 4. Dấu bằng xảy ra khi $x=2$	0,5 0,5
2.1 (1,5 đ)	$5(4z^2 - 4z + 1) + 5x^2 + 11y^2 + 8z^2 - 14xy - 16yz + 8zx = 0$ $\Leftrightarrow 5(2z-1)^2 + 3(x-y)^2 + 2(x-2y+2z)^2 = 0$ Khi $(x; y; z) = (1; 1; 1)$	0,5 0,5 0,5
2.2 (1,5 đ)	Biến đổi thành $\frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \dots + \frac{x-2014}{2} + \frac{x-2015}{1} - 2015 = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{2015} - 1\right) + \left(\frac{x-2}{2014} - 1\right) + \dots + \left(\frac{x-2014}{2} - 1\right) + \left(\frac{x-2015}{1} - 1\right) = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2015} + \dots + \frac{x-2016}{2} + \frac{x-2016}{1} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2016) \left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right) = 0; \text{Do } \frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \neq 0$ <p>Nên $x - 2016 = 0 \Leftrightarrow x = 2016.$</p>	0,5
		0,5
3.1	<p>Khi đó ta có : $N = \left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \right) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{x^2+2x+1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$</p> <p>(2 đ)</p> <p>Vậy Min $N = \frac{1}{2}$ khi $x = -1$</p> $N = \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2} \right) + 1 + \frac{1}{2} = \frac{-x^2+2x-1}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} = \frac{-(x-1)^2}{2(x^2+1)} + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$ <p>Vậy Max $N = \frac{3}{2}$ khi $x = 1$</p>	0,5
		0,5

<p>3.2</p> <p>(2 đ)</p>	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) = 4$ $\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{a+b+c}{abc}\right) = 4$ $\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 = 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 2.$	<p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>4</p> <p>(1đ)</p>	<p>Chia một số bất kỳ cho n có thể nhận được một trong n số dư</p> <p>0; 1; 2; ...; $n-2$; $n-1$. Có $n+1$ số, có n số dư. Do đó theo nguyên lý</p> <p>Dirichlet tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho n.</p> <p>Không mất tổng quát giả sử hai số đó là a_p và a_q</p> <p>$(p; q \in \{1; 2; \dots; n; n+1\})$ và $a_p > a_q$. Ta có:</p> $a_p = n.k_p + r \quad (r \in N; 0 \leq r \leq n-1)$ $a_q = n.k_q + r$ <p>Khi đó $a_p - a_q = n.(k_p - k_q) \vdots n$.</p>	<p>0,5</p>

	<p>Đây chính là hai số có hiệu của chúng chia hết cho n. Bài toán được chứng minh.</p>	0,5
		0.5
<p>5.1</p> <p>(1.5 đ)</p>	<p>$\angle A_1 = \angle A_2$ (cùng phụ $\angle DAM$)</p> <p>$\Rightarrow \triangle DAN = \triangle BAM$ (g.c.g)</p> <p>$\Rightarrow BM = DN$</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
<p>5.2</p> <p>(1.5 đ)</p>	<p>$\angle AND = \angle ABM = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \angle D_1 + \angle ADC = 180^\circ$</p> <p>$\Rightarrow N, D, C$ thẳng hàng</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>

5.3	+ Vì $d//AB//CD \Rightarrow \angle M_1 = \angle ONF$	0.5
(3 đ)	$\Rightarrow \triangle OME = \triangle ONF (g.c.g) \Rightarrow EM = FN$	0.5
	Vì AMHN là hình vuông $\Rightarrow AH$ là trung trực của MN	0.5
	$\Rightarrow EM = EN, HM = HN$	
	$\Rightarrow EM = EN = HM = HN \Rightarrow MENF$ là hình thoi	0.5
	+ Vì $\triangle MCN$ vuông tại C có CO là trung tuyến thuộc cạnh huyền	
	$\Rightarrow OC = OM = ON \Rightarrow OC = OA$	0.5
	mà $KA = KC \Rightarrow O, K$ thuộc trung trực AC	0.5
	Lại có BD là trung trực của AC \Rightarrow đường thẳng OK đi qua B, D	
5.4	$FM = FN = FD + DN$	0.5

(1,5 đ)	$C_{CMF}=FM+CM+CF=FD+DN+CM+CF$ $=(CM+BM)+(FC+FD)$ $=CD+CB=a+a=2a \text{ Không đổi khi M di động trên BC.}$	<p>0.5</p> <p>0.5</p>
---------	--	-----------------------

TRƯỜNG THCS QUẢNG THÁI

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN: TOÁN LỚP 8

(Thời gian làm bài: 150 phút)

Đề bài

Bài 1: (2 điểm)

Phân tích thành nhân tử

a. $x^4 + x^3 - 4x - 4$

b. $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

Bài 2: (2 điểm): Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$$

a, Tìm điều kiện của x để A xác định.

b, Rút gọn biểu thức A.

c, Tìm giá trị của x để $A > 0$

Bài 3: (5 điểm).

a) Giải phương trình: $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$.

b) Tìm x biết: $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 11x - 6x^2 - 3 = 0$.

c) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$.

Bài 4: (3 điểm).

a) Cho $abc \neq \pm 1$ và $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a}$. Chứng minh rằng $a = b = c$.

b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2$; $x+1$. Tính $2a-3b$.

Bài 5: (6,0 điểm)

Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt BD ở E và cắt CD ở K. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt AC ở F và cắt CD ở I. Chứng minh rằng:

a) $DK = CI$

b) $EF \parallel CD$

c) $AB^2 = CD \cdot EF$

Bài 6: (2điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Chứng minh

rằng: $\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$.

.....Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM TOÁN 8

BÀI	□□P □N	□I□M
Bài 1 2đ	a) $x^4 + x^3 - 4x - 4 = x^3(x+1) - 4(x+1)$ $= (x+1)(x^3 - 4)$	1,0
	b) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ $= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$ $= [(x^2 + 5x + 5) - 1][(x^2 + 5x + 5) + 1] + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2$	1,0
Bài 2 2đ	a) $x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0$	0,25

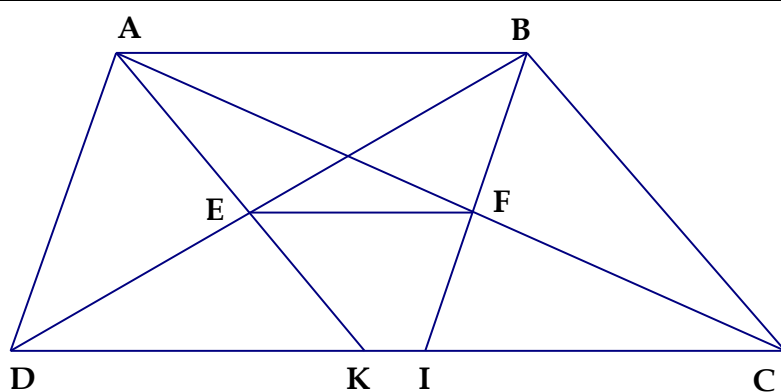
	<p>b) $A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \frac{6}{x + 2}$</p> $= \frac{x - 2(x + 2) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2}$ $= \frac{-6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x + 2}{6} = \frac{1}{2 - x}$ <p>c) Để $A > 0$ thì $\frac{1}{2 - x} > 0 \Leftrightarrow 2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2$</p>	<p>1,0</p> <p>0,75</p>
<p>Bài 3</p> <p>5đ</p>	<p>a) ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$</p>	

$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{4x^2+20x+21-4x^2-12x-5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2+16x+7-6x^2-9x+9}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2+7x+16}{(2x+7)(2x+1)}$ $\Rightarrow 8x+16 = -2x^2+7x+16 \Leftrightarrow 2x^2+x=0 \Leftrightarrow x(2x+1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$ <p>Vậy phương trình có một nghiệm $x = 0$</p> <p>b) Ta có: $6x^4 - 11x^3 + 3x^2 + 11x - 6x^2 - 3 = 0$</p> $\Leftrightarrow 6x^2(x^2 - 1) - 11x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 1)(6x^2 - 11x + 3) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(3x-1)(2x-3) = 0$ <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \pm 1; \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}$.</p> <p>c) Ta có: $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$</p> $\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (x^2 + 2xy + y^2) = 41$	<p>2,0</p> <p>1,0</p>
--	-----------------------

	$\Leftrightarrow (2x-1)^2 + (x+y)^2 = 41$	0,5
	<p>Vì $x, y \in \mathbb{Z}$, $2x-1$ là số nguyên lẻ và $41 = 5^2 + 4^2$ nên</p> $\begin{cases} (2x-1)^2 = 25 \\ (x+y)^2 = 16 \end{cases}$	
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \pm 5 \\ x+y = \pm 4 \end{cases}$	
	<p>Từ đó suy ra các cặp $(x; y)$ cần tìm là $(3; 1); (3; -7); (-2; 6); (-2; -2)$.</p>	0,5
		0,5
		0,5

<p>Bài 4</p> <p>3đ</p>	<p>a) Từ $\frac{ab+1}{b} = \frac{bc+1}{c} = \frac{ca+1}{a} \Rightarrow a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a}$.</p> <p>Do đó:</p> $a - b = \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{b-c}{bc}; \quad b - c = \frac{1}{a} - \frac{1}{c} = \frac{c-a}{ac}; \quad c - a = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$ <p>Suy ra: $(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{a^2b^2c^2}$</p> $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a)(a^2b^2c^2 - 1) = 0$ $\Rightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0 \text{ (do } abc \neq \pm 1)$ <p>Suy ra $a = b = c$</p> <p>b) Đa thức $f(x) = 4x^3 + ax + b$ chia hết cho các đa thức $x-2$; $x+1$ nên:</p> $f(2) = 0 \Rightarrow 32 + 2a + b = 0 \quad (1)$ $f(-1) = 0 \Rightarrow -4 - a + b = 0 \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) ta tìm được $a = -12$; $b = -8$</p>	<p>1,5</p>
--------------------------------------	---	------------

	Vậy $2a-3b = 0$	1,5
<p>Bài 5</p> <p>6đ</p>	<p>a)</p> <p>Tứ giác ABCK có:</p> <p>$AB \parallel CK$ ($AB \parallel CD, K \in CD$)</p> <p>$AK \parallel BC$ (gt)</p> <p>\Rightarrow ABCK là hình bình hành</p>	



$$\Rightarrow CK = AB$$

$$\Rightarrow DK = CD - CK = CD - AB \quad (1)$$

Chúng minh tương tự, ta có $DI = AB$

$$\Rightarrow IC = CD - DI = CD - AB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $DK = IC$

b)

$\triangle DEK$ có $AB \parallel DK$, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AE}{EK} = \frac{AB}{DK} \quad (3)$$

$\triangle FIC$ có $AB \parallel IC$, theo hệ quả định lý Ta-let ta có:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{IC} \quad (4)$$

$$\text{Mà: } DK = IC \text{ (câu a)} \quad (5)$$

$$\text{Từ (3), (4), (5) suy ra: } \frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC}$$

2,0

	<p>ΔAKC có $\frac{AE}{EK} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow EF \parallel KC$ (định lý Ta-lét đảo)</p> <p>$\Rightarrow EF \parallel CD$</p> <p>c)</p> <p>Ta có: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD}$ (vì $AB = CK$) (6)</p> <p>ΔBCD có $EK \parallel BC$, theo định lý Ta-lét ta có:</p> $\frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} \quad (7)$ <p>ΔBDI có $EF \parallel DI$, theo định lý Ta-lét ta có:</p> $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{DI}$ <p>Mà $DI = AB$</p> <p>Suy ra: $\frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$ (8)</p> <p>Từ (6), (7), (8) suy ra: $\frac{AB}{CD} = \frac{CK}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{EF}{AB}$</p>	2,0
--	--	-----

$$\Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow AB^2 = CD \cdot EE$$

2,0

Bài 6	<p>Đặt $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$</p>	
2đ	$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$ <p>Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c</p> <p>dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.</p> <p>Ta có $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1 \right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1 \right)$</p> <p>Bởi vậy</p> $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1 \right)$ $= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}. (\text{ĐPCM})$	

PHÒNG GD&ĐT YÊN ĐỊNH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN

VĂN HÓA VÒNG I CẤP TỈNH

Môn thi: Toán Thời gian thi: 150 phút (*không kể thời**gian giao đề) năm 2023-2024*

Đề thi gồm: 01 trang

		2,0
--	--	-----

Ghi chú: Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa

Câu 1. (4 điểm)

a) Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

Rút gọn M và Tìm a để $M > 0$

b) Cho $x + y + z = 1$ và $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Tính $A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015}$

Câu 2. (4 điểm)

a) Giải các phương trình sau:

$$(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

b) Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y^3-1} - \frac{y}{x^3-1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} = 0$$

Câu 3. (4 điểm)

a) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$

b) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$

không phải là số nguyên tố.

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của góc

AIC và góc AIB . Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

HỌC ĐƠN CHỌN MÔN TOÁN KHỐI 8

Câu	Đáp án	Biểu điểm
1	<p>a) Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$</p> <p>Ta có: $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$</p> $= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$ $= \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$ $= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$ $= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2+4} = \frac{4a}{a^2+4}$ <p>Để $M > 0 \Leftrightarrow 4a > 0 \Leftrightarrow a > 0$</p> <p>Kết hợp với điều kiện suy ra $M > 0$ khi $a > 0$ và $a \neq 1$</p>	

b) Từ $x + y + z = 1 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 1$

Mà $x^3 + y^3 + z^3 = 1$

$$\Rightarrow (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)^3 - z^3 - (x^3 + y^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z - z) \left[(x + y + z)^2 + (x + y + z)z + z^2 \right] - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz + xz + yz + z^2 + z^2 - x^2 + xy - y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(3z^2 + 3xy + 3yz + 3xz) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y)3(y + z)(x + z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ x = -z \end{cases}$$

* Nếu $x = -y \Rightarrow z = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

* Nếu $y = -z \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

* Nếu $x = -z \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A = x^{2015} + y^{2015} + z^{2015} = 1$

$$a)) \quad (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) = 12$$

$$\text{Đặt } y = x^2 + x$$

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 6y - 2y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (y + 6)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

2

$$*x^2 + x = -6 \text{ vô nghiệm vì } x^2 + x + 6 > 0 \text{ với mọi } x$$

$$*x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

$$b) \text{ Biến đổi } \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} = \frac{x^4 - x - y^4 + y}{(y^3 - 1)(x^3 - 1)}$$

$$= \frac{(x^4 - y^4) - (x - y)}{xy(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} \left(\text{do } x + y = 1 \Rightarrow y - 1 = -x \text{ \& } x - 1 = -y \right)$$

	$= \frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)-(x-y)}{xy(x^2y^2+y^2x+y^2+yx^2+xy+y+x^2+x+1)}$ $= \frac{(x-y)(x^2+y^2-1)}{xy[x^2y^2+xy(x+y)+x^2+y^2+xy+2]}$ $= \frac{(x-y)(x^2-x+y^2-y)}{xy[x^2y^2+(x+y)^2+2]} = \frac{(x-y)[x(x-1)+y(y-1)]}{xy(x^2y^2+3)}$ $= \frac{(x-y)[x(-y)+y(-x)]}{xy(x^2y^2+3)} = \frac{(x-y)(-2xy)}{xy(x^2y^2+3)}$ $= \frac{-2(x-y)}{x^2y^2+3} \text{ Suy ra điều phải chứng minh}$	
3	<p>a) Ta có:</p> $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 40 = 0$ $\Leftrightarrow 4x^2 - (x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1) = -41$ $\Leftrightarrow (x+y+1)^2 - (2x)^2 = 41$ $\Leftrightarrow (3x+y+1)(y-x+1) = 41$	

Đặt : $3x + y + 1 = a$ và $y - x + 1 = b$. Suy ra a và b là các ước của 41, có tích bằng

41. Nhận thấy 41 là số nguyên tố, từ đó ta có các trường hợp như bảng sau:

a	-41	-1	1	41
b	-1	-41	41	1
$x = \frac{a-b}{4}$	-10	10	-10	10
$y = \frac{a+3b-4}{4}$	-12	-32	30	10

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-10; -12); (10; -32); (-10; 30); (10; 10)$

b) Ta có: $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a - c)(b^2 - ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$

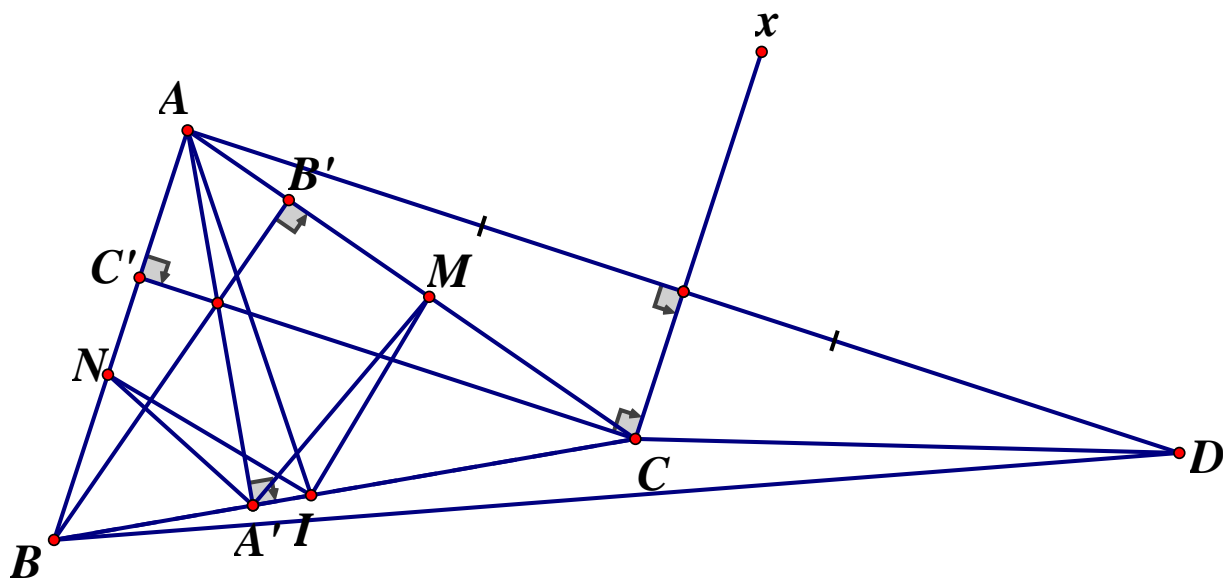
Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố thì xảy ra các

trường hợp sau:

	$1) a + c - b = 1; a + c + b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$ $\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)$ $2) a + c + b = 1, a + c - b = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 2c - 1$ $\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = 1, b = \pm 1 \quad (ktm)$ $3) a + c + b = -1, a + c - b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$ $\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$ $4) a + c - b = -1, a + c + b = -(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = -2a - 2c - 1$ $\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = c = -1, b = \pm 1 \quad (ktm)$	
4		



$$a) \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$$

$$\Rightarrow \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$$

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC :

$$\begin{aligned}\frac{BI}{IC} &= \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI} \\ \Rightarrow \frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1 \\ \Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM &= BN \cdot IC \cdot AM\end{aligned}$$

c) Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

Chứng minh được góc BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2.CC'$

Xét 3 điểm B, C, D ta có : $BD \leq BC + CD$

$\triangle BAD$ vuông tại A nên : $AB^2 + AD^2 = BD^2$

$$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$$

$$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$$

$$4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$$

Tương tự:

$$4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$$

$$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$$

Chứng minh được: $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + AC)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC \Leftrightarrow AB = AC = BC \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Trước tiên ta chứng minh BĐT: Với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $x, y, z > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

5

Thật vậy, với $a, b \in \mathbb{R}$ và $x, y > 0$ ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (**)$$

$$\Leftrightarrow (a^2y + b^2x)(x+y) \geq xy(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

Áp dụng bất đẳng thức (**) ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

Ta có:
$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc}$$

Áp dụng BĐT (*) ta có :

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2(ab+bc+ac)} = \frac{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2}{2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)} \quad (\text{Vì } abc=1)$$

Hay

$$\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Mà $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3$ nên $\frac{\frac{1}{a^2}}{ab+ac} + \frac{\frac{1}{b^2}}{bc+ab} + \frac{\frac{1}{c^2}}{ac+bc} \geq \frac{3}{2}$

Vậy $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$. (đpcm)

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN HSGMÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2023-2024

Câu 1 (4,0 điểm). Cho biểu thức: $A = \frac{x^2 + x + 1}{1 - x^3} + \left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{x}{1 - x^2} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, với $x \neq \pm 1$

1) Rút gọn biểu thức A.

2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A \leq 1$.

Câu 2 (4 điểm).

1) Giải phương trình: $(2x^2 - 6x + 5)(2x - 3)^2 = 1$

2) Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện: $ab = 1, a + b \neq 0$.

$$\text{Chứng minh rằng } A = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= 1$$

Câu 3(4 điểm).

1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2xy - 3y^2 = x + 7y$.

2) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh

rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

Câu 4(6 điểm). Trong mặt phẳng, cho hai điểm B, C cố định với $BC = 2a (a > 0)$ và điểm

A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi M là trung điểm của BC ; đường

thẳng qua A vuông góc AM cắt các đường phân giác các góc AMB và AMC lần lượt

tại P, Q . Gọi D là giao điểm của MP với AB và E là giao điểm của MQ với AC .

1) Giả sử $AC = 2AB$, tính số đo góc BQC .

2) Chứng minh rằng $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ}\right)^3$.

3) Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP theo a .

Câu 5(2 điểm). Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, y \geq 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x - 4xy + y)^2}$

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1 (4đ)	1) Rút gọn A.	
	$A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$	0,5
	$= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$	0,5
	$= \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)}$	0,5
	$= \frac{-(x - 1)^2}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{1 - x}{x^2 + 1}. \text{ Vậy : } A = \frac{1 - x}{x^2 + 1} \quad (\text{với } x \neq \pm 1).$	0,5
	2) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A \leq 1$.	
	$A \leq 1 \Leftrightarrow A - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1 - x}{x^2 + 1} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(x + x^2)}{x^2 + 1} \leq 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 + x \geq 0 \text{ (vì } x^2 + 1 > 0 \forall x)$	0,5

	$\Leftrightarrow x(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases}$	0,5
	Kết hợp với ĐKXD ta được: $A \leq 1 \Leftrightarrow x < -1$ hoặc $x \geq 0, x \neq 1$.	0,5
Câu 2	1) Giải các phương trình $(2x^2 - 6x + 5)(2x - 3)^2 = 1$	
(4đ)	<p>Phương trình đã cho tương đương với</p> $(4x^2 - 12x + 10)(2x - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow [(2x - 3)^2 + 1](2x - 3)^2 = 2$ <p>Đặt $t = (2x - 3)^2$ ($t \geq 0$) ta được:</p> $t(t + 1) = 2 \Leftrightarrow (t - 1)(t + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$ <p>Với $t = 1 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \{1; 2\}$</p>	<p>0.75</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>

		0.25
	<p>2. Cho a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện: $ab = 1, a + b \neq 0$.</p> <p>Cmr: $A = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1$</p>	
	<p>với $ab = 1, a + b \neq 0$ t</p> $ \begin{aligned} A &= \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \\ &= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3 (ab)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4 (ab)^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5 (ab)} \\ &= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+b)^2} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^5} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a+b)^2 + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a^2 + b^2 + 2) + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4} \\ &= \frac{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2) + 4}{(a+b)^4} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + 2)^2}{(a+b)^4} \end{aligned} $	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>

	$= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{(a+b)^4}$ $= \frac{[(a+b)^2]^2}{(a+b)^4}$ $= 1$ <p>vậy $A = 1$, với $ab = 1, a + b \neq 0$</p>	0.25
		0.25
		0.25
		0.25
		0.25
Câu 31	1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 + 2xy - 3y^2 = x + 7y$. (1)	

(4đ)	$(1) \Leftrightarrow x^2 + (2y-1)x - 3y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[x + \frac{2y-1}{2} \right]^2 - \left[3y^2 + 7y + \frac{(2y-1)^2}{4} \right] = 0$ $\Leftrightarrow (2x+2y-1)^2 - (4y+3)^2 = -8 \Leftrightarrow (2x-2y-4)(2x+6y+2) = -8 \Leftrightarrow (x-y-2)(x+3y+1) = -2.$	0,5
	<p>Vì x, y là các số nguyên nên $x - y - 2; x + 3y + 1$ là các ước nguyên của 2 và có tích bằng -2. Ta có các trường hợp:</p> <p>Trường hợp 1: $\begin{cases} x + 3y + 1 = 1 \\ x - y - 2 = -2 \end{cases}$. Giải ra được: $(x, y) = (0; 0)$.</p>	0,5
	<p>Trường hợp 2: $\begin{cases} x + 3y + 1 = 2 \\ x - y - 2 = -1 \end{cases}$. Giải ra được: $(x, y) = (1; 0)$.</p> <p>Trường hợp 3: $\begin{cases} x + 3y + 1 = -1 \\ x - y - 2 = 2 \end{cases}$. Không tồn tại x, y nguyên.</p> <p>Trường hợp 4: $\begin{cases} x + 3y + 1 = -2 \\ x - y - 2 = 1 \end{cases}$. Không tồn tại x, y nguyên.</p> <p>Vậy có hai cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn yêu cầu là $(0; 0)$ và $(1; 0)$.</p>	0,75
	<p>2) Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho 5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.</p>	

	<p>Đặt $a = x^2 - 2xy - y, b = xy - 2y^2 - x, c = 2x^2 + y^2 + 2x + y$.</p> <p>Ta có</p> $a - b = (x - y)(x - 2y + 1).$ <p>Do a và b chia hết cho 5 nên $a - b$ chia hết cho 5.</p> <p>Suy ra $x - y \vdots 5$ hoặc $x - 2y + 1 \vdots 5$.</p> <p>▪ Trường hợp 1: Nếu $x - y \vdots 5$ thì $x \equiv y \pmod{5}$. Khi đó</p> $a \equiv x^2 - 2x^2 - x = -(x^2 + x) \pmod{5};$ $c \equiv 2x^2 + x^2 + 2x + x = 3(x^2 + x) \pmod{5}.$ <p>Do $a \vdots 5$ nên $x^2 + x \vdots 5$ hay $c \vdots 5$.</p> <p>▪ Trường hợp 2: Nếu $x - 2y + 1 \vdots 5$ thì $x \equiv 2y - 1 \pmod{5}$. Khi đó</p> $a \equiv (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y - y = -3y + 1 \pmod{5};$ $c \equiv 2(2y - 1)^2 + y^2 + 2(2y - 1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y - 1) \pmod{5}.$	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>
--	---	---

	<p>vì MQ là đường trung trực của đoạn AC và $AM \perp AQ$ nên $MC \perp QC$</p> <p>Xét hai tam giác vuông ABC và ECQ</p> <p>có $ACB = EQC$ (cùng phụ góc QCE) và $AB = EC$ (vì $2EC = AC = 2AB$)</p> <p>$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle ECQ \Rightarrow CQ = CB$ hay tam giác BCQ vuông cân tại C,</p> <p>do đó $BQC = 45^\circ$</p>	0.5
	<p>2) <u>Chứng minh rằng</u> $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ}\right)^3$.</p>	
	<p><u>Chứng minh rằng</u> $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ}\right)^3$.</p> <p>Ta có MP, MQ là các đường phân giác của các góc AMB và AMC</p> <p>nên $MP \perp MQ$</p> <p>Tương tự chứng minh câu a ta được $AD \perp MP, AE \perp MQ$</p> <p>Suy ra tam giác vuông APM đồng dạng tam giác vuông DPA</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>0.5</p>

$$\Rightarrow PD \cdot PM = PA^2 \quad (1)$$

Tương tự, ta có $QE \cdot QM = QA^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{PD}{QE} = \frac{QM \cdot PA^2}{PM \cdot QA^2} \quad (3)$

Tương tự, lại có : $PA \cdot PQ = PM^2 \quad (4)$ và $QA \cdot QP = QM^2 \quad (5)$

Từ (4) và (5) suy ra $\frac{PA}{QA} = \frac{PM^2}{QM^2} \quad (6)$

Từ (3) và (6) suy ra $\frac{PD}{QE} = \left(\frac{MP}{MQ} \right)^3 \quad (ĐPCM)$

3. Tính giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP theo a .

Vì MQ là trung trực của đoạn AC và MP là trung trực của đoạn AB

suy ra $CQ = QA, BP = AP$ và $BCQP$ là hình thang vuông

0.5

0.5

0.5

	<p>Do đó $S_{BCQP} = \frac{(BP + CQ).BC}{2} = \frac{PQ.BC}{2} \geq \frac{BC^2}{2} = 2a^2$ (*)</p> <p>Kẻ AH vuông góc BC thì $S_{ABC} = \frac{AH.BC}{2} \leq \frac{AM.BC}{2} = a^2$ (**)</p> <p>Từ (*) và (**) suy ra $S_{ABP} + S_{ACQ} = S_{BCQP} - S_{ABC} \geq 2a^2 - a^2 = a^2$.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv M$, khi đó tam giác ABC vuông cân tại A.</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích hai tam giác ACQ và ABP là a^2 khi tam giác ABC vuông cân tại A.</p>	<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p>
<p>Câu 5</p> <p>(2,0đ)</p>	<p>Câu 5 (2 điểm): Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, y \geq 1$.</p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x - 4xy + y)^2}$.</p> <p>Ta có: $A = x^2 + y^2 + \frac{x^2 y^2}{(x - 4xy + y)^2} = x^2 + y^2 + \frac{1}{\left[4 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\right]^2}$</p>	<p>0.5</p>

Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b$. Do $\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, y \geq 1 \Rightarrow 2 \leq a < 3; b \leq 1$, ta có:

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{[4 - (a + b)]^2}$$

vì $2 \leq a < 3; 0 < b \leq 1 \Rightarrow 4 - (a + b) > 0$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{[4 - (a + b)]^2} &\geq \frac{2}{b[4 - (a + b)]} \geq \frac{8}{(4 - a)^2} \\ \Rightarrow A &\geq \frac{1}{a^2} + \frac{8}{(4 - a)^2} = \frac{8}{a^2} + \frac{8}{(4 - a)^2} - \frac{7}{a^2} \geq \frac{16}{a(4 - a)} - \frac{7}{a^2} \geq \frac{64}{(a + 4 - a)} - \frac{7}{4} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Dấu "="

xảy ra khi $a = 2; b = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = 1$

vậy $\text{Min} A = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; y = 1$

0.25

0.75

0.25

0.25

UBND HUYỆN BÁ THƯỚC

ĐỀ GIAO LƯU HSG CẤP HUYỆN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NĂM HỌC: 2023-2024

MÔN: Toán lớp 8

THỜI GIAN LÀM BÀI: 150 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Câu I: (4 điểm)

1) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

2) Cho các số a, b, c khác 0 và đôi một khác nhau thoả mãn:

$$a^2(b+c) = b^2(c+a) = 2023. \text{ Tính } M = c^2(a+b)$$

Câu II: (4 điểm)

1) Tìm x biết: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 24$

2) Tìm a, b đôi một khác nhau thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

$$a^3 - 3a^2 + 5a - 2023 = 0; \quad b^3 - 3b^2 + 5b + 2017 = 0 \text{ và } a - b = 4$$

Câu III: (4 điểm)

1) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$

2) Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 48.

Câu IV: (6 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A, có $\angle ABC = 75^\circ$, trên cạnh AC lấy 2 điểm E và P sao cho $\angle AEB = \angle EBP = \angle PBC$.

Gọi I là chân đường vuông góc hạ từ C xuống đường thẳng BP, đường thẳng CI cắt BE ở F

1, Chứng minh: $\triangle ECF$ cân

2, Trên tia đối tia EB lấy điểm K sao cho $EK = BC$, tính số đo các góc của $\triangle BCK$

3, Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên BK, D là trung điểm của đoạn CH, L là hình chiếu vuông góc

của H trên BD. Chứng minh KL vuông góc với LC

Câu V: (2 điểm)

Cho x, y, z là 3 số thực tùy ý thỏa mãn $x + y + z = 0$ và $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$. Tìm giá trị lớn

nhất của $A = x^{24} + y^{12} + z^{2024}$

ĐÁP ÁN

Câu I:

$$1) a) \quad A = \left(\frac{x+1}{x^3+1} - \frac{1}{x-x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x} \quad \text{ĐK: } x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$$

$$A = \left[\frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{2}{x+1} \right] : \frac{x^3-2x^2}{x^3-x^2+x}$$

$$A = \left[\frac{x+1+x+1-2(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x^2(x-2)}{x(x^2-x+1)}$$

$$A = \left[\frac{x+1+x+1-2x^2+2x-2}{(x+1)(x^2-x+1)} \right] : \frac{x(x-2)}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{-2x^2+4x}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)}$$

$$A = \frac{-2x(x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} \cdot \frac{x^2-x+1}{x(x-2)} = \frac{-2}{x+1}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{-2}{x+1} \text{ với } x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$$

$$b) \quad \text{Ta có: } A = \frac{-2}{x+1} \text{ với } x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$$

Vì x nguyên $x \neq 0; x \neq 1; x \neq 2$ nên $x+1$ nguyên và $x+1$ khác 0.

Để A có giá trị nguyên khi $x+1$ là ước của 2.

Mà ước của 2 là -1; 1; -2; 2.

$$x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (không thoả mãn)}$$

$$x + 1 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thoả mãn)}$$

$$x + 1 = -2 \Leftrightarrow x = -3 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy A nguyên khi $x \in \{-3; -2; 1\}$

2) Ta có: $a^2(b + c) = b^2(c + a) = 2023$.

$$\Leftrightarrow a^2b - ab^2 + ca^2 - cb^2 = 0 \Leftrightarrow ab(a - b) + c(a - b)(a + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)(ab + bc + ac) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0 \text{ (vì } a \text{ khác } b)$$

$$\text{Lại có: } c^2(a + b) - a^2(b + c) = ac^2 - a^2c + bc^2 - a^2b = ac(c - a) + b(c - a)(c + a)$$

$$= (c - a)(ac + bc + ab) = 0$$

$$\text{Do } ab + bc + ca = 0$$

Vậy với a, b, c thoả mãn yêu cầu đề bài thì $M = 2023$

Câu II:

$$1) \text{ Ta có: } (x - 1)x(x + 1)(x + 2) = 24$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+3) \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{15}{4} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-3; 2\}$

2) Từ các điều kiện đã cho ta có

$$(a-1)^3 + 2(a-1) - 2020 = 0(1), (b-1)^3 + 2(b-1) + 2020 = 0(2)$$

Cộng tương ứng vế với vế của (1) và (2) ta có:

$$(a-1)^3 + (b-1)^3 + 2(a+b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 \right] + 2(a+b-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b-2) \left[(a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 \right] = 0$$

$$\text{Vì } (a-1)^2 - (a-1)(b-1) + (b-1)^2 + 2 = \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{2}(b-1)^2 + 2 > 0, \forall a, b$$

$$\text{Nên } a + b - 2 = 0 \Leftrightarrow a + b = 2 \quad (*)$$

$$\text{Lại có: } a - b = 4 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) tìm được $a = 3$ và $b = -1$

Thử lại ta thấy $a = 3$ và $b = -1$ không thoả mãn

Vậy không tồn tại giá trị a, b thoả mãn yêu cầu đề bài.

Câu III:

1) Ta có: $5x^4 + y^2 - 4x^2y - 85 = 0$

$$\Leftrightarrow x^4 = 85 - (y - 2x^2)^2$$

Lập luận $x^4 \leq 85 < 4^4$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $x^4 \in \{0^4; 1^4; 2^4; 3^4\}$

$$x^4 = 0^4 \text{ thì } y^2 = 85 \text{ (loại)}$$

$$x^4 = 1^4 \text{ thì } (y - 2)^2 = 84 \text{ (loại)}$$

$$x^4 = 2^4 \text{ thì } (y - 8)^2 = 69 \text{ (loại)}$$

$$x^4 = 3^4 \text{ thì } (y - 18)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 18 = 2 \\ y - 18 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 20 \\ y = 16 \end{cases}$$

Khi đó: $\begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

Vậy có 4 cặp $(x; y)$ là: $(3; 20); (-3; 20); (3; 16); (-3; 16)$

2) Vì $x^2 + y^2 = 2z^2$ nên x, y cùng tính chẵn lẻ.

Suy ra : $x + y; x - y$ cùng chẵn.

Đặt $x + y = 2m, x - y = 2n \quad (m, n \in \mathbb{N}^*, m > n)$

$$\Rightarrow 2z^2 = (m+n)^2 + (m-n)^2 = 2(m^2 + n^2) \Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$$

Nếu m và n cùng không chia hết cho 4 thì $m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2

$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2. Vô lí.

Suy ra m hoặc n chia hết cho 4 $\Rightarrow mn : 4$ (1)

Nếu m và n cùng không chia hết cho 3 thì $m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2

$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2. Vô lí.

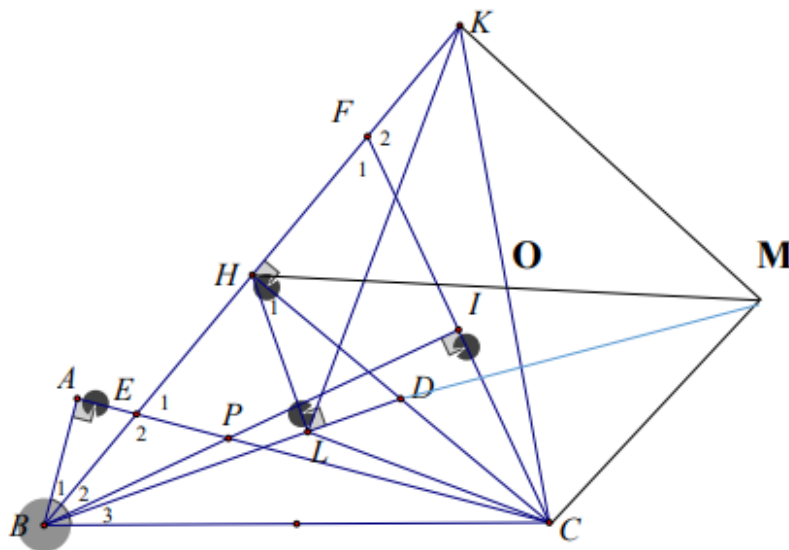
Suy ra m hoặc n chia hết cho 3 $\Rightarrow mn : 3$ (2)

Vì $(3, 4) = 1$ nên từ (1), (2) $\Rightarrow mn : 12$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 4mn : 48$$

Vậy $x^2 - y^2 : 48$

Câu IV:



1) Vì $ABE = EBP = PBC = \frac{ABC}{3} = 25^\circ \Rightarrow EBP = PBC \Rightarrow BI$ là phân giác, mà $BI \perp FC$

Nên $\triangle BFC$ có BI vừa là phân giác vừa là đường cao

$\Rightarrow \triangle BFC$ là tam giác cân tại B

$\Rightarrow F_1 = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ = E_1 \Rightarrow \triangle ECF$ cân tại C

2) $\triangle BFC$ có BI vừa là đường cao vừa là tia phân giác

$\Rightarrow BC = BF$ mà $BC = EK \Rightarrow BF = EK \Rightarrow BE + EF = EF + FK \Rightarrow BE = FK$

Mà $\hat{E}_1 = \hat{F}_1 \Rightarrow \hat{E}_2 = \hat{F}_2 \Rightarrow \triangle BEC = \triangle KFC (c.g.c)$

$\Rightarrow BC = CK \Rightarrow \triangle BCK$ là tam giác cân tại C

$\Rightarrow CBK = 50^\circ = CKB$, vậy $BCK = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$

3) Vẽ hình chữ nhật CHKM

Chứng minh : BCMH là hình bình hành (vì có $CM \parallel BH$ và $CM = BH$ do H là trung điểm BK, bởi tam giác

BCK cân tại C)

suy ra L, D, M thẳng hàng

$$\Rightarrow LO = \frac{1}{2}HM = \frac{1}{2}CK \text{ (HM = CK, tính chất hình chữ nhật)}$$

Suy ra tam giác CLK vuông tại L

Câu V:

+) Trong ba số x, y, z có ít nhất hai số cùng dấu. Giả sử $x, y \geq 0$

$$\Rightarrow z = -x - y \leq 0 \text{ (do } x + y + z = 0)$$

+) Vì $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq |x| + |y| + |z|$$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq x + y - z$$

$$\Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq -2z$$

$$+) -1 \leq z \leq 1 \text{ và } z \leq 0 \Rightarrow x^{24} + y^{12} + z^{2024} \leq 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $z = -1$ và $x + y = 1$

Vậy $\text{Max } A = 2$ khi một số bằng -1 và tổng hai số còn lại bằng 1

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI OLYMPIC 27/4 NĂM HỌC 2023-2024

THỊ XÃ PHÚ MỸ

MÔN: TOÁN LỚP 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút

Ngày thi: 21 tháng 02 năm 2024

Bài 1 (5,0 điểm):

a) Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) Phân tích đa thức $x^3 - x^2 - 4$ thành nhân tử.

c) Xác định các số hữu tỷ p và q để đa thức $x^3 + px + q$ chia hết cho đa thức

$$x^2 - 2x - 3$$

Bài 2 (2,5 điểm): Cho biểu thức $C = \left(\frac{1-x^3}{1-x} - x \right) : \frac{1-x^2}{1-x-x^2+x^3}$

a) Rút gọn biểu thức C .

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Bài 3 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình: $\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $2xy - x + y = 3$.

Bài 4 (3,0 điểm):

a) Chứng minh rằng $n(n^2 + 11)$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Trong 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

c) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $x + y + 4 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy$.

Bài 5 (5,0 điểm):

Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGK. Chứng minh rằng:

a) $AK = BC$.

b) $AK \perp BC$.

c) Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

Bài 6 (1,5 điểm):

Trên đường thẳng cho các điểm A, B, C, D xếp theo thứ tự đó và $AB = CD$. Cho M là điểm bất kì không nằm trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng: $MA + MD > MB + MC$.

—————Hết—————

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh Số báo danh

Chữ ký của giám thị 1

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI OLYMPIC 27/4 NĂM HỌC 2022-2023

THỊ XÃ PHÚ MỸ

MÔN: TOÁN LỚP 8

Ngày thi: 21 tháng 02 năm 2023

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 8

I. Hướng dẫn chung:

- 1) Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với các ý cơ bản học sinh phải trình bày, nếu học sinh giải theo cách khác mà đúng và đủ các bước thì vẫn cho điểm tối đa.
- 2) Điểm toàn bài là tổng điểm của các ý, các câu và không làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm:

Bài	Câu	Nội dung trình bày	Điểm
Bài 1 (5,0 điểm): a) Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^2 + \frac{1}{x^2}$ b) Phân tích đa thức $x^3 - x^2 - 4$ thành nhân tử. c) Xác định các số hữu tỷ p và q để đa thức $x^3 + px + q$ chia hết cho đa thức $x^2 - 2x - 3$			
1.	a)	$A = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} = 3^2 - 2 = 7$	0,5x3
	b)	$x^3 - x^2 - 4 = (x^3 - 2x^2) + (x^2 - 2x) + (2x - 4)$	1,0
	(2.0đ)	$= x^2(x - 2) + x(x - 2) + 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + x + 2)$	0,5x2
	c)	$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$	0,5

	(1.5đ)	<p>Gọi thương khi chia $x^3 + px + q$ cho $x^2 - 2x - 3$ là $Q(x)$. Do dư 0 nên ta có:</p> $x^3 + px + q = (x^2 - 2x - 3).Q(x)$ <p>Hay $x^3 + px + q = (x - 3)(x + 1).Q(x)$</p>	0,25
		<p>Vì đẳng thức đúng với mọi x nên lần lượt cho $x = 3, x = -1$ ta được:</p> $\begin{cases} 27 + 3p + q = 0 \\ -1 - p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3p + q = -27 \\ -p + q = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -7 \\ q = -6 \end{cases}$ <p>Vậy với $p = -7; q = -6$ thì $x^3 + px + q$ chia hết cho $x^2 - 2x - 3$</p>	0,75

Bài 2 (2,5 điểm): Cho biểu thức $C = \left(\frac{1 - x^3}{1 - x} - x \right) : \frac{1 - x^2}{1 - x - x^2 + x^3}$

a) Rút gọn biểu thức C.

b) Tính giá trị của biểu thức C khi $\left(x - \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$

Bài 3 (3,0 điểm):

a) Giải phương trình:

$$\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$$

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức $2xy - x + y = 3$.

Bài 3 (3.0đ)	a) (1,5đ)	$\frac{x-2022}{1} + \frac{x-2021}{2} + \frac{x-2020}{3} + \dots + \frac{x-1}{2022} + \frac{x}{2023} = 2023$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x-2022}{1} - 1\right) + \left(\frac{x-2021}{2} - 1\right) + \dots + \left(\frac{x-1}{2022} - 1\right) + \left(\frac{x}{2023} - 1\right) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{x-2023}{1} + \frac{x-2023}{2} + \dots + \frac{x-2023}{2022} + \frac{x-2023}{2023} = 0$ $\Leftrightarrow (x-2023) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}\right) = 0$	0,5
		<p>mà $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} \neq 0$</p> $\Leftrightarrow x - 2023 = 0$ $\Leftrightarrow x = 2023$	0,25x2

		Vậy tập hợp nghiệm của phương trình là $S = \{2023\}$	
	b) (1,5đ)	$2xy - x + y = 3$ $\Leftrightarrow 4xy - 2x + 2y = 6$	0,25
		$\Leftrightarrow 2x(2y - 1) + (2y - 1) = 5$ $\Leftrightarrow (2y - 1) \cdot (2x + 1) = 5$	0,25x2
		$\left \begin{cases} 2x + 1 = 5 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \right. \text{ (Vì } x \text{ nguyên dương nên } 2x + 1 \geq 3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25x2
		Vậy cặp số nguyên dương $(x; y) = (2; 1)$	0,25

Bài 4 (3,0 điểm):

a) Chứng minh rằng $n(n^2 + 11)$ chia hết cho 6 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

b) Trong 43 học sinh làm bài kiểm tra, không có học sinh nào bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh đạt điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau

		5.8 = 40 học sinh, ít hơn 1 học sinh so với 41.	
		Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau	0,25
	c) (1.0đ)	$ \begin{aligned} P &= 2(x^3 + y^3) + 3(x^2 + y^2) + 10xy \\ &= 2(x + y)^3 - 6xy(x + y) + 3(x + y)^2 - 6xy + 10xy \\ &= 2(-4)^3 - 6xy(-4) + 3(-4)^2 + 4xy \\ &= 28xy - 80 = 28x(-4 - x) - 80 \\ &= -28(x^2 + 4x + 4) + 32 = -28(x + 2)^2 + 32 \end{aligned} $	0,5
		<p>Vì $P = -28(x + 2)^2 + 32 \leq 32$</p> <p>Nên GTLN của P là 32, đạt được khi $x = y = -2$</p>	0,5

Bài 5 (5,0 điểm):

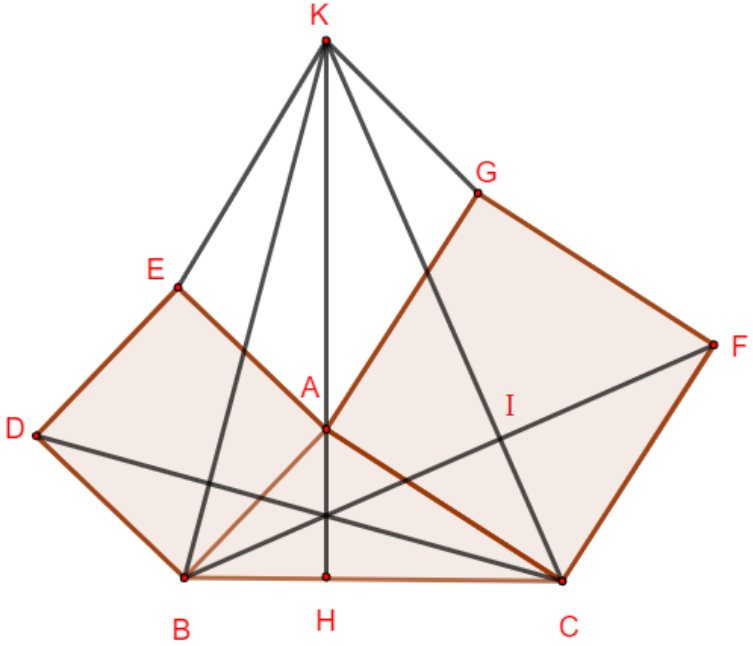
Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành

EAGK. Chứng minh rằng:

a) $AK = BC$

b) $AK \perp BC$

c) Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

<p>5.</p> <p>(5,0đ)</p>	<p>HV</p>		
	<p>a)</p> <p>(2.0đ)</p>	<p>Chứng minh: $AK = BC$</p>	
		<p>Xét $\angle AEK$ và $\angle BAC$, có:</p> <p>$EA = AB$ (gt); $EK = AC (=AG)$</p>	<p>0,75</p>
		<p>$\angle AEK = \angle BAC$ (vì cùng bù với $\angle EAG$)</p>	

		$\angle AEK = \angle BAC$ (c.g.c)	0,75
		$AK = BC$ (hai cạnh tương ứng) (đpcm)	0,5
	b) (2.0đ)	Chứng minh: $AK \perp BC$	
		Gọi H là giao điểm của AK và BC Ta có $\angle EKA = \angle KAG$ (so le trong, $EK \parallel AG$) và $\angle EKA = \angle ACH$ (vì $\angle AEK = \angle BAC$)	0,75
		$\angle KAG = \angle ACH$	
		Mặt khác: $\angle KAG + \angle HAC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACH + \angle HAC = 90^\circ$	0.75
		Vì $\angle AHC$, có $\angle ACH + \angle HAC = 90^\circ$ (cmt) $\angle AHC$ vuông tại H $AH \perp BC$ hay $AK \perp BC$ (đpcm)	0,5
	c)	Chứng minh: Các đường KA, BF, CD đồng qui	

	(1.0đ)	<p>Gọi I là giao điểm của CK và BF</p> <p>Chứng minh: $\angle AKC = \angle CBF$ (c.g.c)</p> <p> $\angle ACK = \angle BFC$ mà $\angle ACK + \angle KCF = 90^0$</p> <p> $\angle BFC + \angle KCF = 90^0$</p> <p> $\angle ICF$ vuông tại I $BF \perp KC$</p>	0,5
		<p>Chứng minh tương tự: $CD \perp KB$</p>	0,25
		<p>Vì KA, BF, CD là ba đường thẳng chứa ba cao của $\angle KBC$ nên ba đường thẳng này đồng qui. (đpcm)</p>	0,25

Bài 6 (1,5 điểm):

Trên đường thẳng cho các điểm A, B, C, D xếp theo thứ tự đó và $AB = CD$. Cho M là điểm bất kì không nằm trên đường thẳng AB. Chứng minh rằng: $MA + MD > MB + MC$.

6. (1.5đ)	HV		
		Chứng minh: $MA + MD > MB + MC$	
		<p>Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC.</p> <p>Ta có $AB = CD$ (gt) I là trung điểm của đoạn thẳng AD</p>	0,5
		<p>Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua I</p> <p> $NA = MD, NB = MC.$</p> <p> $MA + MD = MA + NA = MA + EA + EN$</p>	0,5

		<p>mà $\triangle MEA$ có $MA + EA > ME$ (BĐT tam giác)</p> <p>và $ME = MB + BE$</p> <p> $MA + MD > MB + BE + EN$</p>	0,25
		<p>mà $\triangle BEN$ có $BE + EN > NB$ (BĐT tam giác)</p> <p> $MA + MD > MB + NB$</p> <p> $MA + MD > MB + MC$ (đpcm)</p>	0,25

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HSG LỚP 6, 7, 8 CẤP HUYỆN

ĐOAN HÙNG

NĂM HỌC 2022 - 2023

Đề thi môn: TOÁN. Lớp 8.

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian phát đề)

Ghi chú:

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan chỉ có một lựa chọn đúng.
- Thí sinh làm bài thi trắc nghiệm và tự luận trên tờ giấy thi, không làm bài trên tờ đề thi.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho hai số a, b thỏa mãn $a + b = 1$. Giá trị của biểu thức

$$P = 2a^3 + 6ab + 2b^3 - 2023 \text{ bằng}$$

- A. -2023. B. -2022. C. -2021. D. -2019.

Câu 2. Khi chia đa thức $f(x)$ chia cho $(x + 2)$ dư -12 ; khi chia $f(x)$ cho $(x - 3)$ dư 28 . Đa thức dư khi chia $f(x)$

cho $(x^2 - x - 6)$ là

- A. $8x + 4$ B. $4x + 8$ C. $3x - 2$ D. $-2x + 3$

Câu 3. Cho a, b là hai số thỏa mãn $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2} = \frac{32x-19}{x^2-x-2}$ với mọi x sao cho các phân thức có nghĩa.

Khi đó hiệu $2a - b$ bằng

- A. -19. B. 19. C. 32. D. -32.

Câu 4. Cho $\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{3}{8}$. Giá trị của biểu thức $A = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 + 2xy + y^2}$ bằng (giả sử các biểu thức đều có

nghĩa)

A. $\frac{3}{8}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $-\frac{1}{7}$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của x nguyên để biểu thức A nhận giá trị nguyên?

$$A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{6}{3x - 6} + \frac{1}{x + 2} \right) : \frac{6}{x + 2} \text{ (với } x \neq \pm 2; x \neq 0 \text{)}$$

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Câu 6. Điều kiện của hệ số a để phương trình $x - a^2x + a = \frac{x^2}{x^2 - 1} + \frac{1}{1 - x^2}$ (ẩn x) có nghiệm duy nhất là

A. $a \neq 0; a \neq 1; a \neq 2$.

C. $a \neq \pm 1$

B. $a \neq \pm 1; a \neq -2; a \neq 0$.

D. $a \neq \pm 1; a \neq 0; a \neq \pm 2$.

Câu 7. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 132m. Nếu tăng chiều dài thêm 8m và giảm chiều rộng đi 4m

thì diện tích hình chữ nhật tăng thêm 52 m^2 . Chiều dài của hình chữ nhật là

A. 29.

B. 37.

C. 62.

D. 52.

Câu 8. Số các số nguyên dương thỏa mãn bất phương trình $\frac{1-2x}{4} - 2 < \frac{1-5x}{8}$ là

- A. 11. B. 12. C. 13. D. 14.

Câu 9. Cho ΔABC có $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$. Kẻ tia phân giác AD của góc BAC ($D \in BC$), tia phân giác BI của

góc ABD ($I \in AD$). Khi đó tỉ số $\frac{AI}{ID}$ bằng

- A. $\frac{ac}{a+c}$ B. $\frac{b+c}{c}$ C. $\frac{b+c}{ac}$ D. $\frac{b+c}{a}$

Câu 10. Cho hình thang $ABCD$ có đáy $AB = 9$ cm, $CD = 16$ cm, đường chéo $AC = 12$ cm và $\angle BCD = 52^\circ$. Số

đo góc CAD bằng

- A. 138° B. 52° C. 128° D. 148°

Câu 11. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm G thuộc cạnh CD sao cho $DG = \frac{1}{5}DC$. Gọi E là giao điểm của

AG và BD . Kết quả của tỉ số $DE : DB$ là

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

Câu 12. Cho hình thang ABCD có $AB = 5 \text{ cm}$, $CD = 15 \text{ cm}$, độ dài hai đường chéo $AC = 16 \text{ cm}$, $BD = 12 \text{ cm}$.

Diện tích hình thang ABCD bằng

- A. 96 cm^2 B. 192 cm^2 C. $100,8 \text{ cm}^2$ D. 72 cm^2

Câu 13. Cho hình thoi ABCD có cạnh $AB = a$. Một đường thẳng bất kì qua C cắt tia đối của các tia BA, DA

lần lượt tại M và N. Khi đó tích $BM \cdot DN$ có giá trị bằng

- A. a^2 B. $\frac{3}{2}a^2$ C. $2a^2$ D. $4a^2$

Câu 14. Cho hình thang ABCD có AB là đáy nhỏ, gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Qua O kẻ đường

thẳng song song với AB cắt AD và BC theo thứ tự tại M, N. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$. B. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{MN}$
- C. $\frac{1}{CD} + \frac{1}{MN} = \frac{1}{AB}$ D. $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{MN}{2}$.

Câu 15. Cho hình chữ nhật ABCD có $AD = 6$ cm, $AB = 8$ cm và hai đường chéo cắt nhau tại O. Qua D kẻ đường thẳng d vuông góc với DB, d cắt BC kéo dài tại E. Kẻ CH vuông góc với DE tại H. Khi đó tỉ số diện

tích $\frac{S_{EHC}}{S_{EBD}}$ bằng

A. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{16}{25}$

C. $\frac{256}{625}$

D. $\frac{25}{16}$

Câu 16. Một rô bốt chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 5m dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 10m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 15m dừng lại 3 giây. Cứ như vậy đi từ A đến B hết tất cả thời gian đi và dừng lại là 551 giây. Biết rằng rô bốt luôn chuyển động với vận tốc 2,5m/giây. Khoảng cách từ A đến B dài bao nhiêu mét?

A. 380 m

B. 1900 m

C. 950 m

D. 1127,5 m.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Tìm số nguyên tố p để $p^2 + 2$ và $p^3 + 2$ đều là các số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$.

Câu 2. (4,0 điểm)

a) Cho hai số thực phân biệt $a, b \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{3}{ab} = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = [(a-1)(b-1) + 2022]^{2023}$$

b) Giải phương trình $\frac{5}{x^2+1} + \frac{7}{x^2+3} - \frac{3x^2+6}{x^2+5} = 0$.

Câu 3. (4,0 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E, trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $AE =$

BF. Kẻ DM vuông góc với EC tại M.

a) Chứng minh rằng D, M, F thẳng hàng.

b) Tìm số đo góc BMD khi $AE = BE$.

c) Khi E di chuyển trên AB và vẫn luôn thỏa mãn $AE = BF$, tìm vị trí của E để diện tích tam giác DEF là nhỏ nhất?

Câu 4. (1,0 điểm) Cho x, y, z là 3 số thực dương thỏa mãn $x(x-z) + y(y-z) = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất

của biểu thức
$$P = \frac{x^3}{x^2+z^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{x^2+y^2+4}{x+y}.$$

ĐÁP ÁN

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8 điểm)

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	C	B	C	B	D
9	10	11	12	13	14	15	16
D	C	D	A	A	A	C	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (12 điểm)

Câu 1:

a) – Xét $p = 2$, thay vào $p^2 + 2$ ta có $p^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$ là hợp số

Suy ra $p = 2$ (loại)

- Xét $p = 3$ thay vào ta có:

$p^2 + 2 = 3^2 + 2 = 11$ là số nguyên tố

$$p^3 + 2 = 3^3 + 2 = 29 \text{ là số nguyên tố}$$

Suy ra $p = 3$ (thỏa mãn)

- Xét $p > 3$

Trong ba số tự nhiên liên tiếp $p - 1$; p ; $p + 1$ tồn tại một số chia hết cho 3. Vì

$p > 3$ và p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 3

Nếu $p - 1$ hoặc $p + 1$ chia hết cho 3 thì

$$(p-1)(p+1) : 3 \Rightarrow p^2 - 1 : 3$$

$$\Rightarrow p^2 + 2 = p^2 - 1 + 3 : 3$$

$\Rightarrow p^2 + 2$ là hợp số nên trường hợp $p > 3$ loại

Vậy $p = 3$.

b) $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + 2x + 1) = 21 - 3y^2$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 21 - 3y^2 \quad (1)$$

Vì $2(x+1)^2 \geq 0, \forall x$ nên $21-3y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq 7$

Vì $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 \in \{0;1;4\}$

- Với $y^2 = 0$ thay vào (1) ta có $2(x+1)^2 = 21 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{21}{2} \notin \mathbb{Z}$ (loại)

- Với $y^2 = 1$ thay vào (1) ta có: $2(x+1)^2 = 18 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 9$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=3 \\ x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-4 \end{cases}$$

- Với $y^2 = 4$ thay vào (1) ta có: $2(x+1)^2 = 21-12 \Leftrightarrow (x+1)^2 = \frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$ (loại)

Vậy các cặp giá trị (x, y) thỏa mãn yêu cầu của đề bài là:

$(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)$

Câu 2:

a) Áp dụng HĐT: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Với $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = -1$ ta có: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} - 1 + \frac{3}{ab} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 \right) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 0$$

$$\forall \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 1 - \frac{1}{ab} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{a} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{b} + 1 \right)^2 + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)^2 \right] > 0 \text{ với mọi } a, b \neq 0$$

$$\text{Nên (1)} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - 1 = 0 \Leftrightarrow a + b = ab \Leftrightarrow ab - a - b = 0$$

$$\text{Do đó: } T = (ab - a - b + 1 + 2022)^{2023} = 2023^{2023}$$

$$\text{Vậy } T = 2023^{2023}$$

$$\text{b) } \frac{5}{x^2+1} + \frac{7}{x^2+3} - \frac{6+3x^2}{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{x^2+1} - 1 \right) + \left(\frac{7}{x^2+3} - 1 \right) + \left(2 - \frac{6+3x^2}{x^2+5} \right) = 0$$

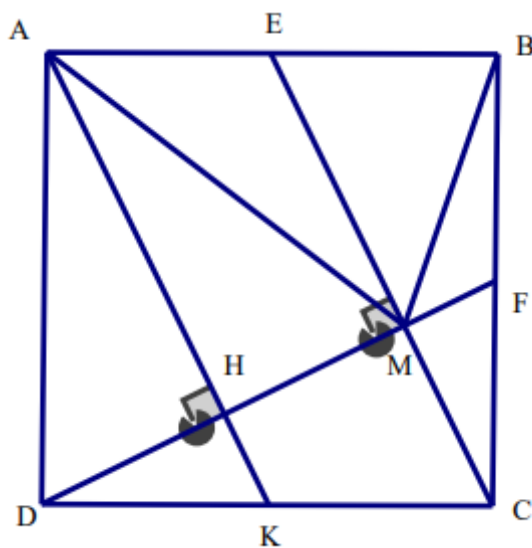
$$\Leftrightarrow \frac{4-x^2}{x^2+1} + \frac{4-x^2}{x^2+3} + \frac{4-x^2}{x^2+5} = 0$$

$$\Leftrightarrow (4-x^2) \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+5} \right) = 0$$

$$\forall \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+5} \right) > 0, \forall x \text{ nên } 4-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình } S = \{-2; 2\}$$

Câu 3:



a) Giả sử DF cắt EC tại M

Ta có: $\begin{cases} AB = BC \\ AE = BF \end{cases} \Rightarrow EB = CF.$

Xét tam giác BEC và tam giác CFD, ta có: $EB = FC$; $BC = CD$; $B = C = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle BEC = \triangle CFD$$

$$\Rightarrow \angle ECB = \angle FDC$$

Mà $\angle ECB + \angle ECD = 90^\circ$ nên $\angle ECD + \angle FDC = 90^\circ \Rightarrow \angle DMC = 90^\circ$

Hay $DM \perp EC$

Mà DM vuông góc với EC tại M (gt)

Vậy D, M, F thẳng hàng

b) Kẻ AH vuông góc với DM, K là giao của DC và AH

Ta có: AECK là hình bình hành $\Rightarrow AE = CK$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} AE = \frac{1}{2} AB \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow KC = \frac{1}{2} DC$$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của DC

Ta lại có KH // CM suy ra H là trung điểm của DM.

Nhưng: AH \perp DM \Rightarrow ADM là tam giác cân tại A.

$\Rightarrow AD = AM$

Mà AD = AB \Rightarrow AM = AB \Rightarrow ABM cân tại A

Từ ADM cân tại A ta có: $AMD = \frac{180^\circ - DAM}{2}$

Từ ABM cân tại A ta có: $AMB = \frac{180^\circ - BAM}{2}$

$$\Rightarrow AMD + AMB = \frac{180^\circ - DAM}{2} + \frac{180^\circ - BAM}{2}$$

$$\Rightarrow BMD = 135^{\circ}$$

c) Ta có: $\triangle EBC = \triangle FCD$

$$\Rightarrow S_{EMFB} + S_{MFC} = S_{DMC} + S_{MFC}$$

$$\Rightarrow S_{EMFB} = S_{DMC}$$

$$\Rightarrow S_{DEM} + S_{EMFB} = S_{DEM} + S_{DMC}$$

$$\Rightarrow S_{DEBF} = S_{DEC}$$

Lại có: $S_{DEC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC$ không đổi

$\Rightarrow S_{DEBF}$ không đổi

Ta lại có: $BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} (BE + BF)^2$

$$\Rightarrow BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} (BE + AE)^2$$

$$\Rightarrow BE \cdot BF \leq \frac{1}{4} \cdot AB^2$$

$\Rightarrow BE \cdot BF$ lớn nhất khi $BE = BF$

$\Rightarrow S_{BEF}$ lớn nhất khi $BE = BF$

Mà $S_{DEF} = S_{DEBF} - S_{BEF}$ nên S_{DEF} nhỏ nhất khi $BE = EA$

S_{DEF} nhỏ nhất khi E là trung điểm của AB.

Khi đó S tam giác EFD bằng $\frac{3}{8}$ diện tích hình vuông ABCD

Câu 4:

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{x^3}{x^2 + z^2} = x - \frac{xz^2}{x^2 + z^2} \geq x - \frac{xz^2}{2xz} = x - \frac{z}{2}.$$

$$\text{Tương tự } \frac{y^3}{y^2 + z^2} \geq y - \frac{z}{2}$$

$$\text{Suy ra: } P \geq x + y - z + \frac{x^2 + y^2 + 4}{x + y}$$

$$\text{Theo giả thiết: } z = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \Rightarrow P \geq x + y + \frac{4}{x + y} \geq 4$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = 4 \Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1:

$$P = 2(a+b)(a^2 - ab + b^2) + 6ab - 2023 = 2(a^3 + 2ab + b^3) - 2023 = -2021$$

Câu 2:

$$f(x) = (x+2) \cdot Q(x) - 12$$

$$f(x) = (x-3) \cdot P(x) + 28$$

$$f(x) = (x^2 - x - 6) \cdot G(x) + ax + b$$

$$f(-2) = -12 \Rightarrow -2a + b = -12$$

$$f(3) = 28 \Rightarrow 3a + b = 28$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

Câu 3:

$$\frac{a(x-2) + b(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{32x-19}{x^2-x-2} \text{ đúng với mọi } x \neq 2; x \neq -1$$

$$\Rightarrow (a+b)x - 2a + b = 32x - 19 \text{ đúng với mọi } x \neq 2; x \neq -1$$

$$\Rightarrow -2a + b = -19 \Rightarrow 2a - b = 19$$

Câu 5:

Thu gọn A được kết quả $A = \frac{1}{2-x}$. Để A nhận giá trị nguyên thì

$$2-x \in U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{1; 3\}$$

Câu 6:

Biến đổi phương trình trở thành: $x(1-a^2) = -a+1$

Phương trình có nghiệm duy nhất khi $1-a^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm 1$

Câu 7:

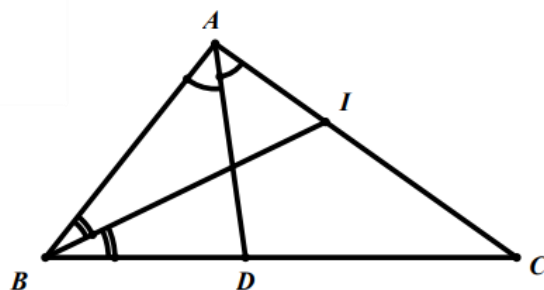
Gọi chiều dài hình chữ nhật là x , chiều rộng là 66 - x

Ta có phương trình: $(x+8)(62-x) = x(66-x) + 52$

Giải phương trình ta được $x = 37$

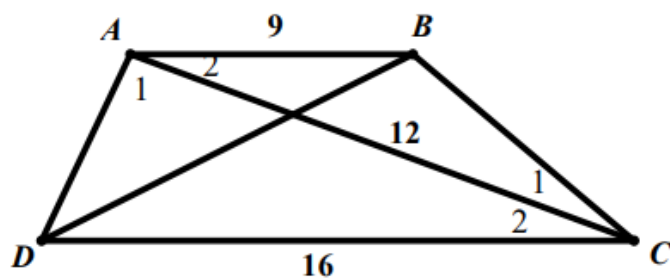
Câu 8: Giải bất phương trình ta được $x < 15$

Câu 9:



$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB+AC}{DB+DC} = \frac{AB+AC}{BC} = \frac{b+c}{a}$$

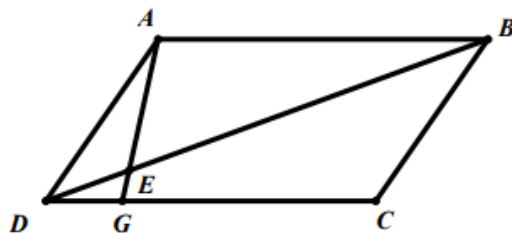
Câu 10:



$$\triangle BAC \sim \triangle ACD (\text{c.g.c}) \Rightarrow \hat{A}_1 = \angle ABC$$

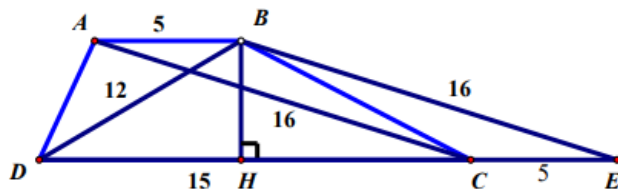
$$\text{Mà } \angle ABC + \angle BCD = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 128^\circ \Rightarrow \angle CAD = \angle ABC = 128^\circ$$

Câu 11:



Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{DE}{EB} = \frac{DG}{AB} = \frac{DG}{DC} = \frac{1}{5} \Rightarrow DE = \frac{1}{5} EB \Rightarrow \frac{DE}{DB} = \frac{1}{6}$

Câu 12:

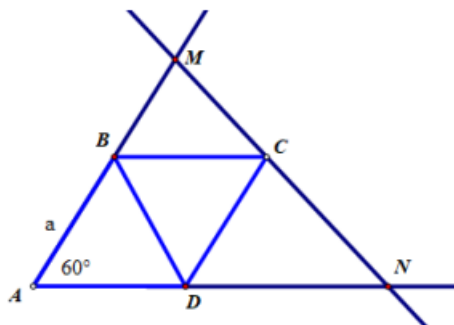


Kẻ $BE \parallel AC$, E thuộc đường thẳng DC. Có $BD^2 + BE^2 = DE^2$ suy ra $\triangle BDE$ vuông

$$\triangle HDB \sim \triangle BDE \Rightarrow BH = \frac{BE \cdot BD}{DE} = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9,6$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 96 (\text{cm}^2)$$

Câu 13:

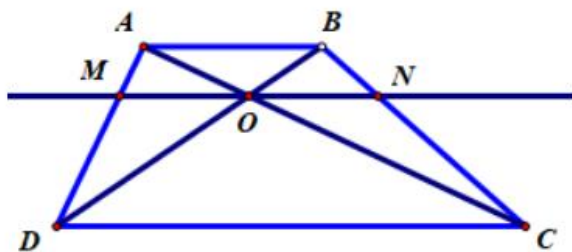


$$\text{Vì } BC \parallel AN \Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{CM}{CN}$$

$$\text{Vì } CD \parallel AM \Rightarrow \frac{AD}{ND} = \frac{CM}{CN}$$

$$\Rightarrow \frac{MB}{BA} = \frac{AD}{ND} \Rightarrow BM \cdot ND = AD \cdot BA = a^2$$

Câu 14:



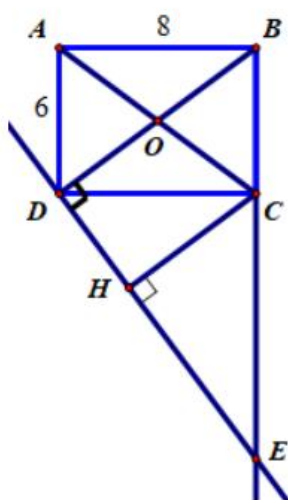
Áp dụng định lý Ta-let và hệ quả ta có:

$$\frac{OM}{AB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow OM = ON$$

Ta lại có: $\frac{ON}{CD} = \frac{OB}{DB}; \frac{OM}{AB} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow \frac{OM}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{OB+OD}{DB} = \frac{DB}{DB} = 1$

Vì $OM = ON = \frac{MN}{2}$ nên $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$

Câu 15:



$$\triangle CHD \sim \triangle DCB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{CH}{CD} \Rightarrow CD^2 = CH \cdot BD$$

$$\frac{S_{EHC}}{S_{EBD}} = \left(\frac{CH}{DB} \right)^2 = \left(\frac{CH \cdot DB}{DB^2} \right)^2$$

$$= \left(\frac{CD^2}{BD^2} \right)^2 = \left(\frac{8^2}{10^2} \right)^2 = \frac{256}{625}$$

Câu 16:

Gọi số lần đi là x (lần) ($x \in \mathbb{N}^*$)

Số lần dừng là $x - 1$ (lần)

Thời gian đi là $\frac{5}{2,5} + \frac{10}{2,5} + \dots + \frac{5x}{2,5} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x = x(x+1)$ (giây)

Thời gian dừng là: $1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{x(x-1)}{2}$ (giây)

Theo đề bài ta có: $x(x+1) + \frac{x(x-1)}{2} = 551$

Giải phương trình ta được: $\begin{cases} x = 19 \text{ (chọn)} \\ x = -\frac{58}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

Thời gian đi là 19. $(19 + 1) = 380$ (giây)

Khoảng cách AB là: $2,5.380 = 950$ (m)

UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

CHỌN ĐỘI TUYỂN VÒNG 1 DỰ THI

HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**NĂM HỌC: 2024 – 2025****ĐỀ CHÍNH THỨC****Môn thi: Toán****Thời gian: 150 phút****(Không kể thời gian giao đề)**

Câu 1: (4 điểm)

1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5 - x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x - 5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5 - x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$

Rút gọn biểu thức P.

2. Cho ba số a, b, c khác 0 và thỏa mãn: $a + b + c = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}.$$

Câu 2: (4 điểm)

1. Giải phương trình: $(4x - 5)^2(2x - 3)(x - 1) = 9$

2. Cho a, b, c là các số thực đôi một khác nhau thỏa mãn

$$a^3 + 1 = 3a; b^3 + 1 = 3b; c^3 + 1 = 3c.$$

Chứng minh:

a) $a + b + c = 0$

b) $a^2 + b^2 + c^2 = 6$

Câu 3: (4 điểm)

1. Tìm tất cả các số x, y nguyên thỏa mãn: $x^4 + y + 4 = y^2 - x^2$

2. Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $p = a^2 + b^2 + c^2$, trong đó a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p .

Câu 4: (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD có cạnh là a . Điểm E thuộc cạnh BC, F là giao điểm của AE và DC, G là giao điểm của DE và BF. Trên tia đối của tia DC lấy điểm M sao cho $BE = DM$. Gọi T là trung điểm của EM.

1. Chứng minh tam giác AEM vuông cân và ba điểm B, T, D thẳng hàng.

2. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của AB với CG và DG. Chứng minh $IE \parallel BD$.

3. Tìm vị trí điểm E trên cạnh BC để tổng $BK + CF$ đạt GTNN.

Câu 5: (2 điểm)

Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y + xy = 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$ ta có:

$$P = \left(\frac{x}{x^2 - 25} + \frac{5-x}{x^2 + 5x} \right) : \frac{2x-5}{2x^2 + 10x} + \frac{2x}{5-x}$$

$$P = \left[\frac{x}{(x+5)(x-5)} - \frac{x-5}{x(x+5)} \right] : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{x^2 - (x-5)^2}{x(x+5)(x-5)} : \frac{2x-5}{2x(x+5)} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{(x-x+5)(x+x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{5 \cdot (2x-5)}{x(x-5)(x+5)} \cdot \frac{2x(x+5)}{2x-5} + \frac{2x}{5-x}$$

$$= \frac{10}{x-5} - \frac{2x}{x-5}$$

$$= \frac{10-2x}{x-5} = \frac{2(5-x)}{x-5} = -2$$

Vậy $P = -2$ với $x \neq 0; x \neq \pm 5; x \neq \frac{5}{2}$.

$$2. \text{ Từ } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \Rightarrow (a+b)^2 = (-c)^2 \Rightarrow a^2+b^2-c^2 = -2ab$$

$$\text{Tương tự, } b^2+c^2-a^2 = -2bc; \quad c^2+a^2-b^2 = -2ca$$

$$\text{Do đó: } P = \frac{1}{-2ab} + \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ca} = -\frac{c+a+b}{2abc} = 0$$

Câu 2:

$$1. \quad (4x-5)^2(2x-3)(x-1) = 9$$

$$\Leftrightarrow (16x^2 - 40x + 25)(2x^2 - 5x + 3) = 9$$

$$\Leftrightarrow [8(2x^2 - 5x) + 25](2x^2 - 5x + 3) = 9$$

$$\text{Đặt } 2x^2 - 5x = t$$

$$\Rightarrow (8t + 25)(t + 3) = 9$$

$$\Leftrightarrow 8t^2 + 49t + 66 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 2)(8t + 33) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -2 \text{ hoặc } t = -\frac{33}{8}$$

$$+) t = -2 \Rightarrow 2x^2 - 5x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+) t = -\frac{33}{8} \Rightarrow 2x^2 - 5x = -\frac{33}{8} \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + \frac{33}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 10x + \frac{33}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm vì } \left(2x - \frac{5}{2}\right)^2 + 2 > 0, \forall x)$$

$$\text{Vậy } S = \left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$$

2. a) Từ giả thiết: $a^3 + 1 = 3a$; $b^3 + 1 = 3b$; $c^3 + 1 = 3c$, ta có:

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = 3(a - b) \\ b^3 - c^3 = 3(b - c) \\ c^3 - a^3 = 3(c - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + ab + b^2 = 3(1) \\ b^2 + bc + c^2 = 3(2) \\ c^2 + ca + a^2 = 3(3) \end{cases} \quad (\text{vì } a, b, c \text{ đôi một khác nhau})$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$a^2 - c^2 + ab - bc = 0 \Leftrightarrow (a - c)(a + b + c) = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 \quad (\text{vì } a, b, c \text{ đôi một khác nhau})$$

b) Cộng (1), (2), (3) vế với vế ta có: $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + ab + bc + ca = 9$

$$\Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2ab + 2bc + 2ca = 18 \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + 0 = 18$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$$

Câu 3:

$$1. \text{ Ta có: } x^4 + y + 4 = y^2 - x^2 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y)(x^2 - y + 1) = -4$$

Ta có x, y nguyên; $(x^2 + y + x^2 - y + 1) = 2x^2 + 1$ là số lẻ

Nên $x^2 + y$ và $x^2 - y + 1$ phải có một số là số lẻ

Ta có bảng sau:

$x^2 - y + 1$	-1	-4	4	1
$x^2 + y$	4	1	-1	-4
y	3	3	-2	-2
x^2	1	-2 (loại)	1	-2 (loại)
x	1; -1		1; -1	

Vậy các số nguyên (x, y) cần tìm là: $(1; 3); (-1; 3); (1; -2); (-1; -2)$.

2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử: $a \geq b \geq c \geq 1$.

Ta có: $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

Vì p là số nguyên tố và $p = a^2 + b^2 + c^2$, với $a \geq b \geq c \geq 1$. nên $p \geq 3$

Suy ra $a^4 + b^4 + c^4$ chia hết cho p khi và chỉ khi $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ chia hết cho p hay

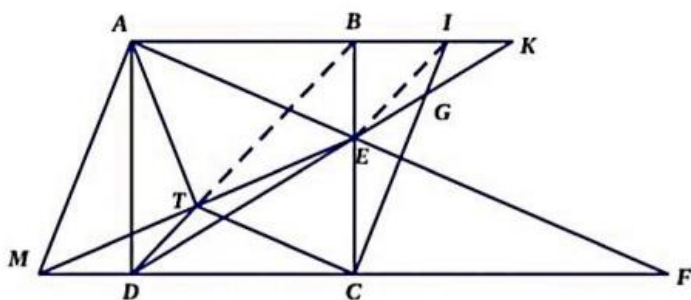
$$a^2b^2 + c^2(b^2 + a^2) : p \Leftrightarrow a^2b^2 - c^4 : p \Leftrightarrow (ab - c^2)(ab + c^2) : p.$$

Vì $p = a^2 + b^2 + c^2 > ab + c^2 > ab - c^2 \geq 0$ và p là số nguyên tố nên $ab - c^2 = 0$

$$\Leftrightarrow ab = c^2 \Leftrightarrow a = b = c \text{ (vì } a \geq b \geq c \geq 1.) \Leftrightarrow p = 3a^2 \Leftrightarrow a = b = c = 1 \text{ và } p = 3.$$

Vậy có duy nhất một số nguyên tố thỏa mãn là $p = 3$.

Câu 4:



1. Xét $\triangle ADM$ và $\triangle ABE$ có: $AD = AB = a$; $\angle ADM = \angle ABE = 90^\circ$; $MD = BE$ (gt)

Suy ra $\triangle ADM = \triangle ABE$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AE$ (các cạnh tương ứng) (1)

Và $\angle DAM = \angle BAE$ (các góc tương ứng)

Mà $\angle DAE + \angle BAE = \angle DAB = 90^\circ \Rightarrow \angle MAD + \angle DAE = 90^\circ \Rightarrow \angle MAE = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle AME$ vuông cân tại A.

Ta có: $\triangle AME$ vuông cân tại A, T là trung điểm của ME

nên $AT = \frac{1}{2}ME$ (trung tuyến ứng với cạnh huyền)

Tương tự $CT = \frac{1}{2}ME$

Suy ra: $TA = TC$.

Mà $BA = BC$, $DA = DC$ (cạnh của hình vuông) nên 3 điểm T, B, D cùng nằm trên đường trung trực của AC.

Suy ra B, T, D thẳng hàng.

2. Vì ABCD là hình vuông nên $AB \parallel CD \Rightarrow BK \parallel DF$ và $AK \parallel DF$.

Xét tam giác DCG có $IK \parallel CF$ nên theo định lý Thales ta có: $\frac{IK}{CD} = \frac{IG}{GC}$

Chứng minh tương tự ta được $\frac{IG}{GC} = \frac{IB}{CF}$. Từ đó suy ra $\frac{IK}{IB} = \frac{CD}{CF}$ (1)

Xét các tam giác EDC và ECF có $AK \parallel DF$, theo định lý Thales ta có:

$$\frac{KE}{ED} = \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{CF} \quad (2)$$

Ta lại có $AB = CD$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$

Tam giác BKD có: $\frac{IK}{IB} = \frac{KE}{ED}$ nên IE // BD (Theo định lý Thales đảo)

3. Xét tam giác CEF có AB // CF nên theo định lý Thales ta có: $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{CE}$ (3)

Xét tam giác DEC có BK // CD nên theo định lý Thales ta có: $\frac{BK}{CD} = \frac{BE}{CE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\frac{BK}{CD} = \frac{AB}{CF} \Leftrightarrow BK.CF = AB.CD = a^2$

Do $BK.CF = a^2$ không đổi nên $BK + CF \geq 2\sqrt{BK.CF} = 2a$ đạt GTNN khi và chỉ khi $BK = CF = a$.

Khi đó E là trung điểm của BC.

Câu 5:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Vậy GTNN của P là $\frac{5}{2}$ khi $x = y = 1$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐỒ

ĐỀ THI OLYMPIC 27/4 CẤP HUYỆN

HUYỆN XUYỀN MỘC

NĂM HỌC 2023 – 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN: TOÁN – LỚP 8

Ngày thi: 12 tháng 12 năm 2023

*Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1)(x-3)}$ ($x \neq -1; x \neq 3$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (3,5 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $4x^4 - 5x^2 + 1$

b) Chứng minh rằng: $B = 5n^3 + 10n$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho $A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$ và $B = 3^{32}$

Hãy so sánh giá trị của A và B

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75$.

Câu 4: (7,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Lấy điểm K trên HC sao cho

$AH = HK$. Từ K vẽ đường thẳng vuông góc với BC , từ A vẽ đường thẳng vuông

góc với AH , hai đường thẳng này cắt nhau tại E .

a) Chứng minh rằng tứ giác $AHKE$ là hình vuông.

b) Gọi P là giao điểm của KE và AC . Chứng minh rằng $AB = AP$.

- c) Qua P vẽ đường thẳng song song với AB , qua B vẽ đường thẳng song song với AC , hai đường thẳng này cắt nhau tại Q . Gọi I là giao điểm của PB và AQ . Chứng minh I, H, E thẳng hàng.
- d) Tính góc AKQ ?

Câu 5: (1,5 điểm)

Cho 1 lưới ô vuông có kích thước 4×4 . Người ta điền vào mỗi ô của lưới 1 trong các số $-4, 0, 4$. Xét tổng các số theo từng cột, theo từng hàng và theo từng hàng chéo. Chứng minh rằng trong tất cả các tổng luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

♾️HẾT♾️

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{x}{x+1} + \frac{3}{x-3} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1)(x-3)}$ ($x \neq -1; x \neq 3$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{x(x-3)}{(x+1) \cdot (x-3)} + \frac{3 \cdot (x+1)}{(x-3) \cdot (x+1)} + \frac{x^3 - 4x^2 - 3}{(x-3) \cdot (x+1)}$$

$$= \frac{x^2 - 3x + 3x + 3 + x^3 - 4x^2 - 3}{(x+1) \cdot (x-3)} = \frac{x^3 - 3x^2}{(x+1) \cdot (x-3)}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x+1) \cdot (x-3)} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\text{b) } A = \frac{x^2}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} = x-1 + \frac{1}{x+1}$$

Để A nguyên khi x nguyên thì:

$$x+1 \in U(1) = \{\pm 1\} \Rightarrow x \in \{0; -2\}$$

Câu 2: (3,5 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $4x^4 - 5x^2 + 1$

b) Chứng minh rằng: $B = 5n^3 + 10n$ chia hết cho 15 với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$$\text{a) } 4x^4 - 5x^2 + 1 = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 9x^2 = (2x^2 + 1)^2 - (3x)^2$$

$$= (2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 3x + 1)$$

$$= (2x - 1)(x - 1)(2x + 1)(x + 1)$$

$$\text{b) } B = 5n^3 + 10n = 5n^3 - 5n + 15n = 5n(n^2 - 1) + 15n$$

$$= 5n(n - 1)(n + 1) + 15n$$

Vì $n(n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 3 nên $5n(n - 1)(n + 1)$ chia hết cho 15

Mà $15n$ chia hết cho 15. Do đó B chia hết cho 15.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho $A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$ và $B = 3^{32}$

Hãy so sánh giá trị của A và B

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75$.

Lời giải

$$a) A = (3^2 - 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = (3^4 - 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1)$$

$$A = (3^8 - 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = (3^{16} - 1)(3^{16} + 1) = (3^{32} - 1)$$

Vì $3^{32} - 1 < 3^{32}$ nên $A < B$

$$b) A = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 75 = x^4 - 2x^2 \cdot 2x + 4x^2 + 3x^2 - 12x + 12 + 63$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 4x + 4) + 63$$

$$= (x^2 - 2x)^2 + 3(x + 2)^2 + 63 \geq 63$$

Min $A = 63$ khi $x = 2$

Câu 4: (7,0 điểm)

Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Lấy điểm K trên HC sao cho

$AH = HK$. Từ K vẽ đường thẳng vuông góc với BC , từ A vẽ đường thẳng vuông

góc với AH , hai đường thẳng này cắt nhau tại E .

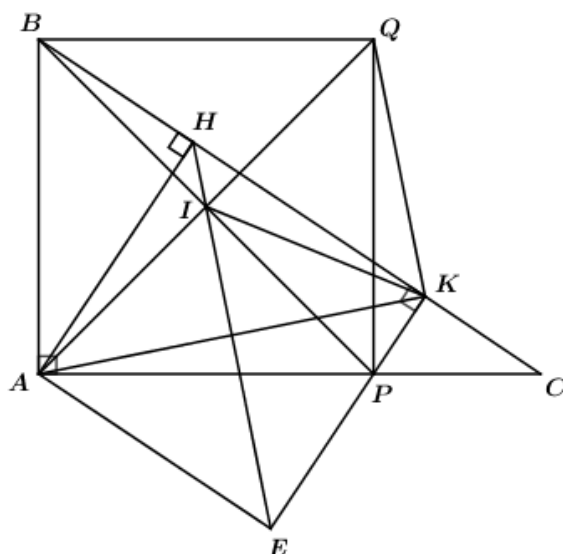
a) Chứng minh rằng tứ giác $AHKE$ là hình vuông.

b) Gọi P là giao điểm của KE và AC . Chứng minh rằng $AB = AP$.

c) Qua P vẽ đường thẳng song song với AB , qua B vẽ đường thẳng song song với AC , hai đường thẳng này cắt nhau tại Q . Gọi I là giao điểm của PB và AQ . Chứng minh I, H, E thẳng hàng.

d) Tính góc AKQ ?

Lời giải



a) Xét tứ giác $AHKE$ có: $A = 90^\circ$, $K = 90^\circ$, $H = 90^\circ$

$\Rightarrow AHKE$ là hình chữ nhật.

Mà $HA = HK$ (gt)

$\Rightarrow AHKE$ là hình vuông.

b) Có $AHKE$ là hình vuông (c/m câu a) suy ra $\begin{cases} A = K = H = E = 90^\circ \\ AH = KH = KE = EA \end{cases}$

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AEP$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AHB = AEP \\ AH = AE \\ HAB = EAP (= 90^\circ - HAP) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHB = \triangle AEP (c.g.c) \Rightarrow AB = AP.$$

c) Có $AHKE$ là hình vuông (c/m câu a)

Nên đường thẳng HE là trung trực của AK (1)

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel PQ, AP \parallel BQ \\ \text{Xét tứ giác } ABQP \text{ có: } BAP = 90^\circ \\ AB = AP \end{array} \right\} \Rightarrow ABQP \text{ là hình vuông}$$

$$\Rightarrow IA = IP = IQ$$

Trong tam giác vuông BPK có KI là trung tuyến nên $KI = PI$ mà

$$IP = IA \Rightarrow IA = IK \text{ hay } I \text{ thuộc trung trực của } AK \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có H, I, E thẳng hàng.

d) Trong tam giác AQK có $IK = IA$ (cmt)

Mà $IA = IQ \Rightarrow IA = IQ = IK$

Nên tam giác AQK vuông tại K . Vậy $AKQ = 90^\circ$ (đpcm)

Câu 5: (1,5 điểm)

Cho 1 lưới ô vuông có kích thước 4×4 . Người ta điền vào mỗi ô của lưới 1 trong các số $-4, 0, 4$. Xét tổng các số theo từng cột, theo từng hàng và theo từng hàng chéo.

Chứng minh rằng trong tất cả các tổng luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

Lời giải

Có tất cả 10 tổng gồm 4 tổng theo cột, 4 tổng theo hàng và 2 tổng theo đường chéo.

Mỗi tổng gồm 4 số hạng mà mỗi số hạng nhận 1 trong 3 số là $4, -4, 0$. Nên mỗi tổng

là 1 số nguyên. Gọi các tổng là S_i với $i = 1, 2, 3, \dots, 10$

S_i sẽ nhận 9 giá trị là $-16, -12, -8, -4; 0; 4; 8; 12; 16$.

Mà ta lại có 10 S_i , nên sẽ luôn tồn tại 2 tổng có giá trị bằng nhau.

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI**ĐỀ THI KIỂM ĐỊNH CHẤT LƯỢNG****ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG MÔN TOÁN LỚP 8****NĂM HỌC 2022 – 2023***(Thời gian làm bài 120 phút)***Bài 1. (5,0 điểm)**

1. Chứng minh rằng $n(3n^2 + 2022)$ chia hết cho 9 với mọi số nguyên n
2. Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^4 + ax^2 + b$ chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^2 - 3x + 2$$

3. Cho n là một số tự nhiên. Chứng minh rằng $A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn : $x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$

2. Tìm số thực x thỏa mãn: $(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = (x - 2)^2 + (2x + 1)^2$$

2. Cho các số thực x, y có $x + y = 2$ chứng tỏ rằng $xy \leq 1$

Bài 4. (6,0 điểm)

1. Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của

tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$.

a) Chứng minh $\triangle MDN$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi K là trung điểm

MN. Chứng minh O, C, K thẳng hàng.

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), đường cao AH. Kẻ HD

vuông góc AB (D thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD, trên tia đối của tia

BC lấy điểm K sao cho $BK = BH$. Chứng minh KD vuông góc với HI.

Bài 5. (1,0 điểm) Cho x là số thực sao cho $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mọi số

nguyên dương n thì $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN TOÁN 8

Câu	Nội dung	Điểm

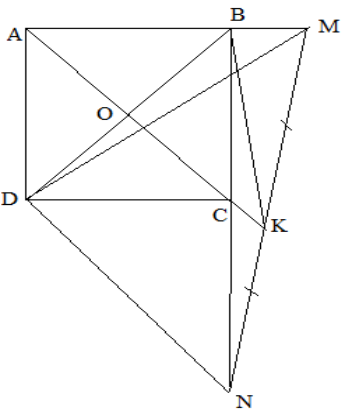
		<p>Theo bài ra, $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ nên $f(x)$ cũng chia hết cho $x - 1$ và $x - 2$</p> $\Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 16 + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow 15 + 3a = 0 \Rightarrow a = -5$ $\Rightarrow b = -1 - a = -1 + 5 = 4$ <p>Vậy $a = -5, b = 4$</p>	0,25
	3	$A = n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$	2,0
		$A = (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n + 1 - 1)(n^2 + 3n + 1 + 1) + 1$ $A = (n^2 + 3n + 1)^2 - 1 + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2 \text{ là số chính phương với mọi số tự nhiên } n$	1,5 0,5
2 (4,0đ)	1	<p>Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn :</p> $x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$	2,0

	$x^2 + 2y^2 + xy - 2xy^2 = x + y + 1$ $\Leftrightarrow 2y^2(1-x) - x(1-x) - y(1-x) = 1$ $\Leftrightarrow (1-x)(2y^2 - x - y) = 1 \quad (1)$ <p>Vì x, y nguyên nên $1-x$ và $2y^2 - x - y$ nguyên</p> $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2-x-y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2-x-y=-1 \end{cases}$ $TH1: \begin{cases} 1-x=1 \\ 2y^2-x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ (y-1)(2y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x=0 \\ y=1 \end{bmatrix} (TM) \\ \begin{bmatrix} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{bmatrix} (KTM) \end{cases}$ $TH2: \begin{cases} 1-x=-1 \\ 2y^2-x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y^2-y-1=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ (y-1)(2y+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x=2 \\ y=1 \end{bmatrix} (TM) \\ \begin{bmatrix} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{bmatrix} (KTM) \end{cases}$ <p>Vậy: $x=0; y=1$ hoặc $x=2; y=1$</p>	<p>1,0</p> <p>0,5</p>
--	--	-----------------------

--	--	--	--

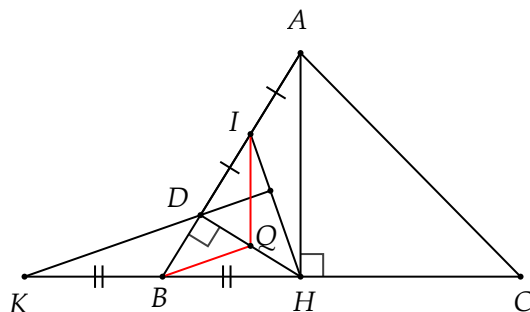
			0,5
2	Giải phương trình: $(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3$		2,0
	$(x - 2022)^3 + (x - 2023)^3 = (2x - 4045)^3$ Đặt $x - 2022 = a$, $x - 2023 = b \Rightarrow 2x - 4045 = a + b$ Phương trình đã cho trở thành: $a^3 + b^3 = (a + b)^3$ $\Leftrightarrow a^3 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ $\Leftrightarrow 3ab(a + b) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2022 = 0 \\ x - 2023 = 0 \\ 2x - 4045 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ x = 2023 \\ x = \frac{4045}{2} \end{cases}$	0,5 <	

		Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2022; 2023; \frac{4045}{2}\}$	0,5
3 (4,0đ)	1	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = (x - 2)^2 + (2x + 1)^2$	2,0
		$A = (x - 2)^2 + (2x + 1)^2 = 5x^2 + 5 \geq 5$	1,0
		Dấu bằng xảy ra khi $x=0$. Vậy $A_{\min}=5$ khi $x=0$	1,0
	2	Cho các số thực x, y có $x+y=2$ chứng tỏ rằng $xy \leq 1$	2,0
		Ta có $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - y)^2 + 4xy \geq 4xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$ $\Rightarrow 2^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq 1$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$	1,0 0,5 0,5

<p>4 (6,0đ)</p>	<p>1</p>	<p>Cho hình vuông ABCD, trên tia đối của tia BA lấy điểm M, trên tia đối của tia CB lấy điểm N sao cho $AM = CN$.</p> <p>c) Chứng minh $\triangle MDN$ vuông cân</p> <p>d) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh O, C, K thẳng hàng.</p> 	<p>0,5</p>
	<p>a</p>	<p>Xét $\triangle ADM$ và $\triangle CDN$ có:</p>	

	<p>$AD = DC$ (gt)</p> <p>$ADM = DCN = 90^0$</p> <p>$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CDN$ (c.g.c)</p> <p>$\Rightarrow DM = DN$ (2 cạnh tương ứng) (1)</p> <p>Do $\Delta ADM = \Delta CDN \Rightarrow ADM = CDN$</p> <p>Mà:</p> <p>$ADM + MDC = 90^0$ $\Rightarrow MDN = 90^0$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MDN$ vuông cân</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
b	<p>Do tứ giác ABCD là hình vuông nên CO là đường trung trực của BD (3)</p> <p>ΔBMN vuông tại B, có K là trung điểm của MN</p> <p>$\Rightarrow BK = MK = \frac{1}{2}MN$</p>	0,5

		<p>ΔMDN vuông tại D có K là trung điểm của MN</p> <p>$\Rightarrow DK = \frac{1}{2}MN$</p> <p>$\Rightarrow BK = DK \Rightarrow K$ thuộc đường trung trực của BD (4)</p> <p>Từ (3) và (4) $\Rightarrow C; O; K$ thẳng hàng.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
	2	<p>Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), đường cao AH. Kẻ HD vuông góc AB (D thuộc AB). Gọi I là trung điểm của AD, trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $BK = BH$.</p> <p>Chứng minh KD vuông góc với HI.</p>	



Lấy Q là trung điểm của HD , nối BQ .

Xét tam giác DHA có: $IA = ID$ (gt); $QD = QH$ (cách vẽ)

⇒ IQ là đường trung bình

$$\Rightarrow \text{IQ} // \text{AH}$$

Mà $AH \perp BC$ (gt)

$\Rightarrow IQ \perp BC$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

Xét $\triangle IBH$ có 2 đường cao HD và IQ; HD cắt IQ tại Q

$\Rightarrow Q$ là trực tâm $\Rightarrow BQ \perp IH$ (tính chất trực tâm)

Xét ΔHKD có:

0,5

0,5

		<p>$QH = QD$ (cách vẽ)</p> <p>$BH = BK$ (gt)</p> <p>$\Rightarrow BQ$ là đường trung bình</p> <p>$\Rightarrow BQ \parallel KD$ mà $BQ \perp IH$ (CMT)</p> <p>$\Rightarrow KD \perp IH$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)</p> <p>(ĐPCM)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
		<p>Cho x là số thực sao cho $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$</p>	1,0
5 (1,0đ)		<p>Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp.</p> <p>Đặt $S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ với $n \in \mathbb{Z}^+$.</p> <p>Khi đó:</p> <p>+ Bài toán đúng với $n = 1$: $S_1 = 2 \in \mathbb{Z}$.</p>	

		<p>+ Giả sử bài toán đúng với hay $S_k = x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Z}$</p> <p>Ta cần chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$:</p> <p>Thật vậy:</p> $S_{k+1} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \in \mathbb{Z}$ <p>Theo nguyên lý quy nạp thì $S_n = x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.</p>	0,5
			0,5

--	--	--	--

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ THANH HÓA <i>Đề gồm 5 câu</i>	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THCS CẤP THÀNH PHỐ Năm học: 2023-2024 Môn thi: Toán <i>Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)</i> <i>Ngày thi: 10/02/2023</i>
---	--

Câu 1: (4.0 điểm) Cho biểu thức $A = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x(x^2+2)}{x^2+1}$

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (4.0 điểm)

- 1) Giải phương trình sau: $x(x+2)^2 = \frac{45}{x+4}$

2) Cho $a + b = 1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$

Câu 3: (4.0 điểm)

- 1) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 = 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1$
- 2) Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.

Câu 4: (6.0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh BC lấy điểm M (khác B, C), qua điểm A kẻ tia

Ax vuông góc với AM cắt tia CD tại điểm F .

- 1) Chứng minh rằng $AM = AF$
- 2) Trên cạnh CD lấy điểm M sao cho , gọi giao điểm của AM, AN với BD lần lượt tại Q và P ; gọi I là giao điểm của MP và NQ . Chứng minh $AI \perp MN$ tại H .
- 3) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi.

Câu 5: (2.0 điểm) Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.

Chứng minh: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$

ĐÁP ÁN

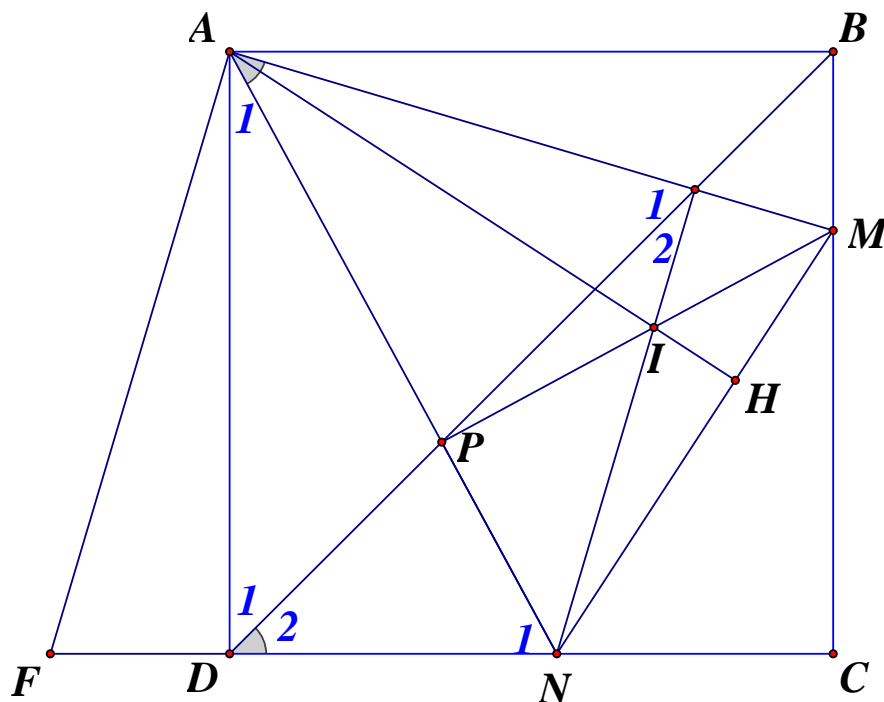
Câu	Nội dung	Điểm
	<p>1) (2 điểm)</p> <p>Ta có: $A = \left[\frac{x-1}{x(x-2)} + \frac{x+1}{x(x+2)} - \frac{4}{x(x^2-4)} \right] \cdot \frac{x(x^2+2)}{x^2+1}$</p> <p>ĐKXD: $x \neq \pm 2, x \neq 0$</p>	0,25đ
	<p>Khi đó: $A = \frac{x^2+2}{x^2+1} \left(\frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{x+2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$</p> <p>$= \frac{x^2+2}{x^2+1} \cdot \frac{(x-2)(x+1) + (x+1)(x-2) - 4}{x^2-4}$</p>	0,5đ
	<p>$= \frac{x^2+2}{x^2+1} \cdot \frac{2(x^2-4)}{x^2-4} = \frac{2(x^2+2)}{x^2+1} = \frac{2x^2+4}{x^2+1}$</p> <p>KL: Vậy $A = \frac{2x^2+4}{x^2+1}$ với $x \neq \pm 2, x \neq 0$</p>	0,5đ
	2) (2 điểm)	0,5đ

	$(x+2)^2 = \frac{45}{x^2+4x} \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{45}{(x+2)^2-4}$	
	<p>Đặt $y = (x+2)^2; (y \geq 0)$, phương trình trở thành:</p> $y = \frac{45}{y-4} \Leftrightarrow y^2 - 4y - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 & (l) \\ y = 9 & (n) \end{cases}$	0,5
	Với $y = 9 \Rightarrow (x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=3 \\ x+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-5 \end{cases}$ (thỏa mãn đk)	0,5
	Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \{1; -5\}$	0,25
	2) (2 điểm) Cho $a+b=1$ và $ab \neq 0$. Chứng minh: $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(ab-2)}{a^2b^2+3}$	
	<p>Với $a+b=1$ và $ab \neq 0$ ta có:</p> $\frac{a}{b^3-1} + \frac{b}{a^3-1} = \frac{a(a^3-1)+b(b^3-1)}{(a^3-1)(b^3-1)} = \frac{(a^4+b^4)-(a+b)}{a^3b^3-(a^3+b^3)+1} = \frac{(a^2+b^2)-2a^2b^2-1}{a^3b^3-(a+b)^3+3ab(a+b)+1}$	0,5
	$= \frac{[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2-1}{a^3b^3+3ab} \quad (\text{Vì } a+b=1 \text{ và } ab \neq 0)$	0,5

	$= \frac{1 - 4ab + 4a^2b^2 - 2a^2b^2 - 1}{ab(a^2b^2 + 3)} \quad (\text{Vì } a + b = 1 \text{ và } ab \neq 0)$	0,5
	$= \frac{2ab(ab - 2)}{ab(a^2b^2 + 3)} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3} \quad (\text{Vì } ab \neq 0)$	0,5
	Vậy $\frac{a}{b^3 - 1} + \frac{b}{a^3 - 1} = \frac{2(ab - 2)}{a^2b^2 + 3}$ với $a + b = 1$ và $ab \neq 0$	
	1) (2 điểm) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2 = 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1$	
	$x^2y^2 = 4x^2y - y^3 - 4x^2 + 3y^2 - 1$ $\Leftrightarrow x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 = -y^3 + 3y^2 - 1$ $\Leftrightarrow x^2(y^2 - 4y + 4) = -y^3 + 3y^2 - 1$ $\Leftrightarrow x^2(y - 2)^2 = -y^3 + 3y^2 - 1$	0,5
	+) Xét $y = 2$: PT vô nghiệm	0,25
	+) Xét $y \neq 2$ Ta có: $x^2 = \frac{-y^3 + 3y^2 - 1}{y^2 - 4y + 4} = -y - 1 + \frac{3}{y^2 - 4y + 4}$	0,25
	<p>Vì $x^2 \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2 \in U(3)$</p> <p>Do $(y - 2)^2$ là số chính phương nên $(y - 2)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 2 = 1 \\ y - 2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 1 \end{cases} (T / m: y \neq 2)$</p>	0,25

	<p>+) Với $y = 3$ thì $x^2 = -1$ (vô lí)</p> <p>+) Với $y = 1$ thì $x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} (T/m: x \in \mathbb{Z})$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>Vậy $(x, y) \in \{(1; 1), (-1; 1)\}$</p>	
	<p>2) (2 điểm) Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và số nguyên tố p thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho n đồng thời $n^3 - 1$ chia hết cho p. Chứng minh rằng $n + p$ là một số chính phương.</p>	
	<p>Ta có: $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$</p> <p>Vì $p - 1 : n \Rightarrow p - 1 \geq n \Rightarrow p \geq n + 1 > n - 1 \Rightarrow n - 1 \nmid p$</p>	<p>0,25</p>

	<p>Do đó: $(n-1)(n^2+n+1):p \Rightarrow n^2+n+1:p$</p> <p>Từ $p-1:n \Rightarrow p-1=kn (\forall k \geq 1) \Rightarrow p=kn+1$ (*)</p>	0,5
	Suy ra: $n^2+n+1:kn+1 \Rightarrow kn+1 \leq n^2+n+1 \Rightarrow kn \leq n^2+n \Rightarrow k \leq n+1$ (1)	0,25
	$n^2+n+1:kn+1 \Rightarrow k(n^2+n+1)-n(kn+1):kn+1 \Leftrightarrow [(k-1)n+k]:kn+1$	0,5
	<p>Vì $k \geq 1 \Rightarrow (k-1)n+k > 0$.</p> <p>Nên suy ra $(k-1)n+k \geq kn+1 \Leftrightarrow kn-n+k \geq kn+1 \Rightarrow k \geq n+1$ (2)</p>	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra: $k = n + 1$. Khi đó $n+p = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ (đpcm).	0,25



1) Chứng minh rằng: $AM = AF$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ADF$ vuông tại B; D có:

$AB = AD$ (cạnh hình vuông)

$\angle BAM = \angle DAF$ (cùng phụ $\angle MAD$)

Suy ra: $\triangle ABM = \triangle ADF$ (cgv-gn)

$\Rightarrow AM = AF$ (đpcm)

2,0

	2) Chứng minh: $AI \perp MN$ tại H.	
	<p>Ta có: $D_2 = PAQ (= 45^\circ)$ kết hợp $APQ = DPN$ (đối đỉnh)</p> <p>Suy ra: $\triangle PDN \sim \triangle PAQ$ (g.g) $\Leftrightarrow Q_1 = N_1$ (1) và $\frac{PN}{PQ} = \frac{PD}{PA}$ kết hợp $APQ = DPN$</p> <p>Suy ra: $\triangle PDA \sim \triangle PNQ$ (g.g) $\Leftrightarrow Q_2 = A_1$ (2)</p>	0,75
	<p>Từ (1) và (2) suy ra: $Q_1 + Q_2 = N_1 + A_1 = 90^\circ$ (vì tam giác AND vuông tại D)</p> <p>Suy ra: $AQN = 90^\circ \Rightarrow NQ \perp AM$ tại Q.</p> <p>Cmtt: $MP \perp AN$ tại P.</p>	0,75
	<p>Khi đó $\triangle AMN$ có hai đường cao NQ và MP cắt nhau tại I $\Rightarrow I$ là trực tâm.</p> <p>Suy ra AI là đường cao thứ ba của tam giác $\Rightarrow AI \perp MN$ tại H. (đpcm)</p>	0,5
	<p>3) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN khi M, N thay đổi.</p> <p>Gọi $BM = x$; $DN = y$ ($0 < x; y < a$).</p>	0,75

Khi đó:

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - S_{ABM} - S_{ADN} - S_{NMC} = a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(a-x)(a-y)$$

$$= a^2 - \frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}ay - \frac{1}{2}(a^2 - ax - ay + xy) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}xy$$

Lại có:

$$\triangle MAN = \triangle FAN \left(AM = AF; AN \text{ chung}; \angle MAN = \angle FAN = 45^\circ \right) \Rightarrow AH = AD$$

Suy ra: $S_{MAN} = \frac{1}{2}AH.MN = \frac{1}{2}AD.MN$. Đặt $MN = t \Rightarrow S_{MAN} = \frac{1}{2}at$

Mà $t = MN = MH + NH = MB + ND = x + y (t > 0)$.

Khi đó: $S_{MAN} = \frac{1}{2}at = \frac{1}{2}(a^2 - xy) \Rightarrow at = a^2 - xy$, thay $x = t - y$

$$\Rightarrow at = a^2 - (t - y)y \Leftrightarrow at = a^2 + y^2 - ty \Leftrightarrow a^2 - at + \frac{t^2}{4} - ty + y^2 - \frac{t^2}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 + a^2 - ta - \frac{t^2}{4} = 0. \text{ Vì } \left(y - \frac{t}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - ta - \frac{t^2}{4} \leq 0$$

0,75

	$\Leftrightarrow -a^2 + ta + \frac{t^2}{4} \geq 0$ $\Leftrightarrow t^2 + 4ta - 4a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (t+2a)^2 \geq 8a^2 \Leftrightarrow t+2a \geq 2\sqrt{2}a \Rightarrow t \geq a(2\sqrt{2}-2)$	
	<p>Suy ra: $S_{AMN} \geq \frac{1}{2}a.a(2\sqrt{2}-2) = a^2(\sqrt{2}-1)$.</p> <p>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\frac{t}{2} \\ t=a(2\sqrt{2}-2) \end{cases} \Leftrightarrow x=y=a(\sqrt{2}-1)$.</p> <p>Vậy $\text{Min}(S_{AMN}) = a^2(\sqrt{2}-1) \Leftrightarrow BM = DN = a(\sqrt{2}-1)$</p>	0,5
5	<p>Cho a, b, c là ba cạnh của tam giác.</p> <p>Chứng minh: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$</p>	
2đ	<p>Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên:</p> $a+b-c > 0; -a+b+c > 0; a-b+c > 0$ <p>Đặt: $x = a+b-c > 0; y = -a+b+c > 0; z = a-b+c > 0$</p>	0,5

	<p>Ta có: $x+y+z=a+b+c$; $a=\frac{y+z}{2}$; $b=\frac{x+z}{2}$; $c=\frac{x+y}{2}$</p> $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} = \frac{(y+z)(x+z)}{4z} + \frac{(x+z)(x+y)}{4x} + \frac{(x+y)(y+z)}{4y}$	
	$= \frac{1}{4} \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + 3x + 3y + 3z \right) = \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{1}{2} \left(2\frac{xy}{z} + 2\frac{yz}{x} + 2\frac{zx}{y} \right) \right]$ $= \frac{1}{4} \left[3(x+y+z) + \frac{y}{2} \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \frac{x}{2} \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \frac{z}{2} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right]$ $\geq \frac{1}{4} [3(x+y+z) + (x+y+z)] = x+y+z$	1
	<p>Mà $x+y+z=a+b+c$</p> <p>Suy ra: $\frac{ab}{a+b-c} + \frac{bc}{-a+b+c} + \frac{ca}{a-b+c} \geq a+b+c$</p>	0,5

PHÒNG GIÁO DỤC HUYỆN

ĐỀ THI CHỌN HSG HUYỆN LỚP 8

CHƯƠNG MỸ

NĂM HỌC 2023-2024

Trường THCS Ngọc Hoà

MÔN: TOÁN

(Thời gian làm bài 150 phút không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (3đ) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \cotg 45^\circ$

Bài 2: (4đ) Cho biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2-4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$

a) Tìm điều kiện của x để Q có nghĩa

b) Rút gọn biểu thức Q

Bài 3: (3,5đ) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-4}}{xy}$

Bài 4: (3,75đ) Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$

với $x \neq y, yz \neq 1, xz \neq 1, x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$

thì $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Bài 5: (3,75đ) Cho tam giác ABC vuông cân tại A, M là trung điểm cạnh BC. Từ đỉnh M vẽ góc 45° sao cho các cạnh của góc này lần lượt cắt AB, AC tại E, F.

Chứng minh rằng: $S_{\triangle MEF} < \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$

Bài 6: (2đ) Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O ; R), ta kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là một điểm bất kỳ trên đường thẳng đi qua các trung điểm của AB và AC. Kẻ tiếp tuyến MK của đường tròn (O). Chứng minh $MK = MA$

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Bài	Nội dung – Yêu cầu	Điểm
1	$\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}}$ $= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ $= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}}$ $= 1$ $= \cotg 45^\circ$	<p>1đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,75đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p>
2a	Q có nghĩa $\Leftrightarrow x > 1$ và $x \neq 2$	0,5đ

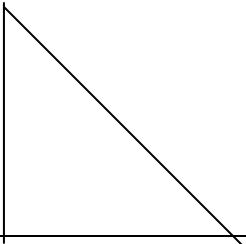
2b	$Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $Q = \frac{\sqrt{(x-1) - 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{(x-1) + 2\sqrt{x-1} + 1}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$ $Q = \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \frac{x-2}{x-1}$ $Q = \frac{ \sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{ x-2 } \cdot \frac{x-2}{x-1}$ <p>* Nếu $1 < x < 2$ ta có:</p> $Q = \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1}$ $Q = \frac{2}{1-x}$ <p>* Nếu $x > 2$ ta có:</p> $Q = \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1}$	0,75đ
----	--	-------

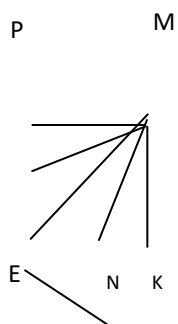
	$Q = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,75đ
		0,25đ
		0,5đ
		0,25đ
		0,25đ
		0,5đ

		0,25
3	<p>Với điều kiện $x \geq 1, y \geq 4$ ta có:</p> $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y}$ <p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm,</p> <p>Ta có: $\sqrt{x-1} = \sqrt{1(x-1)} \leq \frac{1+x-1}{2} = \frac{x}{2}$</p> $\Rightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2} \quad (\text{vì } x \text{ dương})$ <p>Và: $\sqrt{y-4} = \frac{1}{2} \sqrt{4(y-4)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{4+y-4}{2} = \frac{y}{4}$</p> $\Rightarrow \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{4} \quad (\text{vì } y \text{ dương})$	<p>0,25đ</p> <p>0,75đ</p> <p>0,5đ</p>

	<p>Suy ra: $M = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-4}}{y} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của M là $\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 2, y = 8$</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p>
4	$\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$	

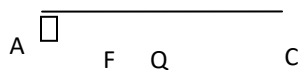
	$\Leftrightarrow (x^2 - yz)(y - xyz) = (y^2 - xz)(x - xyz)$	
	$\Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 + xy^3z + x^2z - x^2yz^2 = 0$	
	$\Leftrightarrow (x^2y - xy^2) - (x^3yz - xy^3z) + (x^2z - y^2z) - (x^2yz^2 - xy^2z^2) = 0$	0,25đ
	$\Leftrightarrow xy(x - y) - xyz(x^2 - y^2) + z(x^2 - y^2) - xyz^2(x - y) = 0$	0,5đ
	$\Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y) + z(x + y) - xyz^2] = 0$	
	$\Leftrightarrow xy - xyz(x + y) + z(x + y) - xyz^2 = 0 \quad (\text{vì } x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0)$	0,5đ
	$\Leftrightarrow xy + xz + yz = xyz(x + y) + xyz^2$	
	$\Leftrightarrow \frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{xyz(x + y) + xyz^2}{xyz} \quad (\text{vì } xyz \neq 0)$	0,5đ
		0,5đ
	$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = x + y + z$	0,5đ

		0,5đ
		0,5đ
5	<p>B</p> 	



0,25đ

0,25đ



0,5đ

Kẻ $MP \perp AB$ tại P, $MQ \perp AC$ tại Q

0,5đ

Kẻ $Ex \parallel AC$, EC cắt MQ tại K và cắt MF tại N

Do $\angle EMF = 45^\circ$ nên tia ME, MF nằm giữa hai tia MP và MQ

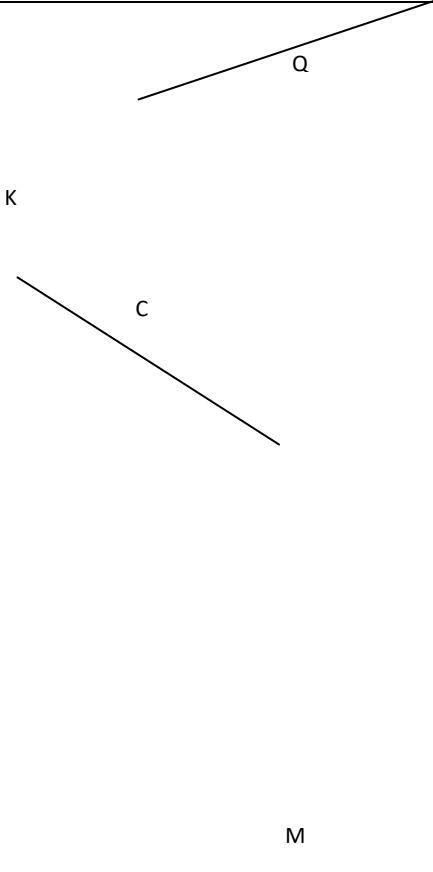
$$\Rightarrow S_{\triangle MEN} < S_{\triangle MEK} = \frac{1}{2} S_{\triangle MPEK}$$

0,5đ

$$\text{và } S_{\triangle FEN} < S_{\triangle QEK} = \frac{1}{2} S_{\triangle QAEK} \quad (S_{\triangle FEN} < S_{\triangle QEK} \text{ vì có cùng chiều cao nhưng đáy EN bé hơn}$$

0,5đ

đáy EK)

	 <p>Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB,AC. Giao điểm của OA và PQ là I.</p> <p>AB và AC là hai tiếp tuyến nên $AB = AC$ và AO là tia phân giác của $\angle BAC$</p> <p>$\Rightarrow \Delta PAQ$ cân ở A và $AO \perp PQ$</p> <p>Áp dụng Pitago ta có:</p> <p>$MK^2 = MO^2 - R^2$ (ΔMKO vuông tại K)</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
--	---	---------------------------

	$MK^2 = (MI^2 + OI^2) - R^2$ (Δ MOI vuông tại I)	
	$MK^2 = (MI^2 + OI^2) - (OP^2 - PB^2)$ (Δ BOP vuông tại B)	
	$MK^2 = (MI^2 + OI^2) - [(OI^2 + PI^2) - PA^2]$ (Δ IOP vuông tại I và $PA = PB$)	0,25đ
	$MK^2 = MI^2 + OI^2 - OI^2 + (PA^2 - PI^2)$	
	$MK^2 = MI^2 + AI^2$ (Δ IAP vuông tại I)	0,25đ
	$MK^2 = MA^2$ (Δ IAM vuông tại I)	0,25đ
	$\Rightarrow MK = MA$	0,25đ
		0,25đ
		0,25đ

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Năm học: 2023-2024-----

Môn thi: **Toán 8**

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian phát đề)

Bài 1 (4,5 điểm).

1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ (với $x \neq 0$;

$y \neq 0$; $x \neq -y$).

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của biểu thức A khi x, y thỏa mãn điều kiện

$$x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y)$$

2. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$. Chứng minh rằng $x^3 + y^3 + xy \geq \frac{1}{2}$

Bài 2 (5,0 điểm).

a) Giải phương trình $(x^2 - 3x + 2)(x - 5)(x - 6) = 252$

b) Cho $B = n^3 - 2019n^2 + 2n$ (n là số nguyên). Chứng minh rằng B chia hết cho 6.

c) Cho biểu thức $P = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3}$. Tìm x là số nguyên để giá trị của biểu

thức P là số nguyên.

Bài 3 (4,0 điểm).

a) Cho tam giác có ba cạnh a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh rằng tam giác đó là tam giác đều.

b) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 2023$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx}.$$

c) Một nhóm học sinh tham gia kì thi học sinh giỏi Toán quốc tế đến từ 9 quốc gia:

Trung Quốc, Mỹ, Hàn Quốc, Canada, Đức, Anh, Iran, Nam Phi, Pháp. Mỗi nước chỉ có

đúng một học sinh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong nhóm trên. Tính xác suất của biến cố:

A: “Học sinh được chọn đến từ châu Á”.

B: “Học sinh được chọn đến từ châu Âu”.

Bài 4 (4,5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Trên đoạn BH

lấy điểm M sao cho $\angle AMC = 90^\circ$.

a) Chứng minh $\triangle AEB \sim \triangle AFC$.

b) Chứng minh $AM^2 = AE \cdot AC$

c) Trên đoạn CH lấy điểm N sao cho $AN = AM$. Tính số đo góc ANB .

Bài 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Kẻ HE vuông góc với AC tại E , lấy

điểm M trên đoạn HC sao cho $BEH = HEM$. Chứng minh rằng AM đi qua trung

điểm của đoạn thẳng HE .

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN 8

Bài 1 (4,5 điểm).

Câu	Lời giải	Điểm
1.1 (2,5 đ)	a) $A = \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ $= \left[\frac{x^2}{x(x + y)} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y(x + y)} \right] : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$	0,25
	$= \frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$	0,25

	$= \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{(x-y)[xy - (x+y)^2]}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{-(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2} = \frac{y-x}{xy}$	0,5
	b) $x^2 + y^2 + 5 = 2(x-2y) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 1, y = -2 \text{ (TMĐK } x \neq 0; y \neq 0; x \neq -y)$	0,25
	Với $x = 1$ và $y = -2$, ta có: $A = \frac{-2-1}{-2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$	0,25
1.2	b) Vì $x + y = 1$ nên $y = 1 - x$.	0,25
(2,0 đ)	Ta có $x^3 + y^3 + xy = x^3 + (1-x)^3 + x(1-x)$	0,25

	$= x^3 + 1 - 3x + 3x^2 - x^3 + x - x^2 = 2x^2 - 2x + 1$	0,5
	$= 2\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$	0,5
	$= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$	0,5

Bài 2 (5,0 điểm).

Câu	Lời giải	Điểm
2.a (1,5 đ)	a) $(x^2 - 3x + 2)(x - 5)(x - 6) = 252$	0,25
	$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2)(x - 5)(x - 6) = 252$	
	$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 6)(x - 2)(x - 5) = 252$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10) = 252$	
	Đặt $x^2 - 7x + 8 = y$ khi đó PT trên trở thành:	0,25
	$\Leftrightarrow (y - 2)(y + 2) = 252 \Leftrightarrow y^2 = 256 \Leftrightarrow y = 16 \text{ hoặc } y = -16.$	

	<p>Với $y = 16$, ta có $x^2 - 7x + 8 = 16 \Leftrightarrow (x - 8)(x + 1) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x = 8; x = -1$</p>	0,25
	<p>Với $y = -16$, ta có: $x^2 - 7x + 8 = -16 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 24 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{47}{4} = 0$ (PT vô nghiệm)</p>	0,25
	<p>Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 8\}$</p>	0,25
<p>2.b</p> <p>(2,0 đ)</p>	<p>b) $B = n^3 - 2019n^2 + 2n = (n^3 - 3n^2 + 2n) - 2016n^2$</p>	0,25
	<p>$= n(n^2 - 3n + 2) - 2016n^2$</p>	0,25
	<p>$= n(n - 1)(n - 2) - 2016n^2$</p>	0,25
	<p>Ta có: $n(n - 1)(n - 2)$ là ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2 và 3.</p> <p>Do đó: $n(n - 1)(n - 2) : 6 \quad (1)$</p>	0,5
	<p>Lại có $2016n^2 : 6 \quad (2)$</p>	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra: B chia hết cho 6.	0,25
2.c (1,5 đ)	$\text{c) } P = \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3} = \frac{x^3 + 3x - 2x^2 - 6 + 4x + 13}{x^2 + 3}$ $= \frac{x(x^2 + 3) - 2(x^2 + 3) + 4x + 13}{x^2 + 3} = x - 2 + \frac{4x + 13}{x^2 + 3}$	0,25
	<p>Vì x là số nguyên nên $x - 2$ là số nguyên.</p> <p>Để giá trị P là số nguyên thì $4x + 13 : (x^2 + 3)$</p>	0,25
	$\Rightarrow (4x - 13)(4x + 13) : (x^2 + 3)$	0,25
	$\Rightarrow 16x^2 - 169 : (x^2 + 3) \Rightarrow 16(x^2 + 3) - 217 : (x^2 + 3)$	0,25
	<p>Suy ra $217 : (x^2 + 3)$, mà $x^2 + 3 \geq 3$</p> <p>nên $x^2 + 3 = 7$ hoặc $x^2 + 3 = 31 \Rightarrow x^2 = 4; x^2 = 28$</p>	0,25
	Ta có $x = \pm 2$ là giá trị cần tìm.	0,25

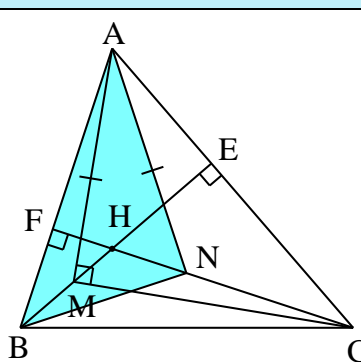
Bài 3 (3,0 điểm).

Câu	Lời giải	Điểm
3.a (1,5 đ)	a) Ta có $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$	0,25
	$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 + c^3 - 3abc = 0$	
	$\Leftrightarrow [(a+b)^3 + c^3] - 3ab(a+b+c) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2] - 3ab(a+b+c) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b+c)[(a+b)^2 - c(a+b) + c^2 - 3ab] = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$	0,25
	Vì a, b, c là ba cạnh của tam giác nên $a + b + c > 0$. Do đó $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = 0 \Leftrightarrow a = b = c$ Vậy tam giác trên là tam giác đều.	0,25
3.b	b) $M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx}$	0,25

(1,5 đ)	$= \frac{x^2}{2y} + \frac{y^2}{2x} + \frac{y^2}{2z} + \frac{z^2}{2y} + \frac{z^2}{2x} + \frac{x^2}{2z}$	
	<p>Áp dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab$, ta có:</p> $\frac{x^2}{2y} + \frac{z^2}{2y} = \left(\frac{x}{\sqrt{2y}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{2y}} \right)^2 \geq 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2y}} \cdot \frac{z}{\sqrt{2y}} = \frac{xz}{y}$	
	<p>Tương tự: $\frac{y^2}{2x} + \frac{z^2}{2x} \geq \frac{yz}{x}$; $\frac{x^2}{2z} + \frac{y^2}{2z} \geq \frac{xy}{z}$</p>	0,25
	<p>Do đó: $M = \frac{x^3 + y^3}{2xy} + \frac{y^3 + z^3}{2yz} + \frac{z^3 + x^3}{2zx} \geq \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z}$</p>	0,25
	<p>Áp dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq 4ab$, ta có:</p> $\frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z} \geq x + y + z = 2023 \text{ nên } M \geq 2023.$	0,25
	<p>Dấu “=” xảy ra khi $x = y = z = \frac{2023}{3}$</p>	0,25
	<p>Vậy GTNN của biểu thức M là 2023 khi $x = y = z = \frac{2023}{3}$</p>	0,25

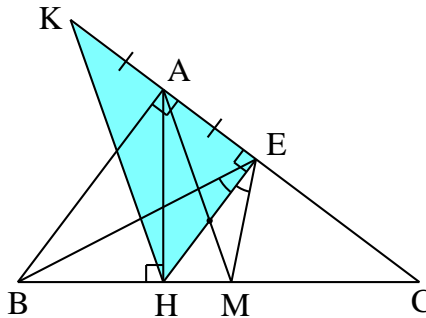
3c	Số biến cố thực nghiệm là 9	
(1,0)	<p>a/ Học sinh được chọn đến từ châu Á là học sinh đến từ Trung Quốc, Hàn Quốc, Iran nên số lần xảy ra của biến cố A là 3.</p> <p>Vậy xác suất của biến cố A là $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.</p>	0,5
	<p>b/ Học sinh được chọn đến từ châu Âu là học sinh đến từ Đức, Anh, Pháp nên số lần xảy ra của biến cố B là 3.</p> <p>Vậy xác suất của biến cố B là $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.</p>	0,5

Bài 4 (4,5 điểm).

Câu	Lời giải		Điểm
4.a (1,0 đ)		a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có: $AEB = AFC (= 90^0)$ và A (chung) Suy ra: $\triangle AEB \simeq \triangle AFC$ (g.g)	0,5 0,5
		b) Xét $\triangle AEM$ và $\triangle AMC$ có: $AEM = AMC (= 90^0)$ MAE (chung) Suy ra: $\triangle AEM \simeq \triangle AMC$ (g.g)	0,5 0,5
	$\Rightarrow \frac{AE}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AM^2 = AE.AC$ (1)		0,5
4.c (2,0 đ)	c) $\triangle AEB \simeq \triangle AFC$ nên: $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB.AF = AE.AC$ (2)		0,25
	Từ (1) và (2) suy ra: $AM^2 = AF.AB$		0,25

	Vì $AN = AM$ nên $AN^2 = AF \cdot AB$	0,5
	Suy ra: $\triangle ANB \sim \triangle AFN$ (c.g.c)	0,5
	$\Rightarrow \angle ANB = \angle AFN = 90^\circ$	0,5

Bài: 5 (2,0 điểm)

Câu	Lời giải	Điểm
	<p>Trên tia đối của tia AC lấy điểm K sao cho $AK = AE$.</p> <p>Vì $HE \parallel AB$ nên $\frac{BH}{BC} = \frac{AE}{AC}$</p> <p>(định lí Thales)</p>	0,25
	<p>Mà $AE = AK$ nên $\frac{BH}{BC} = \frac{AK}{AC}$ (1)</p>	0,25
	<p>Ta có $\angle BEH = \angle HEM$ nên EH là đường phân giác trong của $\triangle BEM$.</p>	0,25

	Lại có $HE \perp AC$ nên EC là đường phân giác ngoài của $\triangle BEM$	0,25
	Suy ra: $\frac{MH}{BH} = \frac{CM}{CB} \left(= \frac{EM}{BE} \right)$	0,25
	$\Rightarrow \frac{BH}{CB} = \frac{HM}{CM} \quad (2)$	0,25
	Từ (1), (2) suy ra: $\frac{AK}{AC} = \frac{HM}{CM} \Rightarrow AM \parallel HK$ (theo định lí đảo Thales)	0,25
	$\triangle EHK$ có $AK = AE$ và $AM \parallel HK$ nên AM đi qua trung điểm của HE (đpcm)	0,25
	<i>Lưu ý: Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng, lập luận chặt chẽ, kiến thức phù hợp với cấp học thì cho điểm các phần theo thang điểm tương ứng.</i>	

UBND HUYỆN CẨM XUYỀN

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI HUYỆN

TRƯỜNG THCS MINH LẠC

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN TOÁN 8

Thời gian làm bài :120 phút

PHẦN I: ĐIỀN KẾT QUẢ:**Câu 1:** Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$x^2 + x - 6$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = 4x^2 + 5x + 1$ biết $|x| = 2$.**Câu 3:** Tìm x, y để biểu thức: $B = x^2 + 2y^2 - 2xy - 4y + 2014$ đạt GTNN**Câu 4:** Hiệu các bình phương của 2 số tự nhiên lẻ liên tiếp bằng 40. Tìm hai số.**Câu 5:** Tìm các số x, y biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $x - 2y = -12$.**Câu 6:** Tìm n nguyên dương để: $n^2 - 3n + 1$ là số chính phương**Câu 7:** Cho $x - 2y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2 + 4$

Câu 8: : Bạn Hùng được mừng tuổi 24 tờ tiền loại 20 000đ, 50 000đ, 100 000đ. Biết

giá trị mỗi loại tiền trên đều bằng nhau. Hỏi Hùng có bao nhiêu tiền mừng tuổi khi đó?

Câu 9: Tính diện tích của hình thang vuông biết hình thang đó có 1 góc 45^0 ,

độ dài 2 đáy lần lượt là 8cm; 12 cm

Câu 10: Cho tam giác ABC, trên AB lấy điểm N sao cho $AN=4NB$. Kẻ NM song

song với BC. Biết $BC= 20\text{cm}$. Tính NM

PHẦN II: TRÌNH BÀY CHI TIẾT :

Câu 11:

a) Tìm các số x, y, z biết :

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\text{và } x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3^{2010}$$

b) Cho 3 số thực $x; y; z$ đôi một khác nhau và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

$$\text{Tính } A = \frac{yz}{x^2 + 2yz} + \frac{zx}{y^2 + 2zx} + \frac{xy}{z^2 + 2xy}$$

Câu 12: Cho hình bình hành ABCD. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D của hình bình hành lần lượt cắt nhau tại E, F, G, H.

a) Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng $EG = FH$ và bằng hiệu giữa hai cạnh kề một đỉnh của hình bình hành ABCD.

c) Hình bình hành ABCD cần có thêm điều kiện gì để EFGH là hình vuông?

- Hết -

ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

PHẦN I: ĐIỀN KẾT QUẢ : (10 điểm mỗi câu đúng cho 1 điểm)

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5

a=-7;b=6	P= 27; P=7	x= 2; y=2	9;11	x =6; y =9
Câu 6	Câu 7	Câu 8	Câu 9	Câu 10
n=3	$\frac{21}{5}$	900.000 đồng	40cm ²	NM=16 cm

PHẦN II: TRÌNH BÀY CHI TIẾT :

Câu 11	Ta có:	
a)	$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$ $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ và } y - z = 0 \text{ và } z - x = 0$ $\Leftrightarrow x = y = z$ $x^{2009} + y^{2009} + z^{2009} = 3^{2010}$	1,5 đ

	$\Leftrightarrow x^{2009} + x^{2009} + x^{2009} = 3^{2010}$ $\Leftrightarrow 3.x^{2009} = 3.3^{2009}$ $\Leftrightarrow x^{2009} = 3^{2009}$ $\Leftrightarrow x = 3$	1,5 đ
<p>Câu</p> <p>12:</p>	<p>ĐKXĐ : $x ; y ; z \neq 0$</p> <p>Từ giả thiết: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0 \Rightarrow yz + xz + xy = 0$</p> <p>$\Rightarrow yz = -xy - xz \Rightarrow x^2 + 2yz = x^2 + yz - xy - xz = (x - z)(x - y)$</p> <p>Tương tự ta có: $z^2 + 2xy = (z - x)(z - y)$</p> <p>$y^2 + 2xz = (y - z)(y - x)$</p> <p>Khi đó: $A = \frac{yz}{(x - z)(x - y)} + \frac{xz}{(y - z)(y - x)} + \frac{xy}{(z - x)(z - y)}$</p>	

	$= \frac{yz(y-z) + xz(z-x) + xy(x-y)}{(x-z)(x-y)(y-z)}$ $= \frac{yz(y-z) - xz(x-z) + xy[(x-z) - (y-z)]}{(x-z)(x-y)(y-z)}$ $= \frac{yz(y-z) - xz(x-z) + xy(x-z) - xy(y-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)}$ $= \frac{x(x-z)(y-z) - y(y-z)(x-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)}$ $= \frac{(x-z)(x-y)(y-z)}{(x-z)(x-y)(y-z)} = 1$	2,5đ
Câu 13:		
	<p>Tam giác AHD có: $\widehat{HAD} + \widehat{HDA} = 1/2(A+D) = 90^0$. Nên</p> <p>$\widehat{AHD} = 90^0$</p> <p>Tương tự: $\widehat{BFC} = 90^0$, $\widehat{AEB} = 90^0$</p> <p>Do đó tứ giác EFGH là hình chữ nhật.</p>	1,5đ
	<p>C/m tam giác ABM cân tại B, do đó E là trung điểm của AM.</p> <p>C/m tương tự G là trung điểm của CN.</p>	1,5đ

	<p>Nên BG là đường trung bình của hình bình hành AMCN</p> <p>nên $EG = 1/2(MC+AN)=MC$.</p> <p>Suy ra $MC=CB-BM= CB-BA$</p> <p>Vậy $EG=FB=CB-AB$</p>	
	<p>C/m $EG \parallel AD$, $FH \parallel AB$</p> <p>Hình chữ nhật EFGH là hình vuông $\Leftrightarrow EG \perp FH \Leftrightarrow AD \perp AB$</p> <p>$\Leftrightarrow \angle A = 90^\circ \Leftrightarrow ABCD$ là hình chữ nhật</p> <p>(Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa)</p>	1,5đ

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN

TOÁN 8 VÒNG II NĂM HỌC 2023 – 2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi 09 tháng 12 năm 2023

Đề thi có 01 trang

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1: (4,0 điểm).a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$.Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên n)**Bài 2: (4,0 điểm).**a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$

chia

hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.b) Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biếtrằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7 và chia cho $(x+2)$ dư 1.

Bài 3: (4,0 điểm).

a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2+3x-7)=|x^3-1|$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4+x^2-y^2-y+20=0$

Bài 4: (6,0 điểm).

1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.

Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DFE cân.

b) K là trung điểm của CF.

2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho

H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP.

Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.

Bài 5: (2,0 điểm).

Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh: $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU CHẤM

Biểu chấm gồm 02 trang

KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 - VÒNG II

NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm

<div>Bài 1</div> <div>4,0đ</div>	a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.	2,0
	Ta có: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = (2x + y)^3 - 6xy(2x + y) + z^3 - 6xyz$ $= (2x + y + z)[(2x + y)^2 - z(2x + y) + z^2] - 6xy(2x + y + z)$ $= (2x + y + z)(4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - yz)$	0,75 0,75 0,5
	b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$. Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên n)	2,0
	Do $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (a - x)(a + x) = (y - b)(y + b)$ Mà $a + b = x + y$ nên $a - x = y - b$ $\Rightarrow (y - b)(a + x) = (y - b)(y + b) \Rightarrow (y - b)(a + x) - (y - b)(y + b) = 0$ $\Rightarrow (y - b)(a + x - b - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x - b - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x = b + y \end{cases}$ Xảy ra 2 trường hợp: TH1: $b = y$ khi đó $a = x$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$ TH 2: $a + x = b + y$ mà $a + b = x + y \Rightarrow a = y$ và $b = x$ Khi đó $a^n + b^n = x^n + y^n$	0,5

	<p>Vậy với $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$</p> <p>(với mọi số tự nhiên n).</p>	0,5
		0,5
		0,5
	<p>a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.</p>	2,0
Bài 2	Ta có: $4a^2 + 3ab - 11b^2 \div 5 ; 5a^2 + 5ab - 10b^2 \div 5$	
4.0đ	$(5a^2 + 5ab - 10b^2) - (4a^2 + 3ab - 11b^2) \div 5$ $\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \div 5 \Rightarrow (a + b)^2 \div 5$ $\Rightarrow a + b \div 5 \quad (\text{Vì } 5 \text{ là số nguyên tố})$	0,5
		0,5

$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) : 5$	0,5
$\Rightarrow a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) : 5$	0,5
<p>b) Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x+2)$. Biết rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7 và chia cho $(x+2)$ dư 1.</p>	2,0
<p>Do $(x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$ là đa thức bậc hai nên phần dư của phép chia $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$ là một đa thức có bậc nhỏ hơn 2.</p> <p>Gọi phần dư cần tìm là $ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$.</p> <p>Ta có tồn tại các đa thức $Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ thỏa mãn:</p>	0,25
	0,75

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$$

Vì $P(1) = 7$ nên $a + b = 7$

Vì $P(-2) = 1$ nên $-2a + b = 1$

Từ đó ta được $\begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

Vậy phần dư cần tìm là: $2x + 5$.

0,25

0,25

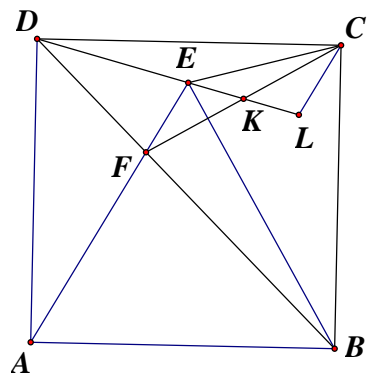
0,25

0,25

		0,75
		0,25
	b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$ (1)	2,0
	<p>Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$</p> <p>Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$</p>	

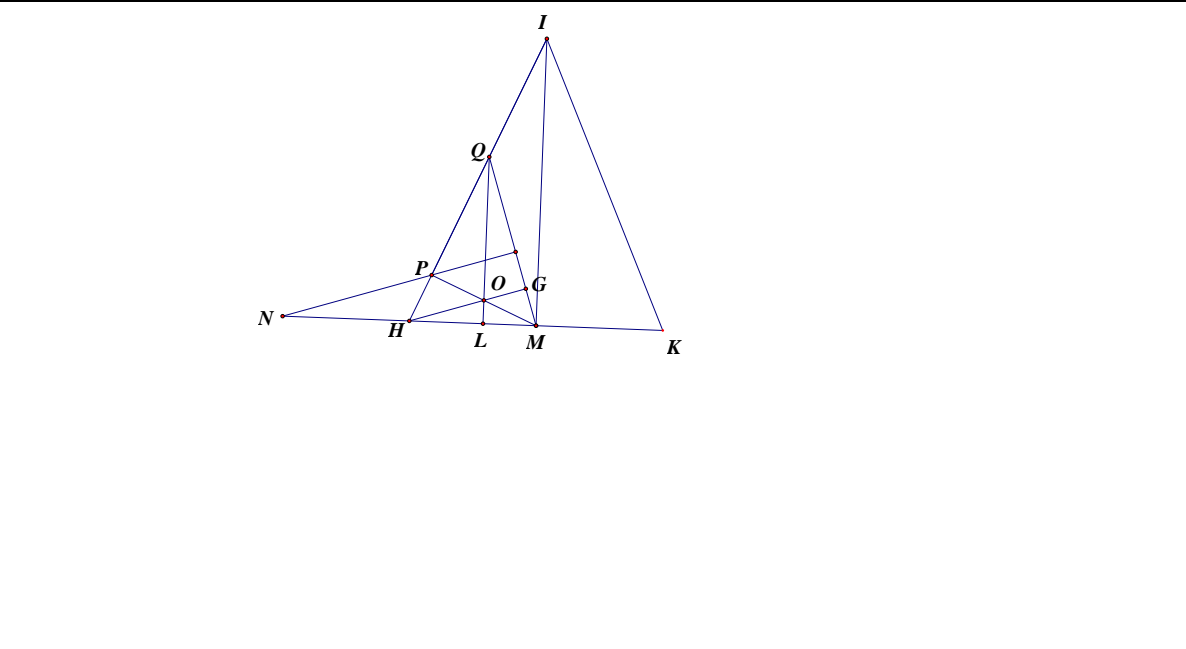
	$x^4 + x^2 + 20 + 8x^2 = x^4 + 4x^2 + 5x^2 + 20 = (x^2 + 4)(x^2 + 5)$ $\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) < y(y + 1) \leq (x^2 + 4)(x^2 + 5)$ <p>Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau</p> <p>+ TH1: $y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$</p> $\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ <p>Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$</p> $\Leftrightarrow y = 10 ; y = -11 \text{ (t.m)}$ <p>+ TH2. $y(y + 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$</p> $\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$ <p>+ TH3. $y(y + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + 4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$</p> <p>+ TH4. $x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 9x^2 + 20 \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	---	------------------------------------

	<p>Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5 ; y = 4$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>Bài 4.1</p> <p>4,0đ</p>	<p>1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.</p> <p>Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:</p> <p>a) Tam giác DFE cân.</p> <p>b) K là trung điểm của CF.</p>	<p>4,0</p>



Câu 1 4,0đ	<p>a) Ta có $\triangle ABE$ đều nên $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ tại A $\Rightarrow DAE = 30^\circ$</p> <p>$\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BDA = 45^\circ$ và $DAF = 30^\circ \Rightarrow DFE = 75^\circ$</p> <p>c/m $\triangle ADE$ cân tại A</p> <p>Suy ra $\triangle DFE$ cân tại D.</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,75</p>
	<p>b) Vì $ADE = 75^\circ \Rightarrow CDE = 15^\circ$</p> <p>Từ $DEF = 75^\circ \Rightarrow LEF = 105^\circ$</p> <p>Từ C đường thẳng song song với AE cắt DK ở L.</p>	<p>0,5</p>

	<p>Ta có $DLC = FEL = 105^0 \Rightarrow DCL = 60^0$</p> <p>Suy ra: $\triangle ABE$ đều</p> <p>$EBA = 60^0; DBA = 45^0 \Rightarrow FBE = 15^0$</p> <p>$\Rightarrow FBE = LDC; DC = BE; FEB = LCD$</p> <p>$\triangle FEB = \triangle LCD(g.c.g) \Rightarrow CL = EF$</p> <p>Mà $CL // FE \Rightarrow CEFL$ là hình bình hành $\Rightarrow CK = KF$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>Bài 4.2</p> <p>2,0đ</p>	<p>2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.</p>	<p>2,0</p>



2. Gọi O là trung điểm của PM \Rightarrow OQ là đường trung bình của tam giác IMP

$$\Rightarrow \text{OQ} \parallel \text{IM}$$

=> Mà IM vuông góc với HK=> OQ vuông góc với HK

\Rightarrow Lại có MP vuông góc với HI \Rightarrow O là trực tâm của tam giác QHM

\Rightarrow HO vuông góc với QM.

Vì OH là đường trung bình của tam giác NMP nên $OH \parallel PN$

NP vuông góc với QM.

0,5

0,5

0,5

		0,5
	<p>Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:</p> $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	
<p>Bài 5</p> <p>2,0đ</p>	<p>Đặt $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2}$</p> <p>Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$</p> <p>Ta có: $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} = \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^3}{2c^3+2c^2a^2}$</p> <p>Áp dụng $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$ ta có: $E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}$</p> <p>Vì $\frac{a^2+1}{2} \geq a$ nên $a^4+a^2 \geq 2a^3$; $\frac{b^2+1}{2} \geq b$ nên $b^4+b^2 \geq 2b^3$; $\frac{c^2+1}{2} \geq c$ nên $c^4+c^2 \geq 2c^3$</p>	0,25

	$E \geq \frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}{2a^3 + 2a^2b^2 + 2b^3 + 2b^2c^2 + 2c^3 + 2c^2a^2} \geq \frac{36}{a^4 + a^2 + 2a^2b^2 + b^4 + b^2 + 2b^2c^2 + c^4 + c^2 + 2c^2a^2}$ $E \geq \frac{36}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow E \geq \frac{36}{12}$ <p>Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$</p> <p>Mà $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$</p> <p>Vậy $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$</p> <p>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	--	---

		0,25
		0,25

PHÒNG GD&ĐT YÊN ĐỊNH

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CÁC MÔN

VĂN HÓA VÒNG I CẤP TỈNH

Trường THCS Yên Phú

Môn thi: Toán Thời gian thi: 150 phút (*không kể thời**gian giao đề)*

Đề thi gồm: 01 trang

Câu 1 (4 điểm): Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức A nhận giá trị nguyên

c) Tìm x để $|A| = A$

Câu 2 (4 điểm): a) Giải phương trình: $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) - 2x^2 = 0$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n, z thỏa mãn: $2^n + 12^2 = z^2 - 3^2$.

Câu 3 (4 điểm): a) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$.

Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$

b) Cho số tự nhiên $n > 3$. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ ($0 < b < 10$) thì tích ab chia hết cho 6

Câu 4. (6 điểm) 1. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy E , trên tia

đối của tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

a) Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD . Gọi I là trung điểm của EF .

Chứng minh O, C, I thẳng hàng

2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Các điểm D, E theo thứ tự di chuyển trên

AB, AC sao cho $BD = AE$. Xác định vị trí điểm D, E sao cho:

a) DE có độ dài nhỏ nhất

b) Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất

Câu 5. (2 điểm) Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$$

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
		0,5

1	<p>a) ĐKXĐ: $x \neq \pm 1; x \neq \frac{1}{2}$</p> $A = \left(\frac{1+x+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \right) \cdot \frac{x^2-1}{1-2x}$ $= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$ <p>b) Để A nguyên, thì $2 : (1-2x)$</p> <p>Từ đó tìm được $x=1$ và $x=0$</p> <p>Kết hợp điều kiện $\Rightarrow x=0$</p> <p>c) Ta có:</p> $ A = A \Leftrightarrow A > 0$ $\Leftrightarrow \frac{2}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow 1-2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ <p>Kết hợp với điều kiện : $-1 \neq x < \frac{1}{2}$</p>	<p>1,5</p> <p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>1</p> <p>0,5</p>
	<p>a) $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) - 2x^2 = 0$</p> $\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$	

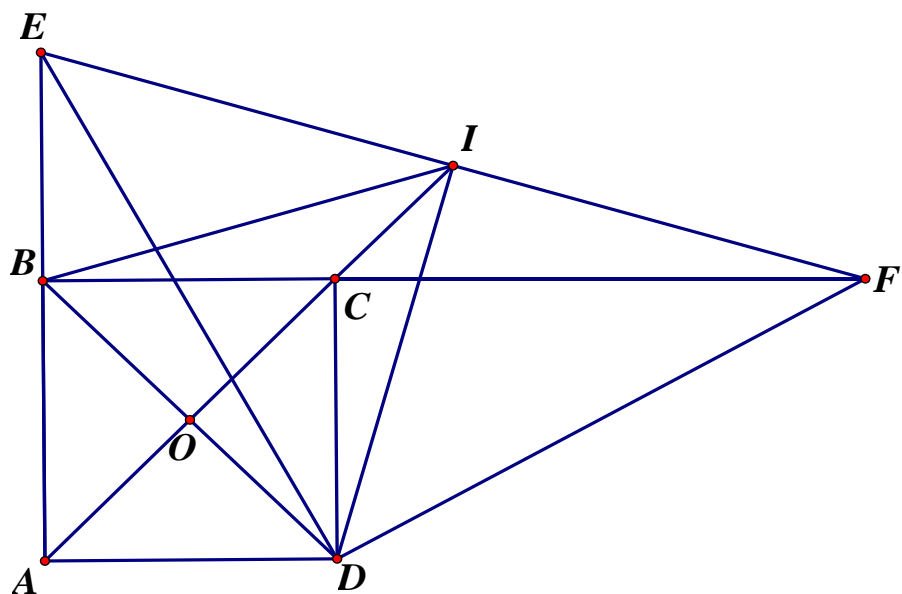
2	<p>+) Xét với $x = 0$ ta có:</p> <p>$9 = 0$ Vô lí</p> <p>+) Xét với $x \neq 0$. Chia cả hai vế cho x^2 ta được:</p> $(x^2 - 3x + 3)(x^2 - 2x + 3) = 2x^2$ $\Leftrightarrow (x - 3 + \frac{3}{x})(x - 2 + \frac{3}{x}) = 2$ <p>Đặt $x + \frac{3}{x} = a$, ta được :</p> $(a - 3).(a - 2) = 2$ $\Leftrightarrow a^2 - 5a + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (a - 1). (a - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 4 \end{cases}$ <p>TH 1: Với $a = 1$</p> $\Leftrightarrow x + \frac{3}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{11}{4} = 0$	0,5
		0,5
		0,5

	<p>TH2: Nếu n là số lẻ: $n = 2m + 1$</p> <p>$\Leftrightarrow z^2 - 2^{2m+1} = 153 \Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot 2^{2m} = 153$</p> <p>$\Leftrightarrow z^2 - 2 \cdot 4^m = 153$</p> <p>Ta có : $2 \cdot 4^m$ chia cho 3 dư 2</p> <p>Mà 153 chia cho 3 dư 0</p> <p>Suy ra: z^2 chia cho 3 phải dư 2</p> <p>Mà z^2 chỉ có thể chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1.</p> <p>Suy ra không tồn tại m, z.</p> <p>Vậy $z = 13; n = 4$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
3	<p>a) Biết $4a^2 + b^2 = 5ab$ với $2a > b > 0$.</p> <p>Tính giá trị biểu thức: $C = \frac{ab}{4a^2 - b^2}$</p> <p>Ta có: $4a^2 + b^2 = 5ab$ Suy ra: $4a^2 - 5ab + b^2 = 0$</p> <p>$\Rightarrow (a-b)(4a-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = \frac{b}{4} \end{cases}$</p> <p>Do $2a > b > 0$ nên: $a = b$</p>	<p>0.5</p> <p>0,5</p>

Thay vào C ta được:	
$C = \frac{ab}{4a^2 - b^2} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$	0,5
Vậy $C = \frac{1}{3}$	0,5
b) Ta có: $2^n = 10a + b$ nên $b \div 2$. Hay $ab \div 2$.	
Ta đi chứng minh : $ab \div 3$.	0,5
Ta có 2^n có chữ số tận cùng là b.	
Đặt : $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$)	
Suy ra $2^n = 16^k \cdot 2^r$.	
TH1: Nếu $r = 0$ thì $2^n = 16^k$, có tận cùng là 6 nên $b = 6$.	0,5
Suy ra $ab \div 6$.	
TH2: Nếu $1 \leq r \leq 3$ thì $2^n = 16^k \cdot 2^r$	0,5
$\Rightarrow 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) \div 10$	
Suy ra 2^n có tận cùng là 2^r	
Nên $b = 2^r \Rightarrow 10a = 2^n - 2^r = 2^r \cdot (16^k - 1) \div 3 \Rightarrow a \div 3$.	
Nên $ab \div 6$	0,5

Vậy ab : 6

1.



a)

Ta có : $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác $\triangle ADE = \triangle CDF (c.g.c) \Rightarrow \angle BED = \angle CFD$

Mà $\angle BED + \angle DEF + \angle EFB = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD + \angle DEF + \angle EFB = 90^\circ$

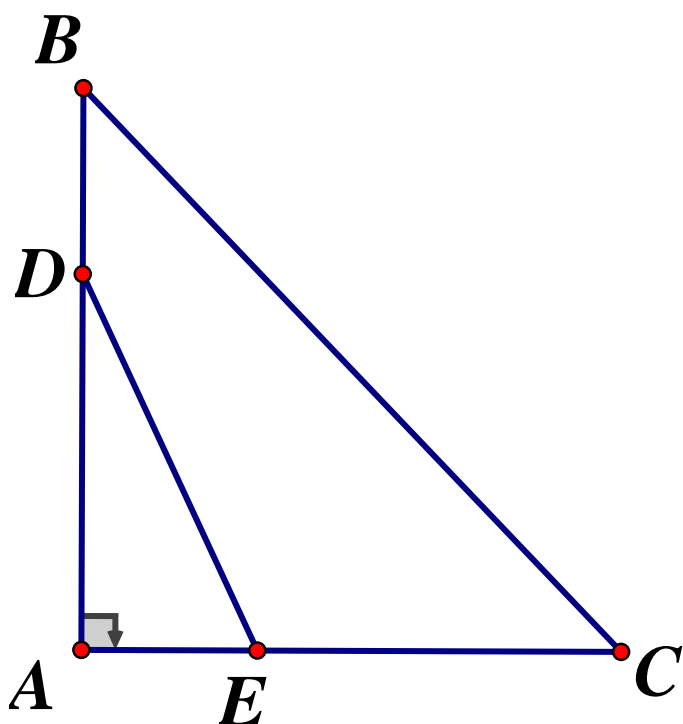
$\Rightarrow \angle EDF = 90^\circ$. Vậy $\triangle EDF$ vuông cân.

0,5

0,5

0,5

	<p>b)</p> <p>Theo tính chất đường chéo hình vuông $\Rightarrow CO$ là trung trực BD</p> <p>Mà $\triangle EDF$ vuông cân $\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EF$</p> <p>Tương tự $BI = \frac{1}{2}EF \Rightarrow DI = BI$</p> <p>$\Rightarrow I$ thuộc đường trung trực của $DB \Rightarrow I$ thuộc đường thẳng CO</p> <p>Nên O, C, I thẳng hàng</p> <p>2.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---	----------------------------------



a)

Đặt $AB = AC = a$ không đổi; $AE = BD = x$ ($0 < x < a$)

Áp dụng định lý Pytago với $\triangle ADE$ vuông tại A có:

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 = (a - x)^2 + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 = 2(x^2 - ax) - a^2 \\ &= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2} \geq \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Ta có DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$

0,5

0,5

	<p>$\Leftrightarrow BD = AE = \frac{a}{2} \Leftrightarrow D, E$ là trung điểm của AB, AC</p> <p>b)</p> <p>Tứ giác $BDEC$ có diện tích nhỏ nhất</p> <p>Ta có: $S_{ADE} = \frac{1}{2} AD.AE = \frac{1}{2} AD.(AB - AD) = -\frac{1}{2}(AD^2 - AB.AD)$</p> <p>$= -\frac{1}{2}\left(AD^2 - 2.\frac{AB}{2}.AD + \frac{AB^2}{4}\right) + \frac{AB^2}{8} = -\frac{1}{2}\left(AD - \frac{AB}{2}\right)^2 + \frac{AB^2}{8} \leq \frac{AB^2}{8}$</p> <p>Vậy $S_{BDEC} = S_{ABC} - S_{ADE} \geq \frac{AB^2}{2} - \frac{AB^2}{8} = \frac{3}{8}AB^2$ không đổi</p> <p>Do đó $\min S_{BDEC} = \frac{3}{8}AB^2$ khi D, E lần lượt là trung điểm AB, AC</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :</p> $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$ <p>Áp dụng Bất đẳng thức C-B-S: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$</p>	

5	<p>Ta có: $\frac{9}{a+3b+2c} = \frac{9}{(a+c)+(b+c)+2b} \leq \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b}$</p> <p>Suy ra: $\frac{9ab}{a+3b+2c} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2}$</p> <p>Tương tự ta có: $\frac{9bc}{b+3c+2a} \leq \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{b}{2}$</p> $\frac{9ca}{c+3a+2b} \leq \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{c}{2}$ <p>Cộng các vế với nhau ta được:</p> $\frac{9ab}{a+3b+2c} + \frac{9bc}{b+3c+2a} + \frac{9ca}{c+3a+2b} \leq \frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{a}{2} + \frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} + \frac{b}{2} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{c}{2} = \frac{3(a+b+c)}{2}$ <p>Suy ra: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$</p> <p>Dấu '=' xảy ra khi : $a = b = c = 1$</p>	<p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
---	--	--------------------------------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8**HUYỆN HOÀNG HÓA****NĂM HỌC: 2023 – 2024****Môn thi: Toán****Thời gian làm bài: 150 phút****(không kể thời gian giao đề)**

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$, với $x \neq 0, \pm 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm giá trị của x để P = 1.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$. Chứng minh:

$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} = 0.$$

2. Cho đa thức: $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$. Xác định hệ số a ; b ; c biết $f(x)$ chia hết cho $x - 2$ và $f(x)$ chia cho $x^2 - 1$ dư $2x$.

3. Bác Hoàng gửi vào ngân hàng 500 triệu đồng theo thể thức lãi kép theo định kì với lãi suất 5,5% mỗi năm (tức là nếu đến hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn kì kế tiếp). Tính số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là (cả gốc và lãi).

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các số nguyên x ; y thỏa mãn: $2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2)$

2. Tìm tất cả số nguyên tố p ; q ; r thỏa mãn: $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = r^2 + 1$

Câu 4. (6,0 điểm) Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm M bất kỳ (không trùng với A, B). Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ B xuống MC.

1. Chứng minh: $BH^2 = HM.HC$.

2. Đường thẳng qua D vuông góc với DM cắt đường thẳng BC tại K; đường thẳng qua D vuông góc với MK cắt BC tại E. Chứng minh: $\triangle KDM$ vuông cân và $\triangle DKE$ đồng dạng với $\triangle BKD$.

3. Trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $BN = BM$. Chứng minh rằng: khi điểm M di chuyển trên cạnh AB thì góc DHN luôn có số đo không đổi.

Câu 5. (2,0 điểm)

1. Đường quốc lộ và đường ống dẫn dầu cắt nhau tạo thành một góc nhỏ hơn 45° , trong góc này có bãi

đỗ xe ô tô ở vị trí A (hình vẽ). Cần phải xây trạm cung cấp xăng ở vị trí nào trên đường ống để các loại xe

xuất phát từ bãi đỗ xe A đến cây xăng rồi ra đường quốc lộ với đường đi ngắn nhất.

2. Cho x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{3(y+z-x)} + \frac{y}{3(x+z-y)} + \frac{z}{3(x+y-z)} \geq 1$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Với $x \neq 0, \pm 1$ ta có:

$$P = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1-2x^2+4x}{x^3-1} + \frac{1}{x-1} \right] : \frac{x^2+x}{x^3+x}$$

$$P = \left[\frac{(x-1)^3}{(x^2+x+1)(x-1)} - \frac{1-2x^2+4x}{(x^2+x+1)(x-1)} + \frac{x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} \right] : \frac{x(x+1)}{x(x^2+1)}$$

$$P = \frac{x^3-3x^2+3x-1-1+2x^2-4x+x^2+x+1}{(x^2+x+1)(x-1)} : \frac{x+1}{x^2+1}$$

$$P = \frac{x^3-1}{(x^2+x+1)(x-1)} \cdot \frac{x^2+1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{x^2+1}{x+1} \text{ với } x \neq 0, \pm 1.$$

2. Để $P = \frac{x^2+1}{x+1} = 1$ thì $x^2+1 = x+1$

$$\Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vì ĐKXD là $x \neq 0, \pm 1$ nên $x = 0; x = 1$ không thỏa mãn

Vậy không tồn tại x để $P = 1$

Câu 2:

1. Ta có: $\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

$$= \frac{1}{(b+c)^2-2bc-a^2} + \frac{1}{(a+c)^2-2ac-b^2} + \frac{1}{(a+b)^2-2ab-c^2}$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)(b+c-a)-2bc} + \frac{1}{(a+b+c)(a-b+c)-2ac} + \frac{1}{(a+b+c)(a+b-c)-2ab}$$

$$= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a+b+c}{abc} = 0(\text{đpcm})$$

2. Gọi thương của $f(x)$ cho $x-2$ là $P(x)$ mà $f(x)$ chia hết cho $x-2$

$$\text{nên } f(2) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-2).P(2) = 0$$

$$\Rightarrow 32 + 4a + 2b + c = 0 \quad (1)$$

Gọi thương của $f(x)$ cho $x^2 - 1$ là $Q(x)$ mà $f(x)$ chia $x^2 - 1$ dư $2x$

$$\text{nên } f(1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(1) = 2$$

$$\text{và } f(-1) = 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)(x+1).Q(-1) = -2$$

$$\Rightarrow 2 + a + b + c = 2 \quad (2) \text{ và } 2 + a - b + c = -2 \quad (3)$$

$$\text{Lấy (2) + (3) ta được } 4 + 2a + 2c = 0 \Rightarrow a + c = -2$$

Thay $a + c = -2$ vào (2) ta được $b = 2$

$$\text{Lấy (1) - (2) ta được } 30 + 3a + b = -2 \Rightarrow 3a = -34 \Rightarrow a = -\frac{34}{3} \Rightarrow c = \frac{28}{3}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{34}{3}; b = 2; c = \frac{28}{3}$$

3. Vì Bác Hoàng gửi theo thể thức lãi kép nên số tiền bác Hoàng nhận được sau 3 năm là: $500(5,5\% + 1)^3$

$$= 587,1206875 \text{ (triệu đồng)}$$

Đáp số: 587,1206875 triệu đồng

Câu 3:

$$1. \text{ Ta có: } 2x^2 + 4x + 2 = 3(7 - y^2) \Rightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$$

$$\text{Do } 2(x+1)^2 > 0 \text{ nên } 3(7 - y^2) > 0 \Rightarrow 7 - y^2 > 0 \Rightarrow y^2 < 7$$

$$\Rightarrow y^2 \in \{0; 1; 4\} \Rightarrow y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\} \quad (y \in \mathbb{Z})$$

Với $y = \pm 2$ thì x không tồn tại ($x \in \mathbb{Z}$)

Với $y = \pm 1$ thì $(x + 1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2; x = -4$

Với $y = 0$ thì x không tồn tại ($x \in \mathbb{Z}$)

Vậy $(x; y)$ là $(2; 1); (2; -1); (-4; 1); (-4; -1)$

2. Do $p; q; r$ là số nguyên tố nên $p; q; r \geq 2$

$$\Rightarrow p^2 + 1 \geq 5; q^2 + 1 \geq 5; r^2 + 1 \geq 5$$

$$\Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \geq 25 \Rightarrow r^2 + 1 \geq 25 \Rightarrow r > 7 \text{ mà } r \text{ là số nguyên tố}$$

$$\text{nên } r^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 + 1)(q^2 + 1) \equiv 2 \pmod{3}$$

Do vai trò của p và q là như nhau nên không mất tính tổng quát giả sử

$$p^2 + 1 \equiv 1 \pmod{3} \text{ và } q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow p = 3 \text{ và } q^2 \equiv 1 \pmod{3}. \text{ Khi đó ta có } 10(q^2 + 1) = r^2 + 1$$

Do $q \geq 2$ nên

$$+ \text{ Xét } q = 2 \Rightarrow r = 7$$

$$+ \text{ Xét } q > 2 \Rightarrow q^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow 10(q^2 + 1) \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\Rightarrow r^2 + 1 \equiv 0 \pmod{4} \text{ (vô lí)}$$

Vậy $(p; q; r)$ là $(3; 2; 7); (2; 3; 7)$

Do DB là đường chéo của hình vuông ABCD nên $DBC = 45^0$

Vì $\triangle DMK$ vuông cân tại D có đường cao DE nên DE vừa là đường cao vừa là đường phân giác của MDK

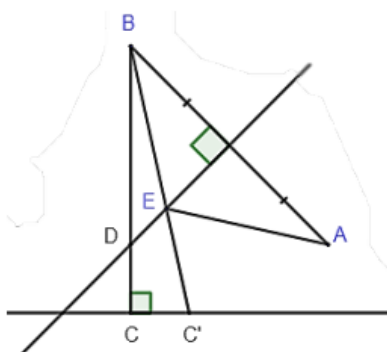
$$\Rightarrow EDK = 45^0$$

Xét $\triangle DKE$ và $\triangle BKD$ có: K chung

$$EDK = DBK = 45^0$$

$$\Rightarrow \triangle DKE \sim \triangle BKD \text{ (g - g) (đpcm)}$$

Câu 5:



Ta thấy khu dân cư A và điểm lối thoát ra đường quốc lộ nằm cùng về một phía đường ống dẫn dầu. Gọi

B là điểm đối xứng với A qua đường ống dẫn dầu.

Từ B hạ đường vuông góc xuống đường quốc lộ, cắt đường ống dẫn dầu tại D và cắt đường quốc lộ tại C

Vậy D chính là nơi ta xây trạm cung cấp xăng và đoạn đường $AD + DC$ là đoạn đường ngắn nhất nên ta phải mở.

Thật vậy, gọi E là điểm bất kì trên đường ống dẫn dầu, C' là giao điểm của BE xuống đường quốc lộ.

$$\text{Ta có: } AE + EC' = BE + EC' \geq BC' \geq BC$$

(Do BC là đoạn đường ngắn nhất từ B đến đường quốc lộ)

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

ĐỀ KĐCL HỌC SINH KHỐI 6, 7, 8 NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán 8

(Đề thi gồm 01 trang)

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (4,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x^2 + 4}{x^3 - 8} - \frac{x}{x^2 + 2x + 4} \right) \cdot \left(2 - \frac{8}{x^2} \right)$ với $x \neq 0$ và $x \neq 2$

a) Chứng minh $A = \frac{2x + 4}{x^2}$.

b) Tính giá trị của biểu thức A biết $|2x - 3| = 1$.

Câu 2: (5,0 điểm)

a) Phân tích đa thức $C = x^2 + 5xy + 6y^2$ thành nhân tử.

b) Chứng minh rằng $M = a^3 - a$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên a.

c) Cho $P = n^4 + 4$. Tìm tất cả các số tự nhiên n để P là số nguyên tố.

Câu 3: (4,0 điểm) a) Giải các phương trình:

$$\frac{x-241}{17} + \frac{x-220}{19} + \frac{x-195}{21} + \frac{x-166}{23} = 10.$$

b) Cho đa thức $P_{(x)} = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho đa thức $(x-1)^3$. Tìm a, b, c.

c) Cho 2 số không âm a; b thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq a + b$. Tìm giá trị lớn nhất của

biểu thức

$$S = 2019 + \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020}.$$

Câu 4: (7,0 điểm): Cho hình vuông $ABCD$ có 2 đường chéo AC và BD cắt nhau tại

O . Trên cạnh AB lấy M ($0 < MB < MA$) và trên cạnh BC lấy N sao cho $MON = 90^\circ$.

Gọi E là giao điểm của AN với DC , gọi K là giao điểm của ON với BE .

a) Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân.

b) Chứng minh: $MN \parallel BE$ và $BKN = OCN$.

c) Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H .

Chứng minh: $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1$.

----- Hết -----

Họ và tên học sinh:SBD:

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÃI

HƯỚNG DẪN CHẤM KĐCL MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2022 – 2023.

(Đáp án gồm 4 trang)

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	a	a) Chứng minh $A = \frac{2x+4}{x^2}$	0,5
	(2.0 đ)		1,0

10. *Journal of the American Medical Association*, 2000; 283: 2686-2692.

			0.5
Câu 3 			

		<p>Để đa thức $P_{(x)} = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho đa thức $(x-1)^3$ thì</p> <p>$(a+6)x^2 + (b-8)x + c + 3 = 0$ với mọi giá trị của x</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} a+6=0 \\ b-8=0 \\ c+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=8 \\ c=-3 \end{cases}$ <p>Vậy $a = -6, b = 8, c = -3$</p>	0.5
			0.5

		<p>Ta có: $a^2 + 1 \geq 2a$, $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$</p> <p>Mà $a^2 + b^2 \leq a + b \Rightarrow 2(a + b) \leq a^2 + b^2 + 2 \leq a + b + 2 \Rightarrow a + b \leq 2$</p> <p>Mặt khác với x, y là 2 số dương ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{4}{x + y}$</p> <p>Do đó:</p> $0 \leq \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{a+1} + 1 - \frac{1}{b+1} = 2 - \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \leq 2 - \frac{4}{a+b+2} \leq 1$ <p>Suy ra: $\left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020} \leq 1 \Rightarrow 2019 + \left(\frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right)^{2020} \leq 2019 + 1 \Rightarrow S \leq 2020$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi và khi $a = b = 1$.</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của S là 2020, xảy ra khi $a = b = 1$.</p>	0.25
	c		0.5
	(1.0 đ)		0.25

			0.25
			0.25
<p>Câu 4</p> <p>(6,0 điểm)</p>	0.5đ		0.5

		<p>a). Chứng minh $\triangle MON$ vuông cân</p> <p>Xét $\triangle AOM$ và $\triangle BON$, có:</p> <p>$\angle OAM = \angle OBN (= 45^\circ)$</p> <p>$OA = OB$ (tính chất hình vuông)</p> <p>$\angle AOM = \angle BON$ (cùng phụ với $\angle BOM$)</p> <p>Suy ra $\triangle AOM = \triangle BON$ (g.c.g)</p> <p>$\Rightarrow OM = ON$</p> <p>Xét $\triangle MON$ có $OM = ON$ (cmt) và $\angle MON = 90^\circ$ (gt)</p> <p>Suy ra $\triangle MON$ vuông cân tại O (đpcm).</p>	<p>0.5</p> <p>0.5</p> <p>1,0</p> <p>1,0</p>
	<p>A</p> <p>(3,0 đ)</p>		

		<p>b). Chứng minh: $MN \parallel BE$</p> <p>Do $\triangle AOM = \triangle BON$ (cmt) nên</p> $AM = BN \Rightarrow AB - BM = BC - CN \Rightarrow BM = CN$ <p>Suy ra $\frac{AM}{BM} = \frac{BN}{CN}$, mà $\frac{BN}{CN} = \frac{AN}{EN}$ (hệ quả định lí Tales).</p> <p>Nên $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{EN} \Rightarrow MN \parallel BE$ (định lí Tales đảo) (đpcm).</p>	0.5
	<p>B</p> <p>(2,5 đ)</p>	<p>+) Chứng minh: $BKN = OCN$</p> <p>Do $MN \parallel BE$ (cmt) nên $MNO = BKO = 45^\circ$ (2 góc đồng vị)</p> <p>Mà $BCO = 45^\circ \Rightarrow BKO = BCO = 45^\circ$ hay $BKN = OCN$ (đpcm).</p>	0.5
			0.5

			0.5
		<p>c). Qua K vẽ đường song song với OM cắt BC tại H. Chứng minh:</p> $\frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = 1.$ <p>Ta có: $KH \parallel OM$ (gt), $OM \perp OK \Rightarrow KH \perp OK$ hay $KH \perp NK$.</p> <p>Suy ra $CKH = NKH - CKN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow KC$ là phân giác của NKH</p> <p>Mà $CK \perp BE$ (cmt) suy ra KB là phân giác ngoài tại đỉnh K của ΔNKH.</p> $\Rightarrow \frac{KN}{KH} = \frac{CN}{CH} = \frac{BN}{BH} \text{ (tính chất đường phân giác của tam giác) (1)}$ <p>Tương tự ta có KN là phân giác trong và KH là phân giác ngoài của ΔBKC</p> $\Rightarrow \frac{KC}{KB} = \frac{CN}{BN} = \frac{CH}{BH} \text{ (tính chất đường phân giác của tam giác) (2)}$ <p>Từ (1) và (2) suy ra:</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
	c (1,0đ)		0.25

		$\frac{KN}{KH} + \frac{KC}{KB} = \frac{BN + CH}{BH} \Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = \frac{BN + CH + CN}{BH}$ $\Rightarrow \frac{KC}{KB} + \frac{KN}{KH} + \frac{CN}{BH} = \frac{BH}{BH} = 1 \text{ (đpcm)}.$	0.25
--	--	--	------

*** Học sinh làm bằng cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.**

PHÒNG GD & ĐT HƯNG HÀ

ĐỀ KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN

TRƯỜNG THCS LÊ DANH PHƯƠNG

THÁNG 12. NĂM HỌC 2023 - 2024

Bài 1 (4,5 điểm).

1) Cho các số a, b, c thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2024$ và $abc = 2024$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)$.

2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$

b) $B = (x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3$

Bài 2 (4,5 điểm). Tìm x, biết:

a) $\frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$

b) $(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$

c) $(x - 2)^3 - (x + 5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$

Bài 3 (4,0 điểm).

Cho hai biểu thức: $P = \left(\frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 3a - 4}$ và

$$Q = \frac{a-4}{a^2 - 4a + 9}$$

- a) Rút gọn biểu thức P ;
- b) Tính giá trị của P biết $a+1=|3|$;
- c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = P.Q$.

Bài 4 (2,0 điểm).

Cho hình thang $(AB//CD)$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng

song song với hai đáy cắt BC tại I , cắt AD tại J . Chứng minh rằng $\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

Bài 5 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AK . Trong tam giác ACK kẻ phân giác trong AE .

- a) Chứng minh rằng tam giác ABE cân.

b) Chứng minh rằng $\frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$.

Bài 6 (1,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

--- Hết ---

BIỂU ĐIỂM CHẤM KIỂM TRA CHẤT LƯỢNG ĐỘI TUYỂN TOÁN 8

THÁNG 12. NĂM HỌC 2023 - 2024

Bài 1 (4,5 điểm).

1) Cho các số a, b, c thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2024$ và $abc = 2024$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)$.

2) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$

b) $B = (x - y)z^3 + (y - z)x^3 + (z - x)y^3$

Câu	Nội dung	Điểm
1.1)	Theo bài ra: $(a + b + c)(ab + bc + ca) = 2024$ và $abc = 2024$	
1,5đ	$\Rightarrow (a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$	0,5
	$\Rightarrow a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + ac^2 = abc$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow (a^2b + 2abc + bc^2) + (a^2c + ac^2)b + (ab^2 + b^2c) = 0$ $\Rightarrow b(a + c)^2 + ac(a + c) + b^2(a + c) = 0$ $\Rightarrow (a + c)(ab + bc + ac + b^2) = 0$ $\Rightarrow (a + c)[a(b + c) + b(b + c)] = 0$ $\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0.$	
	<p>Khi đó: $P = (b^2c + 2024)(c^2a + 2024)(a^2b + 2024)$</p> $= (b^2c + abc)(c^2a + abc)(a^2b + abc) \quad (\text{vì } \dots)$ $= a^2b^2c^2(a + b)(b + c)(c + a) = 0.$ <p>Vậy $P = 0$ khi a, b, c thỏa mãn đề bài.</p>	0,5
1.2a)	$A = x^4 - 1980x^2 - 1981x - 1980$	
1,5đ	$A = x^4 - 1980x^2 - x - 1980x - 1980$ $A = (x^4 - x) - 1980(x^2 + x + 1)$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$A = x(x-1)(x^2+x+1) - 1980(x^2+x+1)$ $A = (x^2+x+1)(x^2-x-1980)$	0,5
	$A = (x^2+x+1)(x+44)(x-45)$	0,5
1.2b)	Ta có : $B = (x-y)z^3 + (y-z)x^3 + (z-x)y^3$	0,5
1,5đ	$= z^3(x-y) + x^3[-(x-y) - (z-x)] + y^3(z-x)$ $= z^3(x-y) - x^3(x-y) + y^3(z-x) - x^3(z-x)$	
	$= (x-y)(z^3-x^3) + (z-x)(y^3-x^3)$ $= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2) + (z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2)$	0,5
	$= (x-y)(z-x)(z^2+zx+x^2-y^2-xy-x^2)$ $= (x-y)(z-x)(z-y)(z+y+x)$	0,5

Bài 2 (4,5 điểm). Tìm x, biết:

$$\text{a) } \frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$$

$$\text{b) } (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$$

$$\text{c) } (x-2)^3 - (x+5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$$

Câu	Nội dung	Điểm
a) 1,5đ	$\frac{x+10}{2014} + \frac{x-2008}{2016} + \frac{x-4030}{2018} = \frac{x+4}{2020} + \frac{x+4046}{2022} - 6$ $\Rightarrow \left(\frac{x+10}{2014} + 1 \right) + \left(\frac{x-2008}{2016} + 2 \right) + \left(\frac{x-4030}{2018} + 3 \right) = \left(\frac{x+4}{2020} + 1 \right) + \left(\frac{x+4046}{2022} - 1 \right)$ $\Rightarrow \frac{x+2024}{2014} + \frac{x+2024}{2016} + \frac{x+2024}{2018} - \frac{x+2024}{2020} - \frac{x+2024}{2022} = 0$	0,5
	$\Rightarrow (x+2024) \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) = 0$ $\Rightarrow x+2024 = 0 \text{ (vì } \left(\frac{1}{2014} + \frac{1}{2016} + \frac{1}{2018} - \frac{1}{2020} - \frac{1}{2022} \right) \neq 0)$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow x = -2024$ Vậy $x = -2024$	0,5
b) 1,5đ	$(x^2 - 3x + 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$ $\Rightarrow (x - 1)(x - 2)(2x - 3)(2x - 5) = 6$ $\Rightarrow [x - 1)(2x - 5)][(x - 2)(2x - 3)] = 6$ $\Rightarrow (2x^2 - 7x + 5)(2x^2 - 7x + 6) = 6 \quad (1)$	0,5
	Đặt $2x^2 - 7x + 5 = t$, khi đó (1) trở thành: $t(t + 1) = 6$ $t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t + 3)(t - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \end{cases}$ + Với $t = -3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 8 = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{2}x + 4 = 0$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} = 0$ (vô lí vì $\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \quad \forall x$)	
c)	$+ \text{Với } t = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 2 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0$ $\Rightarrow 2x^2 - x - 6x + 3 = 0$ $\Rightarrow (2x^2 - x) - (6x - 3) = 0 \Rightarrow x(2x - 1) - 3(2x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 3)(2x - 1) = 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$ Vậy $x \in \left\{3; \frac{1}{2}\right\}$	0,5
	$(x - 2)^3 - (x + 5)(x^2 - 5x + 25) + 6x^2 = 11$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
1,5đ	$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 - 125 + 6x^2 = 11$	
	$12x - 133 = 11$ $12x = 144$	0,5
	$x = 12$ Vậy $x = 12$.	0,5

Bài 3 (4,0 điểm).

Cho hai biểu thức: $P = \left(\frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a + 1}{a^2 + 3a - 4}$ và

$$Q = \frac{a - 4}{a^2 - 4a + 9}$$

a) Rút gọn biểu thức P ;

b) Tính giá trị của P biết $a + 1 = |3|$;

c) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = P.Q$.

Câu	Nội dung	Điểm
a) 2,0đ	$P = \left(\frac{2}{a^2 - 5a + 4} + \frac{3}{a^2 - 16} \right) : \frac{a+1}{a^2 + 3a - 4}$	0,5
	$= \left[\frac{2}{(a-1)(a-4)} + \frac{3}{(a-4)(a+4)} \right] : \frac{a+1}{(a-1)(a+4)}$	
	$= \frac{2(a+4) + 3(a-1)}{(a-1)(a-4)(a+4)} : \frac{a+1}{(a-1)(a+4)}$	
	$= \frac{5a+5}{(a-1)(a-4)(a+4)} \cdot \frac{(a-1)(a+4)}{a+1}$	
	$= \frac{5(a+1)}{(a-4)(a+1)}$	0,5
	$= \frac{5}{a-4}$	

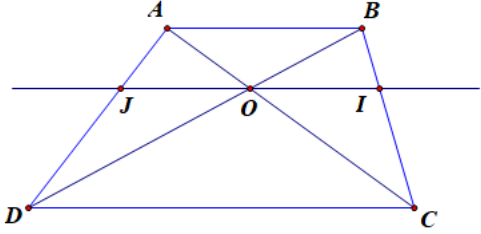
	Vậy $P = \frac{5}{a-4}$.	
b) 1,0đ	<p>b) Theo câu a) $P = \frac{5}{a-4}$ với $a \neq \pm 1; a \neq \pm 4$</p> <p>Theo bài ra: $a+1= 3 \Rightarrow a+1=3 \Rightarrow a=2$</p>	0,5
	<p>Với $a=2$ thỏa mãn ĐKXD, thay $a=2$ vào $P = \frac{5}{a-4}$ ta được:</p> $P = \frac{5}{2-4} = -\frac{5}{2}$ <p>Vậy $P = -\frac{5}{2}$ khi a thỏa mãn đề bài.</p>	0,5
c) 1,0đ	<p>Xét $B = P.Q = \frac{5}{a-4} \cdot \frac{a-4}{a^2-4a+9} = \frac{5}{a^2-4a+9}$, với $a \neq \pm 1; a \neq \pm 4$</p> <p>Do $a^2-4a+9 = (a-2)^2+5 \geq 5$ với mọi a</p>	0,5
	$\Rightarrow B = \frac{5}{a^2-4a+9} \leq \frac{5}{5} = 1$	0,5

	Dấu " $=$ " xảy ra khi $a = 2$ (thỏa mãn ĐKXD)	
	Vậy GTLN của $B = 1$ khi $a = 2$	

Bài 4 (2,0 điểm).

Cho hình thang $(AB//CD)$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. Qua O kẻ đường thẳng

song song với hai đáy cắt BC tại I , cắt AD tại J . Chứng minh rằng $\frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$

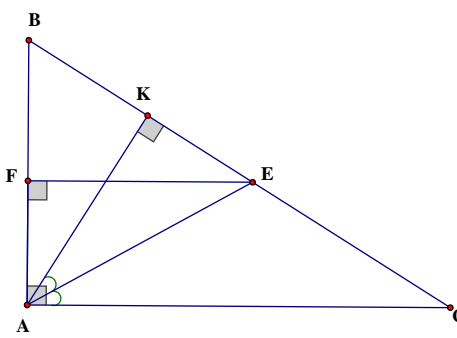
Câu	Nội dung	Điểm
a)		
2,0đ	<p>Xét $\triangle ABD$ có $OJ//AB \Rightarrow \frac{OJ}{AB} = \frac{OD}{DB}$ (1)</p>	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Xét $\triangle DBC$ có $OI // DC \Rightarrow \frac{OI}{CD} = \frac{OB}{BD}$ (2)</p> <p>Xét $\triangle ABC$ có $OI // AB \Rightarrow \frac{OI}{AB} = \frac{OC}{AC}$ (3)</p> <p>Xét $\triangle ADC$ có $OJ // DC \Rightarrow \frac{OJ}{DC} = \frac{AO}{AC}$ (4)</p>	
	<p>Từ (1),(2),(3) và (4) suy ra:</p> $\frac{OJ}{AB} + \frac{OI}{CD} + \frac{OI}{AB} + \frac{OJ}{DC} = \frac{OD}{DB} + \frac{OB}{BD} + \frac{OC}{AC} + \frac{AO}{AC}$ $\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{DC} = \frac{BD}{BD} + \frac{AC}{AC}$	0,5
	$\Rightarrow \frac{IJ}{AB} + \frac{IJ}{DC} = 1 + 1 = 2$ $\Rightarrow \frac{2}{IJ} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}.$	

Bài 5 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AK . Trong tam giác ACK kẻ phân giác trong AE .

a) Chứng minh rằng tam giác ABE cân.

b) Chứng minh rằng $\frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$.

Câu	Nội dung	Điểm
		
a) 2,0đ	<p>Ta có $BEA = ECA + EAC$,</p> <p>mà $EAC = EAK$ vì AE là phân giác,</p> <p>$ECA = KAB$ vì cùng phụ với ABC</p>	1,0

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Do đó $BEA = ECA + EAC = KAB + EAK = BAE$.</p> <p>Vậy $\triangle ABE$ cân tại B.</p>	1,0
b) 2,0đ	<p>Hạ $EF \perp AB$, do $\triangle ABE$ cân tại B nên $BA = BE$</p> <p>Chứng minh $\triangle KBA = \triangle FBE$ (cạnh huyền – góc nhọn)</p> <p>$\Rightarrow AK = EF, BK = BF$</p> <p>Chứng minh $EF \parallel AC$.</p>	0,5
	<p>Xét $\triangle AKC$ có $\frac{EK}{EC} = \frac{AK}{AC}$</p> <p>Suy ra $\frac{EK}{EC} = \frac{AK}{AC} = \frac{EF}{AC}$</p>	0,5
	<p>Xét $\triangle ABC$ có</p> <p>$EF \parallel AC \Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BF}{BA}$</p>	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Khi đó $\frac{EK}{EC} = \frac{BF}{BA} \Rightarrow \frac{BK}{BE} = \frac{EK}{EC}$	0,5

Bài 6 (1,0 điểm). Cho $a, b, c > 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{4a}{a+b+2c} + \frac{b+3c}{2a+b+c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Đặt: $x = a + b + 2c, y = 2a + b + c, z = a + b + 3c (x, y, z > 0)$.</p> <p>Từ đó tính được $a = z + y - 2x, b = 5x - y - 3z, c = z - x$</p> <p>Biểu thức đã cho trở thành</p> $A = \frac{4(z + y - 2x)}{x} + \frac{(5x - y - 3z) + 3(z - x)}{y} - \frac{8(z - x)}{z}$ $= \frac{4z + 4y}{x} - 8 + \frac{2x}{y} - 1 + \frac{8x}{z} - 8 = \left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y} \right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z} \right) - 17.$	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>Mặt khác áp dụng BĐT Cauchy cho hai số dương ta có:</p> $\left(\frac{4y}{x} + \frac{2x}{y}\right) + \left(\frac{4z}{x} + \frac{8x}{z}\right) \geq 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} + 2\sqrt{\frac{4z}{x} \cdot \frac{8x}{z}}$ $= 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} = 12\sqrt{2}.$ <p>Do đó $A \geq 12\sqrt{2} - 17$.</p>	
	<p>Dấu đẳng thức xảy ra khi</p> $\frac{4y}{x} = \frac{2x}{y}, \frac{4z}{x} = \frac{8x}{z} \Leftrightarrow x = y\sqrt{2}, z = x\sqrt{2} = 2y$ $\Leftrightarrow x = k\sqrt{2}, y = k, z = 2k (k > 0)$ <p>Vậy min $A = 12\sqrt{2} - 17$ khi</p> $a = (3 - 2\sqrt{2})k, b = (5\sqrt{2} - 7)k, c = (2 - \sqrt{2})k, (k > 0).$	0,5

PHÒNG GD&ĐT TP. BẮC GIANG

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

TRƯỜNG THCS NGÔ SỸ LIÊN

NĂM HỌC 2023 - 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN KHẢO SÁT: TOÁN 8

Ngày khảo sát: 21 /12/2023

(Đề có: 01 trang)

Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1: (5,0 điểm)1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$ 2) Cho ba số a, b, c khác nhau đôi một và khác 0, đồng thời thỏa mãn điều kiện

$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}. \text{ Tính giá trị của biểu thức: } A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$ biết $a + b = 1$ và $a > 0; b > 0$.

Câu 2: (4,0 điểm)

- 1) Tìm x, y nguyên biết $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.
- 2) Chứng minh rằng: $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n chẵn.

Câu 3: (4,0 điểm)

- 1) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương.
- 2) Cho a, b, c là các số nguyên khác 0, $a \neq c$ sao cho $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2$ không phải là số nguyên tố.

Câu 4: (6,0 điểm)

1. Cho hình thoi $ABCD$ có O là giao điểm của hai đường chéo vẽ hình chữ nhật $AOBE$.
Đường thẳng OE cắt AB, CD lần lượt ở G, F . Đường thẳng DE cắt AB, OA lần lượt ở H, I .
Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và OF . Chứng minh:
 - a) Tứ giác $ADOE$ là hình bình hành
 - b) Ba điểm G, I, M thẳng hàng
 - c) Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy

d) $12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$

2. Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax và By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh:

a) $AC + BD = CD$

b) CO là tia phân giác của ACD

Câu 5: (1,0 điểm) Cho các số thực $a, b, c \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{c+a}$$

————— **HẾT** —————

HƯỚNG DẪN CHẤM THI KSHSG TOÁN 8

Câu	ý	Nội dung	Biểu điểm

1	1	$M = (x^2 + x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$ $= [(x^2 + 2x + 1) - x] \cdot [(x^2 + 2x + 1) + x] + x^2$ $= (x + 1)^4 - x^2 + x^2$ $= (x + 1)^4$	0,75
			0,75
	2	<p>- Nếu $a + b + c = 0$ thì $a + b = -c, b + c = -a, c + a = -b$</p> <p>Do đó, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = -1 \Rightarrow A = \frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} = -1$</p> <p>- Nếu $a + b + c \neq 0$ thì $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b+b+c+c+a}{c+a+b} = 2$</p> <p>Do đó, $a + b = 2c, b + c = 2a, c + a = 2b \Rightarrow a = b = c$, trái giả thiết</p> <p>Vậy $A = -1$</p>	0,75
	3	$a + b = 1$ và $a > 0; b > 0$.	

		<p>Ta có $D = \left(1 + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{b}\right)^2$</p> $= \left(1 + \frac{a+b}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{a+b}{b}\right)^2$ $= \left(2 + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(2 + \frac{a}{b}\right)^2$ $= 8 + 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)$ <p>Theo bất đẳng thức Cauchy $D \geq 8 + 4.2 + 2 = 18$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của D là 18 khi $a = b = \frac{1}{2}$</p>	<p>1</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
2	1	<p>Ta có $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$</p> $\Leftrightarrow x^2 + xy + 2y^2 - y + 2xy - x = -3$ $\Leftrightarrow x(x+y) + y(2y-1) + x(2y-1) = -3$ $\Leftrightarrow x(x+y) + (2y-1)(x+y) = -3$ $\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1) = -3$	

		<p>Do x, y nguyên nên $\begin{cases} x+y \in U(3) \\ x+2y-1 \in U(3) \end{cases}$</p>	1
		<p>Lập bảng và tìm được $(x; y) \in \{(-6; 5); (4; -3); (-8; 5); (6; -3)\}$</p> <p>Vậy $(x; y) \in \{(-6; 5); (4; -3); (-8; 5); (6; -3)\}$</p>	1
	2	<p>Ta có: $A = n^3 + 6n^2 + 8n = n(n^2 + 6n + 8) = n(n+2)(n+4)$</p> <p>Vì n là số chẵn nên đặt $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$), khi đó:</p> <p>$A = 2k(2k+2)(2k+4) = 8k(k+1)(k+2)$</p> <p>Vì $k(k+1)(k+2)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên:</p> <p>- Tồn tại một số là bội của 2 nên $k(k+1)(k+2):2$ nên $A:16$</p>	1

		<p>- Tồn tại một số là bội của 3 nên $k(k+1)(k+2):3$</p> <p>Vậy A chia hết cho các số 3; 16 mà $(3,16)=1$ nên $A:(3.16) \Rightarrow A:48$.</p>	1
3	1	<p>Giả sử $n^2 + 4n + 2013 = m^2, (m \in \mathbb{N})$.</p> <p>Suy ra $(n+2)^2 + 2009 = m^2 \Leftrightarrow m^2 - (n+2)^2 = 2009$</p> <p>$\Leftrightarrow (m+n+2)(m-n-2) = 2009$</p> <p>Mặt khác $2009 = 2009.1 = 287.7 = 49.41$ và $m+n+2 > m-n-2$ nên có các trường hợp sau xảy ra:</p> <p>+ Trường hợp 1: $\begin{cases} m+n+2 = 2009 \\ m-n-2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1005 \\ n = 1002 \end{cases}$</p> <p>+ Trường hợp 2: $\begin{cases} m+n+2 = 287 \\ m-n-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 147 \\ n = 138 \end{cases}$</p> <p>+ Trường hợp 3: $\begin{cases} m+n+2 = 49 \\ m-n-2 = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 45 \\ n = 2 \end{cases}$</p> <p>Vậy các số cần tìm là: 1002;138;2.</p>	1
			1

Ta có: $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (a-c)(b^2-ac) = 0 \Rightarrow b^2 = ac$. Mà

$$a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + ac + c^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = (a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$$

Ta thấy $a^2 + b^2 + c^2 > 3$ do đó nếu $a^2 + b^2 + c^2$ là các số nguyên tố

thì xảy ra các trường hợp sau:

$$1) a+c-b=1; a+c+b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1$$

$$2) a+c+b=1, a+c-b=a^2+b^2+c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2=2a+2c-1$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 + (c-1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=1, b=\pm 1$$

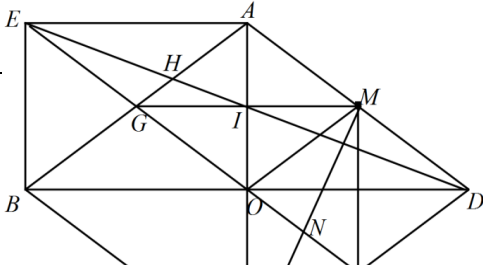
(Không thỏa mãn điều kiện đầu bài a khác c)

$$3) a+c+b=-1, a+c-b=-(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1 \quad (ktm)$$

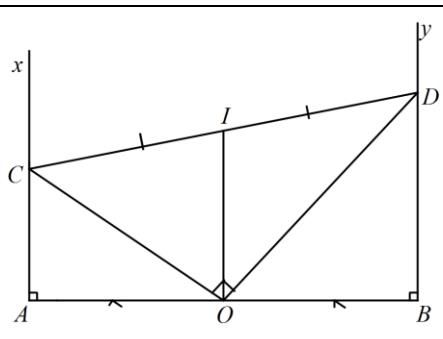
$$4) a+c-b=-1, a+c+b=-(a^2+b^2+c^2) \Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2a-2c-1$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 + (c+1)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a=c=-1, b=\pm 1$$

		<div>(Không thỏa mãn điều kiện đầu bài a khác c)</div> <div>KL...</div>	1
4		<div></div>	

1	<p>a) Ta có $AE//OB$ và $AE = OB$ (vì $AOBE$ là hình chữ nhật)</p> <p>Nên $AE//OD$ và $AE = OD$ (vì $OB = OD$)</p> <p>Do đó tứ giác $ADOE$ là hình bình hành.</p> <p>b) Ta có G là trung điểm của AB (vì $AOBE$ là hình chữ nhật)</p> <p>I là trung điểm của AO (vì $ADOE$ là hình bình hành)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>	

	<p>M là trung điểm của AD</p> <p>Nên IM, IG lần lượt là đường trung bình của tam giác AOB, AOD</p> <p>$\Rightarrow IG // OB$ và $IM // OD$</p> <p>$\Rightarrow G, I, M$ thẳng hàng</p>	0,5
		0,5
	<p>c) Ta có O, M, F lần lượt là trung điểm của AC, AD, CD</p> <p>Nên OM, MF lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD</p> <p>$\Rightarrow OM // CD$ và $MF // AC$ hay $OM // CF$ và $MF // OC$</p> <p>Do đó tứ giác $OCFM$ là hình bình hành</p> <p>Mà N là trung điểm của OF</p> <p>$\Rightarrow N$ là trung điểm của MC</p> <p>Vậy ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy.</p>	0,5
		0,5

	<p>d) $\triangle AOE$ có AG, EI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại H nên H là trọng tâm của $\triangle AOE$</p> <p>$\Rightarrow EH = \frac{2}{3}EI \Rightarrow EH.ED = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ED.ED = \frac{1}{3}ED^2$</p> <p>$\Rightarrow EH.ED = \frac{1}{3}(BD^2 + EB^2) \Rightarrow EH.ED = \frac{1}{3}\left(BD^2 + \frac{1}{4}AC^2\right)$</p> <p>$\Rightarrow 12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
2	 <p>a) Gọi I là trung điểm của CD</p> <p>Tứ giác $ACDB$ là hình thang (do $AC \parallel BD$)</p> <p>$\Rightarrow OI$ là đường trung bình của hình thang $ACDB$</p>	

$$\Rightarrow OI = \frac{AC + BD}{2} \Rightarrow AC + BD = 2.OI \quad (1)$$

Ta lại có $\triangle OCD$ vuông tại O

Có OI là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OI = \frac{CD}{2} \Rightarrow 2.OI = CD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AC + BD = CD$

b) Ta có $\triangle OCD$ vuông tại O có OI là đường trung tuyến

$$\Rightarrow OI = IC$$

$$\Rightarrow \triangle IOC \text{ cân tại } I \Rightarrow IOC = ICO$$

Mà $IOC = ACO$ (So le trong)

$$\Rightarrow ACO = ICO$$

Vậy CO là tia phân giác ACD .

			1
5		<p>Ta có $(a-1)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 2a-1, a \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{2a-1} \geq \frac{1}{a^2}$</p> <p>$\Rightarrow VT \geq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3$</p> <p>Ta lại có: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \geq \frac{8}{(a+b)^2}; \frac{8}{(a+b)^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2 \geq \frac{8}{a+b}$</p> <p>Tương tự ta có: $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{b+c}; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \geq \frac{8}{a+c}$</p> <p>Suy ra: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}$</p> <p>Do vậy: $\frac{1}{2a-1} + \frac{1}{2b-1} + \frac{1}{2c-1} + 3 \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{4}{a+c}$</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.</p>	0,5

			0,5
--	--	--	-----

Ghi chú: Nếu học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa

TRƯỜNG THCS MINH KHAI

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

Ngày 23 tháng 10 năm 2023

Môn Toán 8 – Năm học 2023 – 2024

Thời gian 120 phút

ĐỀ BÀI:

Bài 1 (4 điểm) :

1) Tìm x; y biết:

$$a) (x-1)^3 + 3(x-3)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x+2)^3 - (x-3)(x^2 + 9) + 6x^2 + 5$$

$$b) x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 9 = 0$$

2) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = x^7 - 18x^6 + 19x^5 - 31x^4 - 53x^3 + 35x^2 - 16x + 3 \text{ với } x=17$$

$$b) A = 6 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$$

Bài 2 (4 điểm)

a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$; $x + y + z \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$H = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

b) Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$.

Tính giá trị biểu thức: $P = (x+y)^{2021} + (x+1)^{2022} + (y-1)^{2023}$

Bài 3 (4 điểm): a) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24

b) Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=2024$. Tính giá trị của

biểu thức: $A=a^4+b^4+c^4$

Bài 4 (2 điểm) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=5x^2+9y^2-12xy+24x-48y+2103$$

Bài 5 (6 điểm) : Cho tam giác ABC đều. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D; trên

tia đối của tia AC lấy điểm E sao cho $AD = AE$. Gọi M; N; P; Q theo thứ tự là

trung điểm của BE; AD; AC; AB

a) Chứng minh rằng tứ giác BCDE là hình thang cân

b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang

c) Trên tia đối của tia MN lấy H sao cho $HM = MN$. Chứng minh rằng BH

vuông góc với BD và $EB = 2.MN$

d) Tam giác MNP đều

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

Bài	Nội dung	Biểu điểm
1	1) Tìm x; y biết:	
(4đ)	<p>a) $(x-1)^3 + 3(x-3)^2 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x+2)^3 - (x-3)(x^2 + 9) - 9x^2 + 1$</p> $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 18x + 27 - x^3 - 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 9x + 27 - 9x^2 + 1$ $-15x + 18 = 3x + 36$ $x = -1$ <p>KL:</p> <p>b) $x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y + 3 = 0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

	<p>Biến đổi được thành: $(2x + y - 3)^2 + 3(y - 1)^2 = 0$</p> <p>Biện luận tìm được $x = 1; y = 1$</p> <p>KL:</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>2) Tính giá trị của các biểu thức sau:</p> <p>a) $A = x^7 - 18x^6 + 19x^5 - 31x^4 - 53x^3 + 35x^2 - 16x + 3$ với $x = 17$</p> <p>Ta có $x = 17 \Rightarrow \begin{cases} 18 = x + 1 \\ 19 = x + 2 \\ 31 = 2x - 3 \\ 53 = 3x + 2 \\ 35 = 2x + 1 \\ 16 = x - 1 \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow A = x^7 - (x + 1)x^6 + (x + 2)x^5 - (2x - 3)x^4 - (3x + 2)x^3 + (2x + 1)x^2 - (x - 1)x + 3$</p> <p>Biến đổi tìm được $A = 20$</p> <p>b) $A = 6 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$</p>	

	$A = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2022} + 5^{2023}$ $\Rightarrow 5A = 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \dots + 5^{2023} + 5^{2024}$ $\Rightarrow 5A - A = 5^{2024} - 1 \Rightarrow A = \frac{5^{2024} - 1}{4}$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>2</p> <p>(4đ)</p>	<p>a) Cho $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$; $x + y + z \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:</p>	

$$H = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \left(1 + \frac{y}{z}\right) \left(1 + \frac{z}{x}\right)$$

Biến đổi đưa giả thiết về dạng :

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

Dựa vào $x + y + z \neq 0$ tìm ra được $x = y = z$

Tính được $H = 8$

1đ

b) Cho các số thực $x; y; z$ thỏa mãn đẳng thức: $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$.

0,75đ

Tính giá trị biểu thức: $P = (x + y)^{2021} + (x + 1)^{2022} + (y - 1)^{2023}$

0,25đ

Biến đổi $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x - 4y + 8 = 0$ tìm ra được $x = -2; y = 2$

Từ đó tính được $P = 2$

KL :

1,5

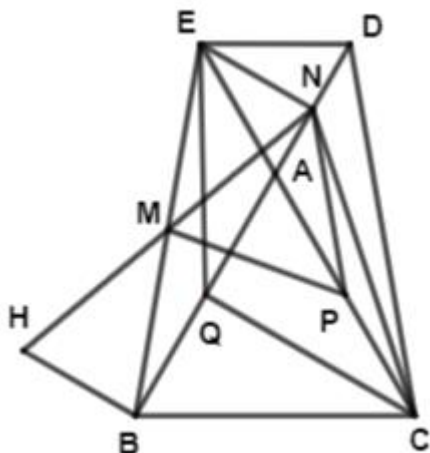
		0,5
3	a) Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24	
(4đ)	Ta có $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$	
	Vì n lẻ nên n có dạng $n = 2k + 1$	0,25
	Từ đó tính được $n^3 - n = 4k(k+1)(k+2) + 4k(k+1)(k-1)$	0,25
	Sử dụng tính chất chia hết chứng minh đk $n^3 - n$ chia hết cho 24	1
	b) Cho ba số $a; b; c$ thỏa mãn $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 10$. Tính giá trị của biểu thức: $A = a^4 + b^4 + c^4$	0,5
	Ta có: $a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0$	
	$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 0$	
	$\Rightarrow ab + bc + ac = -5$	
	$\Rightarrow (ab + bc + ac)^2 = 25$	

	$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = 25$ <p>Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 = 10$</p> $\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 100$ <p>$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 0$ Dựa vào giả thiết và áp dụng bất đẳng thức tam giác ra điều</p> <p>phải chứng minh</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p>
<p>4</p> <p>(2đ)</p>	<p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</p> $B = 5x^2 + 9y^2 - 12xy + 24x - 48y + 2103$ $= (3y - 2x - 8)^2 + (x - 4)^2 + 2023$ <p>Biện luận tìm ra $B \geq 2023$</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi $x = 4; y = \frac{16}{3}$</p>	<p>1đ</p> <p>0,75đ</p> <p>0,25đ</p>

5

(6

đ)



a) Tứ giác BCDE là hình thang cân

Tứ giác BCDE là hình thang cân

⇕

BCDE là hình thang ; $DB = EC$

⇕

⇕

$DE \parallel BC$

$EA = AD; AB = AC$

⇕

⇕

$\angle EDA = \angle ABC$

$\triangle EAD$ đều ; $\triangle ABC$ đều

1,5đ

b) Chứng minh rằng tứ giác CNEQ là hình thang

↑↑

$EN \parallel CQ$

↑↑

$EN \perp BD$

$CQ \perp BD$

↑↑

↑↑

ΔEAD đều

ΔABC đều

c) Trên tia đối của tia MN lấy H sao cho $HM = MN$. Chứng minh rằng BH

vuông góc với BD và $EB = 2.MN$

1,5đ

* Chứng minh $BH \perp BD$

↑↑

$HB \parallel EN$; $EN \perp BD$

↑

ENBH là hình bình hành

*Chứng minh $EB = 2MN$

↑

$\triangle BEN$ vuông tại N có MN là trung tuyến

d) Tam giác MNP đều

Tam giác MNP đều

↑

$\triangle MNP$ cân tại N;

$\angle MNP = 60^\circ$

↑

$MN = NP$

↑

$\angle MNA + \angle ANP = 60^\circ$

↑

1,5đ

$$\begin{cases} \text{ANP} + \text{APN} = 180^\circ - \text{NAP} = 60^\circ \\ \text{APN} = \text{MNA} \end{cases}$$

1,5đ

PHÒNG GIÁO DỤC NGHỊ LỘC

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024

TRƯỜNG THCS PHÚC THỌ

MÔN: TOÁN 8

(Thời gian làm bài 120 phút)

Bài 1 (4,0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2}$

2) Tính giá trị của biểu thức $B = x^6 - 50x^5 + 50x^4 - 50x^3 + 50x^2 - 50x + 50$ tại $x =$

Bài 2 (4,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$

2) Tìm số tự nhiên n để $n^2 + 2n + 20$ là số chính phương.

Bài 3 (5,0 điểm)

1) Cho các số thực a, b, c thoả mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = 1$$

2) Cho a, b, c là các số nguyên thoả mãn $a + b + 2024c = c^3$. Chứng minh

rằng: $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6

3) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn

$$x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$$

Bài 4 (6,0 điểm)

1) Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$.

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua

M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F.

Chứng minh $CE = BF$

Bài 5 (1,0 điểm):

Cho các số nguyên dương a và b thoả mãn $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a + b) + 2023$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia a - b cho 5

Họ và tên thí sinh:

.....

Số báo danh:

.....Phòng.....

ĐÁP ÁN BIỂU ĐIỂM CHẤM TOÁN 8

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4,0 đ)	1) $A = \frac{63^2 - 47^2}{215^2 - 105^2} = \frac{(63 - 47)(63 + 47)}{(215 - 105)(215 + 105)}$ $= \frac{16.110}{110.320} = \frac{1}{20}$	1,0
		1,0
	2) Ta có $x = 49$ nên $x + 1 = 50$ thay vào biểu thức B, ta được $B = x^6 - (x+1)x^5 + (x+1)x^4 - (x+1)x^3 + (x+1)x^2 - (x+1)x + (x+1)$ $= x^6 - x^6 - x^5 + x^5 + x^4 - x^4 - x^3 + x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1$ $= 1$	0,5
		0,5
		0,5
		0,5
Bài 2	1) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1 - y^2)$	0,5

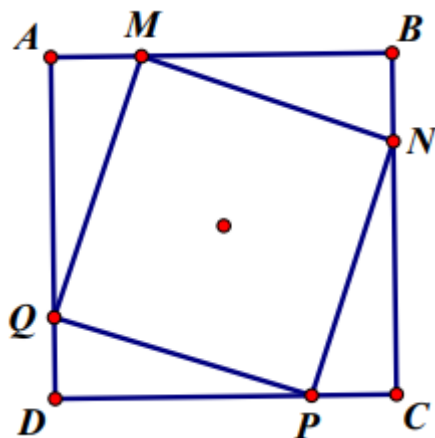
(4,0 đ)	$= x[(x^2 - 2x + 1) - y^2]$ $= x[(x - 1)^2 - y^2]$ $= x(x - 1 - y)(x - 1 + y)$ $= x(x - y - 1)(x + y - 1)$	0,5
	<p>2) Đặt $p^2 = n^2 + 2n + 20$</p> $p^2 = (n + 1)^2 + 19$ $p^2 - (n + 1)^2 = 19$ $(p - n - 1)(p + n + 1) = 19$	0,25

	<p>Do p, n là các số tự nhiên nên $(p - n - 1) < (p + n + 1)$</p> <p>Khi đó $\begin{cases} p - n - 1 = 1 \\ p + n + 1 = 19 \end{cases}$</p> <p>Suy ra $n = 8$ (TM)</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>
<p>Bài 3</p> <p>(5,0 đ)</p>	<p>1) $\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \frac{abc}{abbc+abc+bc} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{cb}{cab+cb+b}$</p> <p>$= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{bc+b+1}$</p> <p>$= \frac{1+b+bc}{bc+b+1} = 1$ (đpcm)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

		0,5
	<p>2) Ta có $a + b + 2024c = c^3$</p> $a + b + c = c^3 - c - 2022c$ $a + b + c = c(c-1)(c+1) - 2022c$ <p>Ta có $c(c-1)(c+1) \div 6$; $2022c \div 6$ nên $(a+b+c) \div 6$</p> <p>Xét $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c) = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$</p> $= a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)$ <p>Ta có $a(a-1)(a+1) \div 6$; $b(b-1)(b+1) \div 6$; $c(c-1)(c+1) \div 6$</p> <p>Nên $(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)$ chia hết cho 6</p> <p>Mà $(a + b + c) \div 6$ (cm trên)</p> <p>Vậy $(a^3 + b^3 + c^3) \div 6$ (đpcm)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

		0,25
		0,25
	<p>3) $x^2 - xy - 2022x + 2023y - 2024 = 0$</p> <p>$x^2 - xy + x - 2023x + 2023y - 2023 - 1 = 0$</p> <p>$(x^2 - xy + x) - (2023x - 2023y + 2023) = 1$</p> <p>$x(x - y + 1) - 2023(x - y + 1) = 1$</p> <p>$(x - y + 1)(x - 2023) = 1$</p> <p>Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2024 \\ y = 2024 \end{cases}$</p>	0,5

	<p>Trường hợp 2: $\begin{cases} x - y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2022 \\ y = -2020 \end{cases}$</p> <p>Vậy cặp số (x, y) là (2024, 2024); (-2022, -2020)</p>	0,5
		0,5
		0,5
<p>Bài 4</p> <p>(6,0 đ)</p>	1)	



0,5

a) Chứng minh được MNPQ là hình vuông

2,0

b) S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi S_{AMQ} lớn nhất, mà $S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}$

0,5

$$\text{Ta có } AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$$

$$S_{AMQ} \text{ lớn nhất là } \frac{AB^2}{8}, \text{ đạt được khi } AM = MB$$

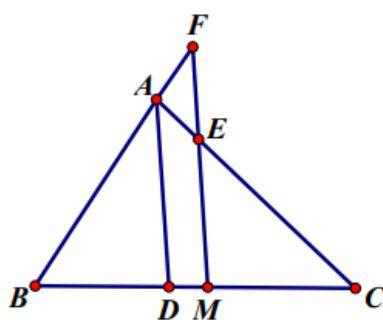
0,5

Vậy S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm

AB, BC, CD, DA.

0,5

2)



0,5

Gọi AD là phân giác của góc BAC

Ta có: $AD \parallel FM$ nên $\frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD}$ (1)

$ME \parallel AD$ nên $\frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}$ (2)

	<p>Do AD là phân giác nên ta có: $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD}$ (3)</p> <p>Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM}$, mà BM = CM nên BF = CE (đpcm)</p>	0,25
		0,25
		0,5

		0,5
<p>Bài 5</p> <p>(1,0 đ)</p>	<p>Ta có $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a + b) + 2023$ chia hết cho 5 nên ta được:</p> <p>$4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a + b) + 4.3 + 4.2020$ chia hết cho 5</p> <p>$4a^2 + 4b^2 + 4ab + 12(a + b) + 12$ chia hết cho 5</p> <p>$(2a + b + 3)^2 + 3(b + 1)^2$ chia hết cho 5</p> <p>Đặt $x = 2a + b + 3$, $y = b + 1$ thì ta được $x^2 + 3y^2 : 5$</p> <p>+ Nếu y^2 chia hết cho 5, khi đó x^2 cũng phải chia hết cho 5. Từ đó ta có:</p> $\begin{cases} (2a + b + 3)^2 : 5 \\ (b + 1)^2 : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a + b + 3) : 5 \\ (b + 1) : 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2a + b + 3) : 5 \\ 3(b + 1) : 5 \end{cases} \Rightarrow (2a - 2b) : 5$ <p>Suy ra $2(a - b) : 5$. Vậy số dư khi chia $a - b$ cho 5 là 0</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>

	<p>+ Nếu y^2 chia 5 dư 1, thì x^2 chia 5 phải dư 2. Vô lí</p> <p>+ Nếu y^2 chia 5 dư 4, thì x^2 chia 5 phải dư 3. Vô lí</p> <p>Kết luận: Vậy số dư khi chia $a - b$ cho 5 là 0</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	---	-------------------------

Lưu ý : Nếu học sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN

TOÁN 8 VÒNG II NĂM HỌC 2023 – 2024

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi 09 tháng 12 năm 2023

Đề thi có 01 trang

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề

Bài 1: (4,0 điểm).a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$.Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên n)**Bài 2: (4,0 điểm).**a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$

chia

hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.

b) Tìm phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho $(x-1)(x+2)$. Biết

rằng đa thức $P(x)$ chia cho $(x-1)$ dư 7 và chia cho $(x+2)$ dư 1.

Bài 3: (4,0 điểm).

a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2+3x-7) = |x^3-1|$

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$

Bài 4: (6,0 điểm).

1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.

Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác DFE cân.

b) K là trung điểm của CF.

2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho

H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP.

Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.

Bài 5: (2,0 điểm).

Cho các số thực a, b, c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Chứng minh: $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$

-----Hết-----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PGD&ĐT TP THANH HOÁ

TRƯỜNG THCS TRẦN MAI NINH

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU CHẤM

Biểu chấm gồm 02 trang

KHẢO SÁT CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN 8 - VÒNG II

NĂM HỌC 2023 – 2024

Bài	Nội dung cần đạt	Điểm
Bài 1 4,0đ	a) Phân tích đa thức: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz$ thành nhân tử.	2,0
	Ta có: $8x^3 + y^3 + z^3 - 6xyz = (2x + y)^3 - 6xy(2x + y) + z^3 - 6xyz$	0,75
	$= (2x + y + z)[(2x + y)^2 - z(2x + y) + z^2] - 6xy(2x + y + z)$	0,75
	$= (2x + y + z)(4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - yz)$	0,5
	b) Cho $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$. Chứng minh: $a^n + b^n = x^n + y^n$ (với mọi số tự nhiên n)	2,0
	<p>Do $a^2 + b^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow (a - x)(a + x) = (y - b)(y + b)$</p> <p>Mà $a + b = x + y$ nên $a - x = y - b$</p> <p>$\Rightarrow (y - b)(a + x) = (y - b)(y + b) \Rightarrow (y - b)(a + x) - (y - b)(y + b) = 0$</p> <p>$\Rightarrow (y - b)(a + x - b - y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x - b - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = y \\ a + x = b + y \end{cases}$</p> <p>Xảy ra 2 trường hợp:</p> <p>TH1: $b = y$ khi đó $a = x$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$</p>	0,5

	<p>TH 2: $a + x = b + y$ mà $a + b = x + y \Rightarrow a = y$ và $b = x$</p> <p>Khi đó $a^n + b^n = x^n + y^n$</p> <p>Vậy với $a + b = x + y$ và $a^2 + b^2 = x^2 + y^2$ thì $a^n + b^n = x^n + y^n$</p> <p>(với mọi số tự nhiên n).</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>Bài 2</p>	<p>a) Với a, b là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu $4a^2 + 3ab - 11b^2$ chia hết cho 5 thì $a^4 - b^4$ chia hết cho 5.</p>	<p>2,0</p>
<p>4.0đ</p>	<p>Ta có: $4a^2 + 3ab - 11b^2 \div 5$; $5a^2 + 5ab - 10b^2 \div 5$</p> <p>$(5a^2 + 5ab - 10b^2) - (4a^2 + 3ab - 11b^2) \div 5$</p> <p>$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \div 5 \Rightarrow (a + b)^2 \div 5$</p>	<p>0,5</p>

$$\begin{cases} P(x) = Q_1(x)(x-1)(x+2) + ax + b \\ P(x) = Q_2(x)(x-1) + 7 \\ P(x) = Q_3(x)(x+2) + 1 \end{cases}$$

Vì $P(1) = 7$ nên $a + b = 7$

Vì $P(-2) = 1$ nên $-2a + b = 1$

Từ đó ta được $\begin{cases} a + b = 7 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \end{cases}$

Vậy phần dư cần tìm là: $2x + 5$.

0,25

0,25

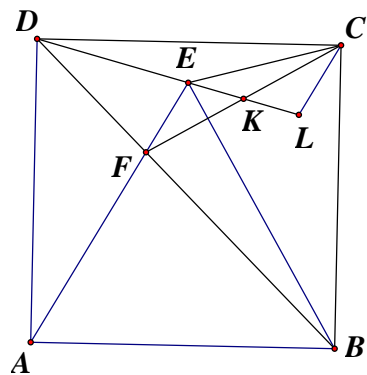
0,25

		0,25
	a) Tìm x biết: $(x-1)(x^2+3x-7)= x^3-1 $	2,0
	<p>Vì $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$; Do $x^2+x+1>0 \forall x$</p> <p>Nên ta xét 2 trường hợp</p> <p>TH1: Nếu $x \geq 1$ ta có</p> <p>$(x-1)(x^2+3x-7)=x^3-1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-7)=(x-1)(x^2+x+1)$</p> <p>$\Leftrightarrow (x-1)(2x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 2x-8=0 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{thỏa mãn}) \\ x=4(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$</p> <p>TH2: Nếu $x < 1$ ta có</p> <p>$(x-1)(x^2+3x-7)=-(x^3-1) \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-7)=-(x-1)(x^2+x+1)$</p> <p>$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2+4x-6)=0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2(x+3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x+3=0 \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{không thỏa mãn}) \\ x=-3(\text{thỏa mãn}) \end{cases}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,75</p>
Bài 3 4,0đ		

	Vậy $x \in \{1; -3; 4\}$	0,75
		0,25
	b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$ (1)	2,0
	Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$	

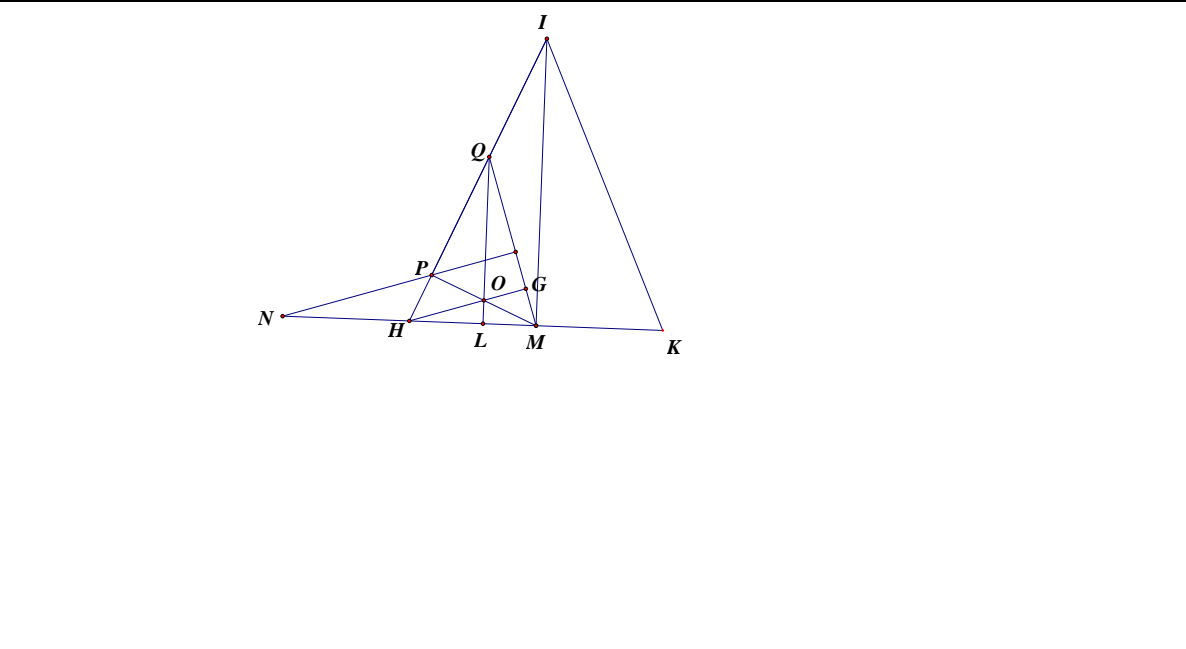
	<p>Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$</p> $x^4 + x^2 + 20 + 8x^2 = x^4 + 4x^2 + 5x^2 + 20 = (x^2 + 4)(x^2 + 5)$ $\Leftrightarrow x^2(x^2 + 1) < y(y + 1) \leq (x^2 + 4)(x^2 + 5)$ <p>Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau</p> <p>+ TH1: $y(y + 1) = (x^2 + 1)(x^2 + 2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$</p> $\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$ <p>Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$</p> $\Leftrightarrow y = 10 ; y = -11 \text{ (t.m)}$ <p>+ TH2. $y(y + 1) = (x^2 + 2)(x^2 + 3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$</p> $\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$ <p>+ TH3. $y(y + 1) = (x^2 + 3)(x^2 + 4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>
--	---	------------------------

	<p>+ TH4. $x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 9x^2 + 20 \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$</p> <p>Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5 ; y = 4$</p>	0,25
		0,25
		0,25
		0,25
<p>Bài 4.1</p> <p>4,0đ</p>	<p>1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ tam giác AEB đều nằm trong hình vuông.</p> <p>Đường thẳng AE cắt BD ở F, DE cắt FC ở K. Chứng minh rằng:</p> <p>a) Tam giác DFE cân.</p> <p>b) K là trung điểm của CF.</p>	4,0



Câu 1 4,0đ	<p>a) Ta có $\triangle ABE$ đều nên $AB = AE \Rightarrow \triangle ABE$ tại A $\Rightarrow DAE = 30^\circ$</p> <p>$\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BDA = 45^\circ$ và $DAF = 30^\circ \Rightarrow DFE = 75^\circ$</p> <p>c/m $\triangle ADE$ cân tại A</p> <p>Suy ra $\triangle DFE$ cân tại D.</p>	<p>0,5</p> <p>0,75</p> <p>0,75</p>
	<p>b) Vì $ADE = 75^\circ \Rightarrow CDE = 15^\circ$</p> <p>Từ $DEF = 75^\circ \Rightarrow LEF = 105^\circ$</p> <p>Từ C đường thẳng song song với AE cắt DK ở L.</p>	<p>0,5</p>

	<p>Ta có $DLC = FEL = 105^0 \Rightarrow DCL = 60^0$</p> <p>Suy ra: $\triangle ABE$ đều</p> <p>$EBA = 60^0; DBA = 45^0 \Rightarrow FBE = 15^0$</p> <p>$\Rightarrow FBE = LDC; DC = BE; FEB = LCD$</p> <p>$\triangle FEB = \triangle LCD(g.c.g) \Rightarrow CL = EF$</p> <p>Mà $CL // FE \Rightarrow CEFL$ là hình bình hành $\Rightarrow CK = KF$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>Bài 4.2</p> <p>2,0đ</p>	<p>2. Cho tam giác IHK cân ở I đường cao IM. Trên tia đối của HM vẽ N sao cho H là trung điểm của MN. Vẽ MP vuông góc với IH. Gọi Q là trung điểm của IP. Chứng minh rằng: NP vuông góc với QM.</p>	<p>2,0</p>



2. Gọi O là trung điểm của PM \Rightarrow OQ là đường trung bình của tam giác IMP

$$\Rightarrow \text{OQ} \parallel \text{IM}$$

=> Mà IM vuông góc với HK=> OQ vuông góc với HK

\Rightarrow Lại có MP vuông góc với HI \Rightarrow O là trực tâm của tam giác QHM

\Rightarrow HO vuông góc với QM.

Vì OH là đường trung bình của tam giác NMP nên $OH \parallel PN$

NP vuông góc với QM.

0,5

0,5

0,5

		0,5
	<p>Cho các số thực a,b,c dương thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng:</p> $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a+b+c$	
<p>Bài 5</p> <p>2,0đ</p>	<p>Đặt $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2}$</p> <p>Chứng minh được bất đẳng thức $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$</p> <p>Ta có: $E = \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} = \frac{4a^4}{2a^3+2a^2b^2} + \frac{4b^4}{2b^3+2b^2c^2} + \frac{4c^3}{2c^3+2c^2a^2}$</p> <p>Áp dụng $\frac{x^2}{y} + \frac{m^2}{n} \geq \frac{(x+m)^2}{y+n}$ ta có: $E \geq \frac{(2a^2+2b^2+2c^2)^2}{2a^3+2a^2b^2+2b^3+2b^2c^2+2c^3+2c^2a^2}$</p> <p>Vì $\frac{a^2+1}{2} \geq a$ nên $a^4+a^2 \geq 2a^3$; $\frac{b^2+1}{2} \geq b$ nên $b^4+b^2 \geq 2b^3$; $\frac{c^2+1}{2} \geq c$ nên $c^4+c^2 \geq 2c^3$</p>	0,25

	$E \geq \frac{(2a^2 + 2b^2 + 2c^2)^2}{2a^3 + 2a^2b^2 + 2b^3 + 2b^2c^2 + 2c^3 + 2c^2a^2} \geq \frac{36}{a^4 + a^2 + 2a^2b^2 + b^4 + b^2 + 2b^2c^2 + c^4 + c^2 + 2c^2a^2}$ $E \geq \frac{36}{(a^2 + b^2 + c^2)^2 + a^2 + b^2 + c^2} \Rightarrow E \geq \frac{36}{12}$ <p>Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$</p> <p>Mà $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a + b + c \leq 3 \Rightarrow \frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$</p> <p>Vậy $\frac{2a^2}{a+b^2} + \frac{2b^2}{b+c^2} + \frac{2c^2}{c+a^2} \geq a + b + c$</p> <p>Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	--	---

		0,25
		0,25

TRƯỜNG THCS MINH KHAI ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LẦN

Ngày 26 tháng 12 năm 2022

2

Môn Toán 8 – Năm học 2022 – 2023

Thời gian 120 phút

ĐỀ BÀI:

Bài 1 (4 điểm)

Cho biểu thức:

$$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{x^2 + x - 2} + \frac{x + 1}{1 - x} \right) \cdot \frac{x^2 - 22}{x^2 + 3x - 10} \quad (x \neq \pm 2; x \neq 1; x \neq -5)$$

1) Rút gọn A

2) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn: $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$

3) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên

Bài 2(4 điểm):

1) Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên n thì $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ chia

hết cho 30

2) Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2015, chia cho $x + 2$ dư 2022. Tìm dư

của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 3x - 10$.

Bài 3(4 điểm):

1) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Chứng minh tam giác đó đều

2) Cho x, y thỏa mãn: $y(x+y) \neq 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$

Bài 4 (6,0 điểm) Cho hình thoi ABCD có O là giao điểm của hai đường chéo vẽ

hình chữ nhật AOB'E. Đường thẳng OE cắt AB, CD lần lượt ở G, F. Đường

thẳng DE cắt AB, OA lần lượt ở H, I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và

OF. Chứng minh:

1) Tứ giác ADOE là hình bình hành

2) Ba điểm G, I, M thẳng hàng

3) Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy

4) $12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$

Bài 5 (2 điểm): Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Đáp án	Điểm
1	1) Rút gọn A	
(4đ)	ĐKXĐ: $x \neq \pm 2; x \neq 1; x \neq -5$	
		0,5đ

	$A = \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{x^2 + x - 2} + \frac{x + 1}{1 - x} \right) \cdot \frac{x^2 - 22}{x^2 + 3x - 10}$ $A = \left[\frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{(x - 1)(x + 2)} - \frac{x + 1}{x - 1} \right] \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \left[\frac{x}{(x + 2)} - \frac{x^2 - x^3 - 6}{(x - 1)(x + 2)} - \frac{x + 1}{x - 1} \right] \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \frac{x(x - 1) - (x^2 - x^3 - 6) - (x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \frac{x^2 - x - x^2 + x^3 + 6 - x^2 - 3x - 2}{(x - 1)(x + 2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x - 1)(x + 2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \frac{(x - 2)(x + 2)(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \cdot \frac{x^2 - 22}{(x - 2)(x + 5)}$ $A = \frac{x^2 - 22}{x + 5}$ <p>KL:</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
	<p>2) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn: $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$</p> <p>Ta có: $2x^3 + 40 - 8x - 10x^2 = 0$</p>	

$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 & (\text{tmdkxd}) \\ x=2 & (\text{ko tmdkxd}) \\ x=-2 & (\text{ko tmdkxd}) \end{cases}$ Thay $x = 5$ tìm ra $A = \frac{3}{10}$ và KL	<div>0,75đ</div> <div>0,25đ</div>
<p>3)Ta có:</p> $A = \frac{x^2 - 22}{x + 5} = \frac{x^2 - 25 + 3}{x + 5} = x - 5 + \frac{3}{x + 5}$ <p>Vì x nguyên $\Rightarrow (x - 5); (x + 5)$ nguyên</p> <p>Để A nhận giá trị nguyên $\Leftrightarrow \frac{3}{x+5}$ nguyên</p> $\Rightarrow 3 : (x + 5) \Rightarrow (x + 5) \in U(3) = \{\pm 1; \pm 3\}$ <p>Lập bảng:</p>	<div>0,5đ</div>

	$x + 5$	1	-1	3	-3	0,5đ
	x	- 4	- 6	- 2	- 8	
	Đối chiếu	t/m	t/m	Ko t/m	t/m	
	đk					
	Kl: Vậy để A nhận giá trị nguyên thì: $x \in \{-4;-6;-8\}$					
2	1)Chứng minh rằng: Với mọi số nguyên n thì $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$					1đ
(4đ)	chia hết cho 30					
	Ta có: $B = 5n^3 + 15n^2 + 10n$ $= 5n(n+1)(n+2)$					1đ
	Dựa vào dấu hiệu chia hết cm được B chia hết cho 30 và kết luận					
	2)Đa thức $f(x)$ chia cho $x - 5$ dư 2015, chia cho $x + 2$ dư 2022 . Tìm					

	<p>đư của phép chia đa thức $f(x)$ cho $x^2 - 3x - 10$.</p> <p>Gọi thương và dư trong phép chia lần lượt là $q(x)$ và $r(x) = ax + b$</p> $f(x) = (x^2 - 3x - 10) \cdot q(x) + ax + b$ $= (x - 5)(x + 2) \cdot q(x) + ax + b$ <p>Theo Bơ du:</p> $\begin{cases} f(5) = 2015 \\ f(-2) = 2022 \end{cases}$ <p>\Rightarrow Tìm ra $a = -1$ và $b = 2020$</p> <p>KL</p>	<p>0,5đ</p> <p>1đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>3</p> <p>(4đ)</p>	<p>1) Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác thỏa mãn</p> $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$ <p>Chứng minh tam giác đó đều</p>	

	<p>Ta có: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.</p> <p>$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$</p> <p>$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$</p> <p>$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$ (Vì a; b; là độ dài 3 cạnh của tam giác nên $a+b+c > 0$)</p> <p>$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$</p> <p>Giải thích $\Rightarrow a=b=c$</p> <p>KL:</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p> <p>0,5đ</p>
	<p>2) Cho x; y thỏa mãn: $y(x+y) \neq 0$ và $x^2 - xy = 2y^2$. Tính $A = \frac{3x-y}{x+y}$</p> <p>Ta có: $x^2 - xy = 2y^2$</p> <p>$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y)=0$</p>	

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y & (\text{ko tmdk}) \\ x=2y & (\text{tmdk}) \end{cases}$ <p>Thay $x = 2y$ vào A ta được: $A = \frac{5}{3}$</p>	<p>1đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>4</p> <p>(6đ)</p>	<p>Vẽ hình đúng đến ý nào chấm đến đó</p>	
	<p>a) Tứ giác ADOE là hình bình hành</p> <p>Ta có $AE \parallel OB$ và $AE = OB$ (vì AOBE là hình chữ nhật)</p>	<p>1đ</p>

	<p>Nên $AE \parallel OD$ và $AE = OD$ (vì $OB = OD$)</p> <p>Do đó tứ giác $ADOE$ là hình bình hành.</p>	
	<p>b) Ba điểm G, I, M thẳng hàng</p> <p>Ta có G là trung điểm của AB (vì $AOBE$ là hình chữ nhật)</p> <p>I là trung điểm của AO (vì $ADOE$ là hình bình hành)</p> <p>M là trung điểm của AD</p> <p>Nên IM, IG lần lượt là đường trung bình của tam giác AOB ,</p> <p>AOD</p> <p>$\Rightarrow IG \parallel OB$ và $IM \parallel OD$</p> <p>$\Rightarrow G, I, M$ thẳng hàng</p>	2đ
	<p>c) Ba đường thẳng AC, CD, MN đồng quy</p>	2đ

	<p>Ta có O,M,F lần lượt là trung điểm của AC,AD,CD</p> <p>Nên OM,MF lần lượt là đường trung bình của tam giác ACD</p> <p>$\Rightarrow OM \parallel CD$ và $MF \parallel AC$ hay $OM \parallel CF$ và $MF \parallel OC$</p> <p>Do đó tứ giác OCFM là hình bình hành</p> <p>Mà N là trung điểm của OF</p> <p>$\Rightarrow N$ là trung điểm của MC</p> <p>Vậy ba đường thẳng AC,CD,MN đồng quy.</p>	
	<p>d) 12.EH.ED = $4BD^2 + AC^2$</p> <p>$\triangle AOE$ có AG,EI là hai đường trung tuyến cắt nhau tại H nên H là trọng tâm của $\triangle AOE$</p> <p>$\Rightarrow EH = \frac{2}{3}EI \Rightarrow EH.ED = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}ED.ED = \frac{1}{3}ED^2$</p>	1đ

	$\Rightarrow EH.ED = \frac{1}{3}(BD^2 + EB^2) \Rightarrow EH.EB = \frac{1}{3}\left(BD^2 + \frac{1}{4}AC^2\right)$ $\Rightarrow 12.EH.ED = 4BD^2 + AC^2$	
5 (2đ)	<p>2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau: $A = \frac{27-12x}{x^2+9}$</p> $A - 4 = \frac{27-12x}{x^2+9} - 4$ <p>Xét hiệu: $= \dots\dots\dots$</p> $= \frac{-(2x+3)^2}{x^2+9}$ <p>Giải thích suy ra $A \leq 4$</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = -\frac{3}{2}$</p> <p>KL</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p>

Chú ý: Học sinh có cách giải khác đúng vẫn cho điểm

UBND THÀNH PHỐ HỘI AN

KÌ THI CHỌN HSG CẤP THÀNH PHỐ

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN: Toán. LỚP 8

Thời gian làm: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Gồm có 01 trang

Câu 1 (4,0 điểm): Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a) $x^7 + x^5 + 1$

b) $a^3(c - b^2) + b^3(a - c^2) + c^3(b - a^2) + abc(abc -$

1)

Câu 2 (4,0 điểm):

a) Cho $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P = (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2$$

b) Tính tổng các hệ số của đa thức: $A(x) = (x^2 - x + 3)^{2018} + (x^2 - x + 1)^{2019}$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$B = 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 6x - 8y - 2z + 13$$

Câu 3 (4,0 điểm): Giải các phương trình sau:

a) $(x + 3)(x+4)(x + 5)(x + 6) = 120$

b) $\frac{x+2052}{30} + \frac{x+2014}{4} + \frac{x+47}{1975} = \frac{x+4}{2018} + \frac{x+3}{2019}$

Câu 4 (6,0 điểm) :

Cho hình chữ nhật ABCD, điểm P thuộc đường chéo BD (P khác B và D). Gọi M

là điểm đối xứng của C qua P.

a) Chứng minh $AM \parallel BD$.

HUYỆN HẢI HẬU

Năm học 2023 – 2024

Môn: TOÁN 8

<input type="checkbox"/> CHÍNH THỨC
--

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của M trên AD và AB. Chứng minh ba điểm E, F, P thẳng hàng.

c) Chứng minh tỉ số độ dài hai đoạn thẳng MF và FA không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

Câu 5 (2,0 điểm) :

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $1 + x + x^2 + x^3 = y^3$

b) Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c}$

-----Hết-----

Bài 1. (6,0 điểm).

1) Cho $x > \sqrt{3}$ thỏa mãn: $x + \frac{3}{x} = 5$. Tính giá trị các biểu thức

$$A = x^2 + \frac{9}{x^2}; B = x^3 + \frac{27}{x^3}; C = x - \frac{3}{x}$$

2) a. Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$.

$$\text{Chứng minh rằng } a^5 + b^5 + c^5 = \frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

b. Tìm số thực x thỏa mãn $(3x - 2)^5 + (5 - x)^5 + (-2x - 3)^5 = 0$

Bài 2. (3,5 điểm).

1) Cho hai số thực phân biệt x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = 8 - 6xy$. Tính $x + y$.

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $2x^2 - 8x = 13 - 3y^2$

Bài 3. (1,5 điểm). Xác định số tự nhiên n sao cho $n + 1$, $4n^2 + 8n + 5$ và $6n^2 + 12n + 7$ đồng

thời là số nguyên tố

Bài 4. (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , M là điểm tùy ý trên đường chéo BD . Kẻ

$$ME \perp AB, MF \perp AD$$

a. Chứng minh ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy

b. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất

2) Cho bốn điểm A, B, E, H thẳng hàng theo thứ tự đó, $AB = 2cm, EH = 3cm$. Vẽ về

một phía của AH các hình vuông $ABCD, BEFG, EHIK$ thì D, G, K thẳng hàng. Tính

diện tích hình vuông $BEFG$.

Bài 5. (2,0 điểm).

1) Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = ab + 2bc + 3ca$$

2) Trong một tam giác đều cạnh 1, ta đặt 17 điểm. Chứng minh rằng, tồn tại hai

điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$

----- Hết -----

Họ và tên thí

Số báo

sinh:.....

danh:.....

Giám thị số

Giám thị số

1:.....

2:.....

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM

HUYỆN HẢI HẬU

ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI

Năm học 2023 – 2024

Môn: TOÁN 8

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Chú ý: Cách giải nêu trong đáp án chỉ là một phương án, các cách giải khác đúng, phù hợp với chương trình thi

cho điểm tương đương. Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1	Ta có:	
1)	$x + \frac{3}{x} = 5 \Rightarrow x^2 + \frac{9}{x^2} + 6 = 25 \Rightarrow A = 19$	0,5đ

	$B = x^3 + \frac{27}{x^3} = \left(x + \frac{3}{x}\right)\left(x^2 + \frac{9}{x^2} - 3\right) = 5(19 - 3) = 80$ $C = x - \frac{3}{x} \Rightarrow C^2 = x^2 + \frac{9}{x^2} - 6 = 19 - 6 = 13 \Rightarrow C = \pm\sqrt{13}$ <p>Mà $x > \sqrt{3} \Rightarrow C = \sqrt{13}$</p> <p>Kết luận:...</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
2)	<p>a)</p> $a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow (a + b)^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) + b^5 = -c^5$ $\Leftrightarrow a^5 + b^5 + c^5 = -5ab[(a^3 + b^3) + 2ab(a + b)]$ $= -5ab(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 2ab)$ $= -5ab(-c)(a^2 + ab + b^2)$ $= 5abc \cdot \frac{2(a^2 + ab + b^2)}{2}$	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

	$= \frac{5}{2}abc \left[(a+b)^2 + a^2 + b^2 \right]$ $= \frac{5}{2}abc(a^2 + b^2 + c^2) (dpcm)$	
	$b)(3x-2)^5 + (5-x)^5 + (-2x-3)^5 = 0$ <p>Áp dụng kết quả câu a, ta có:</p> $\frac{5}{2}(3x-2) \cdot (5-x)(-2x-3) \left[(3x-2)^2 + (5-x)^2 + (-2x-3)^2 \right] = 0$ <p>Vì $\left[(3x-2)^2 + (5-x)^2 + (-2x-3)^2 \right] > 0$</p> <p>Tìm được $x = \frac{2}{3}; x = 5; x = -\frac{3}{2}$.</p> <p>Kết luận</p>	0,5đ
		0,5đ
		0,5đ

		0,5đ
		0,5đ
<p>Bài 2</p> <p>1)</p>	$x^3 + y^3 = 8 - 6xy$ $\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 8 + 6xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 - 2^3 - 3x^2y - 3xy^2 + 6xy = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 2) \left[(x + y)^2 + (x + y)2 + 4 \right] - 3xy(x + y - 2) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 + y^2 + 2x + 2y - xy + 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2(x^2 + y^2 + 2x + 2y - xy + 4) = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 + (x - y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -4 \end{cases}$ <p>Vậy $x + y = 2$ hoặc $x + y = -4$</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

		0,75đ 0,25đ
2)	$2x^2 - 8x = 13 - 3y^2$ $\Leftrightarrow 2(x-2)^2 = 3(7-y^2)$ <p>Vì $2(x-2)^2 : 2 \Rightarrow 3(7-y^2) : 2 \Rightarrow 7-y^2 : 2 \Rightarrow y^2$ lẻ</p> <p>Lại có $7-y^2 \geq 0$ nên chỉ có thể $y^2 = 1$</p> <p>Khi đó ta có: $2(x-2)^2 = 3.6 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow x = 5; x = -1$</p> <p>Từ đó tìm được các số nguyên $(x, y) \in \{(5; 1), (5; -1), (-1; 1), (-1; -1)\}$</p>	0,5đ 0,5đ 0,5đ
Bài 3	<p>+ $n = 0$: không thỏa mãn</p> <p>+ $n \neq 0$: Đặt $n+1 = p(p > 1)$ thì</p> $4n^2 + 8n + 5 = 4(n+1)^2 + 1 = 4p^2 + 1 = 5p^2 - (p-1)(p+1)$	

	$6n^2 + 12n + 7 = 6(n+1)^2 + 1 = 6p^2 + 1 = 5p^2 + 5(p-2)(p+2)$ <p>Nếu p chia cho 5 dư 1 hoặc 4 thì $(p-1)(p+1):5$ suy ra $4n^2 + 8n + 5:5$</p> <p>mà</p> $4n^2 + 8n + 5 > 5 \forall n \in N^*$ <p>nên $4n^2 + 8n + 5$ không phải là số nguyên tố</p> <p>Nếu p chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì $(p-2)(p+2):5$ suy ra $6n^2 + 12n + 7:5$</p> <p>mà</p> $6n^2 + 12n + 7 > 5 \forall n \in N^*$ <p>nên $6n^2 + 12n + 7$ không phải là số nguyên tố</p> <p>Vậy $p:5$, để p là số nguyên tố thì $p = 5$, do đó $n = 4$</p> <p>Thử lại $n = 4$ ta có: $n+1 = 5$, $4n^2 + 8n + 5 = 105$ và $6n^2 + 12n + 7 = 151$ đều</p> <p>là số nguyên tố. Vậy $n = 4$</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p>
Bài 4	a)	
1)	<p>Chứng minh: $\triangle DAE = \triangle CDF (2cgv) \Rightarrow \text{góc } FCD = \text{góc } EDA$</p>	

Từ đó cm được: $CF \perp DE$

0,5đ

Chứng minh tương tự: $CE \perp BF$

0,5đ

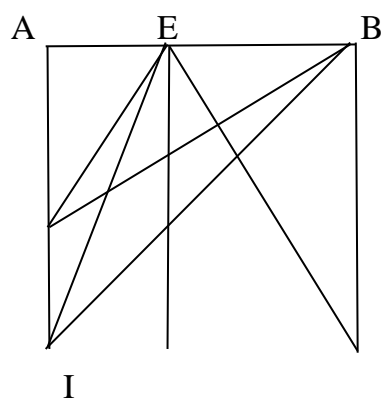
Gọi N là giao điểm của EM và CD , I là giao điểm của CM và EF

Chứng minh $\triangle CMN = \triangle EFM \Rightarrow \text{góc } CMN = \text{góc } EFM$

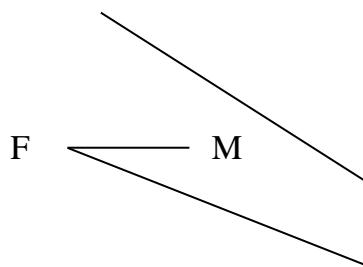
$\triangle CMN$ vuông tại $N \Rightarrow \text{góc } CMN + \text{góc } MCN = 90^\circ$


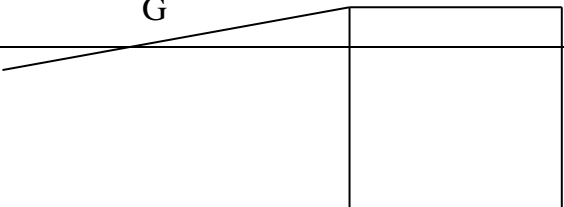
Mà $\text{góc } MCN = \text{góc } IMF$ (đồng vị)

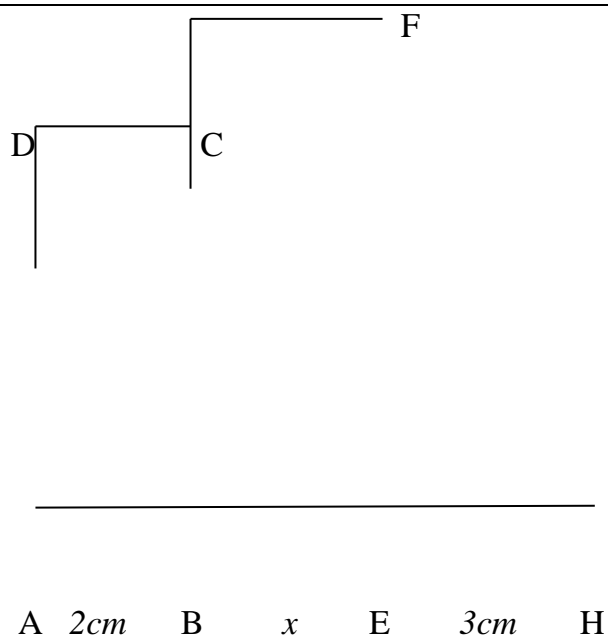
Suy ra $\text{góc } IMF + \text{góc } IFM = 90^\circ \Rightarrow CI \perp EF$



1đ



	<div style="text-align: center;">  D N C </div> <p>Xét tam giác CEF có: $CI \perp EF, ED \perp CF, CE \perp BF$ (cmt)</p> <p>Suy ra ba đường thẳng DE, BF, CM đồng quy (đpcm)</p> <p>b) Đặt $AF = x$, ta có $S_{AEMF} = (a-x)x = -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}$</p> <p>Diện tích tứ giác $AEMF$ lớn nhất khi $x = \frac{a}{2}$, tức là F là trung điểm của AD</p> <p>Suy ra M là trung điểm của BD</p>	<p>0,5đ</p> <p>1đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
2)	<div style="text-align: center;">  G K I </div>	



Đặt $BE = x$

Ta có: $S_{ABGD} + S_{BEKG} = S_{AEKD}$,

Theo CT tính diện tích hình thang ta có: $\frac{(2+x)^2}{2} + \frac{(x+3)x}{2} = \frac{(2+3)(2+x)}{2}$

Từ đó ta có $x^2 = 6$

Vậy diện tích hình vuông $BEFG$ là 6

0,5đ

1đ

1đ

<p>Bài 5</p> <p>1)</p>	<p>$P = ab + 2bc + 3ca = \dots = a(b + c) + 2c(a + b)$</p> <p>Mà $a + b + c = 6 \Rightarrow b + c = 6 - a, a + b = 6 - c$</p> <p>Từ đó ta có $P = a(6 - a) + 2c(6 - c) = -(a^2 - 6a + 9) - 2(c^2 - 6c + 9) + 27$</p> <p>$= -(a - 3)^2 - 2(c - 3)^2 + 27 \leq 27$</p> <p>Lí luận chỉ ra $P_{\max} = 27$ khi $a = c = 3, b = 0$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
<p>2)</p>	<p>Ta chia tam giác đều đã cho thành 16 tam giác đều cạnh là $\frac{1}{4}$</p> <p>Khi đó 2 điểm bất kì thuộc cùng một tam giác có khoảng cách nhỏ hơn $\frac{1}{4}$</p> <p>Đặt 17 điểm trong tam giác đều đã cho, theo nguyên lí Dirichlet tồn tại ít nhất 2 điểm nằm trong cùng một tam giác nhỏ đã chia.</p> <p>Hai điểm này có khoảng cách nhỏ hơn $\frac{1}{4}$ (đpcm)</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>

		0,5đ
--	--	------

UBND HUYỆN THỌ XUÂN ĐỀ GIAO LƯU, THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG

TRƯỜNG THCS

LẦN 1, NĂM HỌC 2023-2024

THỊ TRẦN LAM SƠN

Môn: TOÁN – Lớp 8

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian phát đề.

(Đề thi gồm có 02 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM: (4,0 điểm) (Viết đáp án vào tờ giấy thi)

Câu 1: Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 9$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (2a + 2b - c)^2 + (2b + 2c - a)^2 + (2c + 2a - b)^2$ là?

Câu 2: Cho các số a, b, c thỏa mãn $\frac{5}{a-15} = \frac{10}{b-30} = \frac{7}{c-21}$ và $abc = 700$. Khi đó $a + b - c$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho đa thức $f(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$. Hãy tìm dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $h(x) = x^2 - 1$?

Câu 4: Giá trị của x thỏa mãn $\frac{26}{3}x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$ là?

Câu 5: Xác định đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, biết rằng $f(x)$ chia hết cho $x + 2$ và khi đem chia cho $x^2 - 1$ thì dư $x + 5$?

Câu 6: Cho tam giác ABC cân tại A, tia phân giác của góc ABC cắt AC tại D. Cho biết $BC = 10\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$. Độ dài đoạn thẳng DC là?

Câu 7: Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích của các tam giác ABO, BCO, CDO, ADO. Biết $S_1 \cdot S_3 = 31$ thì $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot S_4$ bằng bao nhiêu?

Câu 8: Hai bạn Nam và Hà gieo đồng thời hai con xúc xắc. Ở mỗi lần gieo tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc được ghi lại như sau:

Tổng	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
g	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ	chấ
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
Số	6	9	12	18	10	5	8	7	13	2	10
lần											

Xác suất của biến cố: “Tổng số chấm xuất hiện là số nguyên tố” là?

II. PHẦN TỰ LUẬN: (16,0 điểm)

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 19x + 30$

b) Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.

Chứng minh: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Tìm x thỏa mãn: $(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18$

b) Tìm hai số $x; y$ thỏa mãn các đẳng thức sau: $x^3 + y^3 - xy = 1 - x + y$ và $7(xy - 1) = x - y$

Câu 3: (3,0 điểm)

a) Tìm cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^3 - y^3 - 2y^2 - 3y - 1 = 0$

b) Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a$ ($a \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh

rằng a chia hết cho 6.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) gọi AD là tia phân giác của góc BAC . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của D trên AB và AC ; E là giao điểm của BN và DM , F là giao điểm của CM và DN .

a) Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông và $EF \parallel BC$.

b) Gọi H là giao điểm của BN và CM . Chứng minh $AN^2 = AB.FN$

c) Gọi P là điểm trên AN , Q là điểm trên AM sao cho $AP = MQ$. Tìm vị trí của P và Q để diện tích

tứ giác $MQPN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho các số dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+3z} + \frac{1}{z+3x} \geq \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{y+2z+x} + \frac{1}{z+2x+y}$$

..... Hết

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

TRƯỜNG TRUNG HỌC CƠ SỞ

HƯỚNG DẪN CHẤM GIAO LƯU HSG LỚP 8 - LẦN 1

THỊ TRẦN LAM SƠN

Năm học 2023 - 2024

Môn: Toán

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (4 điểm). Mỗi câu đúng cho 0,5 điểm.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Kết quả	81	16	5x	$\frac{-1}{2}$	$f(x) = x^3 + x^2 + 4$	6cm	961	$\frac{2}{5}$

II. PHẦN TỰ LUẬN (16 điểm).

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
-----	---	----------	------

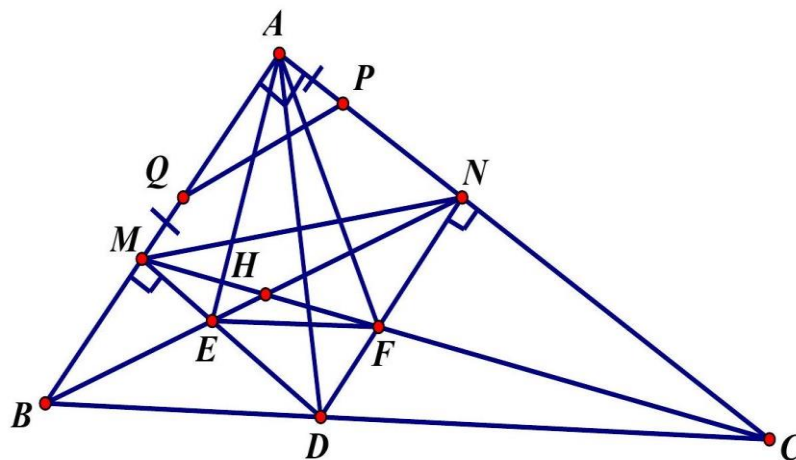
1	2,0	a	$x^3 - 19x + 30 = x^3 - 4x - 15x - 30$	0,25
			$= x(x^2 - 4) - (15x - 30)$	
1	1,0	a	$= x(x - 2)(x + 2) - 15(x - 2)$	0,25
			$= (x - 2)(x^2 - 2x - 15)$	
			$= (x - 2)(x^2 + 3x - 5x - 15x)$	0,25
			$= (x - 2)(x + 3)(x - 5)$	0,25
1	2,0	b	Đặt $x = by + cz$ (1); $y = ax + cz$ (2); $z = ax + by$ (3)	
			Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: $x + y = ax + by + 2cx = z + 2cz$	0,25
1	1,0	b	Suy ra: $2cz = x + y - z \Rightarrow c = \frac{x+y-z}{2z} \Rightarrow 1 + c = \frac{x+y+z}{2z}$	
			$\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$	0,25
1	1,0	b	Tương tự: $1 + a = \frac{x+y+z}{2x} \Rightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$	
			$1 + b = \frac{x+y+z}{2y} \Rightarrow \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$	

		Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$	0,25
			0,25
2		$(2x + 1)(x + 1)^2(2x + 3) = 18$	
4,0		$\Leftrightarrow (2x + 1)(2x + 2)^2(2x + 3) = 72$	0,25
		Đặt $2x + 2 = y$, ta có: $(y - 1)y^2(y + 1) = 72$	
	a	$\Leftrightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0$	0,5
	2,0	$\Leftrightarrow (y^2 - 9)(y^2 + 8) = 0$	
		Giải ra tìm được $y = 3$ hoặc $y = -3$	0,5
		tìm được $x = 0,5$ hoặc $x = -2,5$	0,5
		Kết luận...	0,25

		<p>Ta có: $x^3 + y^3 - xy = 1 - x + y$ (1) và $7(xy - 1) = x - y$ (2)</p> <p>(2) $\Rightarrow y - x = 7 - 7xy$ thay vào (1) ta được $x^3 + y^3 = 8 - 6xy$</p> $\Leftrightarrow x^3 + y^3 + 6xy - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^3 - 8 + 6xy - 3xy(x + y) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 2) \left[(x + y)^2 + 2(x + y) + 4 \right] - 3xy(x + y - 2) = 0$ $\Leftrightarrow (x + y - 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0 \end{cases}$	
	b		
	2,0	<p>Nếu $x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$ thay vào (2), ta được $7x(2 - x) + 2 - 2x = 7$</p> $\Leftrightarrow 7x^2 - 12x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{5}{7} \Rightarrow y = \frac{9}{7} \end{cases}$ <p>Nếu $x^2 + y^2 + 4 - xy + 2x + 2y = 0$</p> $\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = -2 \text{ (không thỏa mãn (2))}.$ <p>Vậy các số $x; y$ thỏa mãn bài toán là: $x = y = 1$ hoặc $x = \frac{5}{7}, y = \frac{9}{7}$.</p>	0,5
			0,5

			0,5
3 3,0		Ta có: $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - y^2 \leq (y+1)^3$	0,25
		Mặt khác: $x^3 = y^3 + 2y^2 + 3y + 1 = (y^3 - 3y^2 + 3y - 1) + 5y^2 + 2 > (y-1)^3$	0,25
		Khi đó: $(y-1)^3 < x^3 \leq (y+1)^3$	
	a	TH1: $x^3 = y^3 \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = -\frac{1}{2}(l) \end{cases} \Rightarrow x = -1$	0,25
	1,5	TH2: $x^3 = (y+1)^3 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow x = 1$	0,25
		Trả lời	0,25
			0,25
	b	Ta có: $m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$	

	1,5	Suy ra $n = t + a; m = n + a = t + 2a$	0,25
		Do đó ta có $t; t + a; t + 2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3	
		Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t + a; t + 2a$ đã cho khi chia cho 3, số	0,25
		dư nhận được có thể là 1 hoặc 2.	
		Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của	0,25
		chúng chia hết cho 3.	
		Mặt khác $(t + a) - t = a; (t + 2a) - t = 2a; (t + 2a) - (t + a) = a$.	
4		Suy ra a hoặc $2a$ chia hết cho 3. Mà $(2, 3) = 1$ nên $a : 3$ (1)	0,25
		Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ	
		$\Rightarrow m - n$ là số chẵn nên $a : 2$ (2)	
6,0		Từ (1) và (2) kết hợp với $(2, 3) = 1$ ta có $a : 6$.	0,25



a * Chứng minh tứ giác $AMDN$ là hình vuông

2,0 +) Xét tứ giác $AMDN$ có: $AMD = 90^\circ$; $AND = 90^\circ$; $MAN = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AMDN$ là hình chữ nhật

+) Hình chữ nhật $AMDN$ có AD là phân giác của MAN nên tứ giác

0,25

0,25

	<p>$AMDN$ là hình vuông.</p> <p>* Chứng minh $EF \parallel BC$.</p> <p>+) Vì $ND \parallel AB$ hay $DF \parallel MB$ áp dụng định lí Tha-les ta có: $\frac{FM}{FC} = \frac{DB}{DC}$ (1)</p> <p>Vì $MD \parallel AC$ áp dụng định lí Tha-les ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{MB}{MA}$ (2)</p> <p>Tứ giác $AMDN$ là hình vuông nên $AM = DN \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DN}$ (3)</p> <p>Tam giác DNE với $DN \parallel MB$ ta có: $\frac{MB}{DN} = \frac{EM}{ED}$ (4) (bài toán phụ)</p> <p>Từ (1),(2),(3),(4) suy ra $\frac{EM}{ED} = \frac{FM}{FC} \Rightarrow EF \parallel DC$ hay $EF \parallel BC$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p>
--	---	--

	<p>b</p> <p>2,0</p>	<p>Vì $AMDN$ là hình vuông nên $AN = DN$ suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{DN}{AB}$ (5)</p> <p>Vì $DN \parallel AB$ áp dụng bài toán phụ ta có $\frac{DN}{AB} = \frac{CN}{CA}$ (6) và $\frac{CN}{CA} = \frac{FN}{AM}$ (7)</p> <p>Mà $AMDN$ là hình vuông nên $AM = AN$ suy ra $\frac{FN}{AM} = \frac{FN}{AN}$ (8)</p> <p>Từ (5), (6), (7), (8) suy ra $\frac{AN}{AB} = \frac{FN}{AN} \Rightarrow AN^2 = AB \cdot FN$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>c</p> <p>2,0</p>	<p>Vì $AN = AM; PN = AQ \Rightarrow AP = MQ$.</p> <p>Ta có :</p> $ \begin{aligned} S_{APQ} &= \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} QM \cdot AQ = \frac{1}{2} AQ (AM - AQ) = -\frac{1}{2} (AQ^2 - AQ \cdot AM) \\ &= -\frac{1}{2} \left(AQ^2 - 2AQ \cdot \frac{AM}{2} + \frac{AM^2}{4} \right) + \frac{AM^2}{8} \\ &= -\frac{1}{2} \left(AQ - \frac{AM}{2} \right)^2 + \frac{AM^2}{8} \leq \frac{AM^2}{8} \end{aligned} $	<p>0,25</p> <p>0,5</p>

		<p>Suy ra : $S_{PQMN} = S_{AMN} - S_{APQ} \geq \frac{1}{2}AM^2 - \frac{1}{8}AM^2 = \frac{3}{8}AM^2$</p> <p>đấu "=" xảy ra khi $AQ = \frac{AM}{2}$.</p> <p>Vậy diện tích tứ giác $PQMN$ có giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{8}AM^2$ khi Q là trung điểm của AM; P là trung điểm của AN</p>	0,5
			0,5
			0,25
5	1,0	<p>Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ với hai số dương a, b ta có:</p> $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+2z+x} \geq \frac{4}{2x+4y+2z} \Rightarrow \frac{1}{x+3y} + \frac{1}{y+2z+x} \geq \frac{2}{x+2y+z}$ <p>Tương tự, ta có: $\frac{1}{y+3z} + \frac{1}{z+2x+y} \geq \frac{2}{y+2z+x}$;</p>	0,25

		$\frac{1}{z+3x} + \frac{1}{x+2y+z} \geq \frac{2}{z+2x+y}$	
		<p>Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.</p> <p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.</p>	0,25
			0,25
			0,25

Chú ý:

1. Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.
2. Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình hoặc vẽ sai hình cơ bản thì không chấm điểm bài hình.
3. Điểm chấm chi tiết đến 0,25 đ.

UBND QUẢNG XƯƠNG

GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN

TRƯỜNG THCS NGỌC

Năm học 2023 - 2024

Môn: Toán 8

Thời gian: **150** phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày ... tháng 01 năm 2024

(Đề có 01 trang, gồm 05 câu)

Câu 1(4,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} + \frac{3x^2+3}{9-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{1}{2} \right)$ với $x \neq \pm 3, x \neq -1$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn $x^3 - 3x - 2 = 0$ **Câu 2**(4,0 điểm).1. Tìm x, biết : $(x+5)^4 + (x-4)^4 = (2x+1)^4$

2. Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: “Mặt sấp xuất hiện hai lần”

b) B: “Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần”

Câu 3(4,0 điểm).

1. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn:

$$2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0.$$

2. Tìm các số a, b, c sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx + c$ chia hết cho $x + 2$ và khi chia cho $x^2 - 1$ thì dư $x + 5$

Câu 4(6,0 điểm).

1. Cho hình chữ nhật ABCD, gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên đường chéo AC. Gọi M, N, K theo thứ tự là trung điểm của AH, AB, CD.

a) Gọi I là trung điểm của CN, chứng minh rằng I là trung điểm của BK.

b) Tính số đo góc BMK.

2. Cho tam giác MNP có góc M bằng 120^0 . Đường phân giác của góc M cắt cạnh

NP ở D.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}$

Câu 5(2,0 điểm). Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2 + y^2}$

UBND HUYỆN QUẢNG XƯƠNG

HƯỚNG DẪN CHẤM

TRƯỜNG THCS QUẢNG NGỌC

GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút

Hướng dẫn chấm có 05 trang, gồm 05 câu

Câu	Nội dung	Điểm
	<p>1. (2điểm)</p> $A = \left(\frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} + \frac{3x^2+3}{9-x^2} \right) : \left(\frac{x-1}{x-3} - \frac{1}{2} \right)$ $= \left[\frac{2x}{x+3} + \frac{x}{x-3} - \frac{3x^2+3}{(x-3)(x+3)} \right] : \frac{2(x-1)-(x-3)}{2(x-3)}$ $= \frac{2x(x-3)+x(x+3)-(3x^2+3)}{(x-3)(x+3)} : \frac{2x-2-x+3}{2(x-3)}$ $= \frac{2x^2-6x+x^2+3x-3x^2-3}{(x-3)(x+3)} : \frac{x+1}{2(x-3)}$	0,5 đ

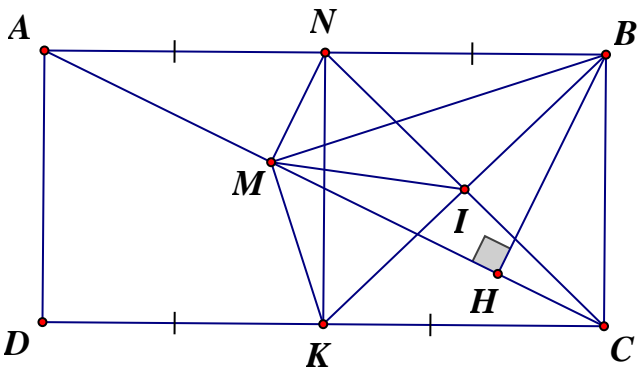
Câu 1 (4,0điểm)	$\frac{-3x-3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{2(x-3)}{x+1} = \frac{-3(x+1)}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{2(x-3)}{x+1} = \frac{-6}{x+3}$	0,5 đ
	Vậy $P = \frac{-6}{x+3}$	0,25 đ
	0,75đ	
	<p>2) (2 điểm) ĐKXĐ: $x \neq \pm 3, x \neq -1$</p> <p>Ta có: $x^3 - 3x - 2 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x^3 - 8 - 3x + 6 = 0$</p> <p>$(x-2)(x^2 + 2x + 4) - 3(x-2) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 4 - 3) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ (x+1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ (Thỏa mãn ĐKXĐ)} \\ x=-1 \text{ (Không thỏa mãn ĐKXĐ)} \end{cases}$</p> <p>Thay $x=2$ vào biểu thức A, ta được: $A = \frac{-6}{2+3} = \frac{-6}{5}$</p>	1,0đ

	<p>Vậy $A = \frac{-6}{5}$ tại $x = 2$</p>	0,5đ
		0,25đ
		0,25đ
	<p>1.(2điểm). Tìm x, biết:</p> $(x + 5)^4 + (x - 4)^4 = (2x + 1)^4 \quad (1)$ <p>Đặt $x + 5 = y$, $x - 4 = z$ thì $2x + 1 = y + z$</p> <p>Phương trình (1) có dạng:</p> $y^4 + z^4 = (y + z)^4$ $\Leftrightarrow y^4 + z^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

<p>Câu 2 (4,0điểm)</p>	$\Leftrightarrow 2yz(2y^2 + 3yz + 2z^2) = 0$ <p>Thay $y = x + 5$, $z = x - 4$, ta được:</p> $2(x + 5)(x - 4)(7x^2 + 7x + 22) = 0$ $\Leftrightarrow (x + 5)(x - 4) = 0 \text{ (do } 7x^2 + 7x + 22 = 7(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{81}{4} > 0 \forall x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 4 \end{cases}$ <p>Vậy $x = -5$; $x = 4$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p>
	<p>2) (2 điểm).</p> <p>Kí hiệu: Khi gieo đồng xu được mặt sấp là: S; được mặt ngửa là: N</p> <p>Vì đồng xu là đồng chất, cân đối và việc gieo là ngẫu nhiên nên ta có bốn biến cố đồng khả năng là:</p>	<p>0,25đ</p>

	<p>SS, SN, NS, NN</p> <p>Từ kết quả trên ta thấy:</p> <p>Biến cố A xuất hiện 1 lần nên $P(A) = \frac{1}{4} = 25\%$</p> <p>Biến cố B xuất hiện 3 lần nên $P(B) = \frac{3}{4} = 75\%$</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
<p>Câu 3</p> <p>(4,0điểm)</p>	<p>1) (2 điểm)</p> $2x^2 + y^2 + 3xy + 3x + 2y + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (2x^2 + xy + x) + (2xy + y^2 + y) + (2x + y + 1) = -1$ $\Leftrightarrow x(2x + y + 1) + y(2x + y + 1) + (2x + y + 1) = -1$ $\Leftrightarrow (2x + y + 1)(x + y + 1) = -1$ <p>*) $\begin{cases} 2x + y + 1 = 1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$</p> <p>*) $\begin{cases} 2x + y + 1 = -1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$</p>	<p>0,75đ</p> <p>0,5đ</p>

	<p>Vậy: $(x; y) = \{(2; -4); ((-2; 2))\}$</p>	0,5đ
	<p>2) (2 điểm)</p> <p>Gọi $Q_1(x)$ và $Q_2(x)$ lần lượt là thương trong phép chia đa thức $P(x)$ cho $x + 2$ và $x^2 - 1$. Ta có:</p> $ax^3 + bx + c = (x + 2)Q_1(x) \quad \forall x \quad (*)$ <p>Và $ax^3 + bx + c = (x^2 - 1)Q_2(x) + x + 5 \quad \forall x \quad (**)$</p> <p>Do $(*)$ đúng với mọi x nên thay $x = -2$ vào $(*)$ ta được:</p> $-8a - 2b + c = 0 \quad (1)$ <p>Do $(**)$ đúng với mọi x nên thay $x = -1, x = 1$ vào $(**)$ ta được:</p> $-a - b + c = 4 \quad (2)$ $a + b + c = 6 \quad (3)$	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

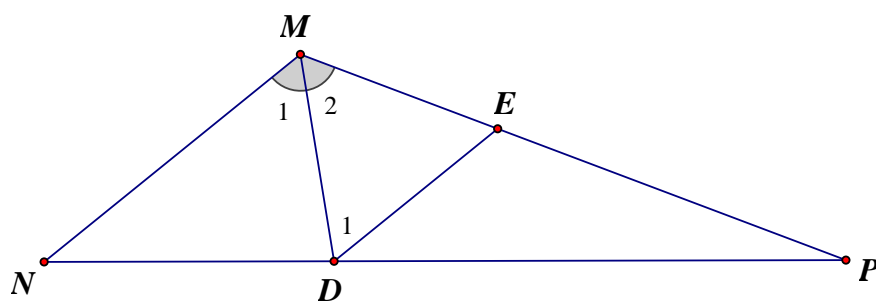
	<p>Cộng từng vế của (2) và (3), ta được: $2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$. Thay $c = 5$</p> <p>vào (1) và (2) ta được :</p> $\begin{cases} -8a - 2b + 5 = 0 \\ -a - b + 5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a - 2b = -5 \\ -a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,5 \\ b = 0,5 \end{cases}$ <p>Vậy $a = b = 0,5$; $c = 5$ là giá trị cần tìm</p>	0,5đ
<p>Câu 4 (6,0điểm)</p>	<p>1)</p>  <p>a) (2 điểm)</p> <p>Do ABCD là hình chữ nhật nên</p> <p>$AB \parallel CD$, suy ra $NB \parallel KC$ (1)</p>	

	<p>Vì N, K là trung lần lượt là trung điểm của AB và CD nên</p> $NB = \frac{1}{2}AB, KC = \frac{1}{2}CD, \text{ mà } AB = CD \text{ (do } ABCD \text{ là hình chữ nhật)}$ <p>Suy ra $NB = KC$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra NBCK là hình bình hành</p> <p>Mặt khác, ABCD là hình chữ nhật nên $\angle NBC = 90^\circ$</p> <p>Suy ra NBCK là hình chữ nhật, mà I là trung điểm của CN</p> <p>Vậy I là trung điểm của BK</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25 đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p>
--	--	--

	<p>b) (2 điểm)</p> <p>Ta có: $NA = NB$ (GT)</p> <p>$MA = MH$ (GT)</p> <p>Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABH</p> <p>$\Rightarrow MN \parallel BH$, mà $BH \perp AC$ (GT)</p> <p>$\Rightarrow MN \perp AC$</p> <p>Ta có $\triangle MNC$ vuông tại M có MI là trung tuyến nên $MI = \frac{1}{2}CN$</p> <p>Theo câu a) tứ giác NBCK là hình chữ nhật nên $CN = BK$</p> <p>Suy ra $MI = \frac{1}{2}BK$</p> <p>Trong $\triangle BMK$ có trung tuyến $MI = \frac{1}{2}BK$, suy ra tam giác BMK</p> <p>vuông tại M.</p> <p>Vậy $\angle BMK = 90^\circ$</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5 đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,25đ</p>
--	--	---

0,25đ

2) (2 điểm)



Vì MD là phân giác của góc NMP nên

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{2} NMP = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$$

Qua D kẻ đường thẳng song song với MN cắt MP tại E

Suy ra $D_1 = M_1$ (hai góc so le trong)

Mà $M_1 = M_2$ (GT) nên $D_1 = M_2 = 60^\circ$

0,25đ

	<p>Suy ra tam giác MDE là tam giác đều</p> <p>$\Rightarrow MD = ME = DE$</p> <p>Tam giác MNP có $DE \parallel MN$, áp dụng hệ quả của định lí Thales</p> <p>Ta có: $\frac{DE}{MN} = \frac{PE}{MP} \Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{PE}{MP}$ (do $DE = MD$)</p> <p>$\Rightarrow \frac{MD}{MN} = \frac{MP - ME}{MP} \Rightarrow \frac{MD}{MN} = 1 - \frac{ME}{MP}$</p> <p>Hay $\frac{MD}{MN} = 1 - \frac{MD}{MP}$ (vì $ME = MD$)</p> <p>$\Rightarrow \frac{MD}{MN} + \frac{MD}{MP} = 1 \Rightarrow \frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}$ (Chia hai vế cho MD)</p> <p>Vậy $\frac{1}{MN} + \frac{1}{MP} = \frac{1}{MD}$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p>
--	---	--

		0,5đ
Câu 5 (2 điểm)	<p>Áp dụng bất đẳng thức: Với $a > 0, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} \geq \frac{4}{2xy + x^2 + y^2} = \frac{4}{(x+y)^2} = \frac{4}{1^2} = 4$ <p>Ta lại có $(x+y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow 1^2 \geq 4xy \Leftrightarrow \frac{1}{2xy} \geq 2$</p> $\Rightarrow P = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} = \left(\frac{1}{2xy} + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + \frac{1}{2xy} \geq 4 + 2 = 6$ <p>Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 1/2$</p> <p>Vậy Min $P = 6$ khi $x = y = 1/2$</p>	<p>0,25đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

		0,25đ
		0,25đ
		0,25đ

Ghi chú: Trên đây chỉ là HD, HS không làm theo đáp án, mà làm cách khác nhưng đúng

vẫn cho điểm tối đa.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8

HUYỆN HOÀNG HÓA

NĂM HỌC: 2023-2024

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

(Đề thi này có 05 câu, gồm 01 trang)

Câu 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức: $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$, với $x \neq \pm 1$.

Rút gọn biểu thức A. Tính giá trị biểu thức A khi x thỏa mãn: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một không đổi nhau thỏa mãn: $ab + bc + ca = 5$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{(5+a^2)(5+b^2)(5+c^2)}$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$.

2. Tìm a, b sao cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức

$$g(x) = x^2 + x - 2.$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Tìm các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^2 + xy = 2022x + 2023y + 2024$.

2. Cho x, y là các số nguyên sao cho $x^2 - 2xy - y$ và $xy - 2y^2 - x$ đều chia hết cho

5. Chứng minh rằng $2x^2 + y^2 + 2x + y$ cũng chia hết cho 5.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Hạ $DM \perp CE$.

1. Chứng minh tứ giác ADKE là hình chữ nhật, từ đó suy ra $AM \perp KM$.
2. Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh $\triangle ADM$ cân và tính số đo của góc ANB.
3. Phân giác góc DCE cắt cạnh AD tại F. Chứng minh rằng $CF \leq 2EF$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương: $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 6.$$

..... Hết

Họ tên thí sinh :..... Số báo danh :..... Giám thị

số 1 :..... Giám thị số 2:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HSG LỚP 8

HUYỆN HOÀNG HOÁ

NĂM HỌC 2022 – 2023

MÔN: TOÁN

Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
<p>Câu 1.</p> <p>(4,0 điểm)</p>	<p>1</p>	<p>Với $x \neq \pm 1$ $A = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x^2} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$</p> $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} \right) - \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{x(x - 1)(x + 1)}{x^2 + 1} \cdot \frac{2}{(x - 1)^2 \cdot (x + 1)} - \frac{1}{x - 1} = \frac{2x}{(x^2 + 1)(x - 1)} - \frac{1}{x - 1}$ $= \frac{2x - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{-(x - 1)^2}{(x^2 + 1)(x - 1)} = \frac{1 - x}{x^2 + 1}.$ <p>Vậy: $A = \frac{1 - x}{x^2 + 1}$ (với $x \neq \pm 1$).</p>	<p>0.25</p>

			0.25
			0.25
			0.25
		<p>Với $x \neq \pm 1$ Ta có $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$</p> <p> $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (L)} \\ x = -2 \text{ (T / m)} \\ x = 3 \text{ (T / m)} \end{cases}$ </p> <p>Với $x = -2 \Rightarrow A = \frac{3}{5}$</p>	0.25
			0.25

		Với $x = 3 \Rightarrow A = -\frac{1}{5}$	0.25
			0.25
2	Ta có $ab + bc + ca = 5 \Rightarrow a^2 + 5 = a^2 + ab + bc + ca = (a + b)(a + c)$		0.5
	Tương tự: $b^2 + 5 = (b + c)(b + a); c^2 + 5 = (c + a)(b + c)$		0.5
	$P = \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(5 + a^2)(5 + b^2)(5 + c^2)} = \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(a + b)(a + c)(b + c)(b + a)(c + a)(c + b)}$		0.5
	$= \frac{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2} = 1$		0.5

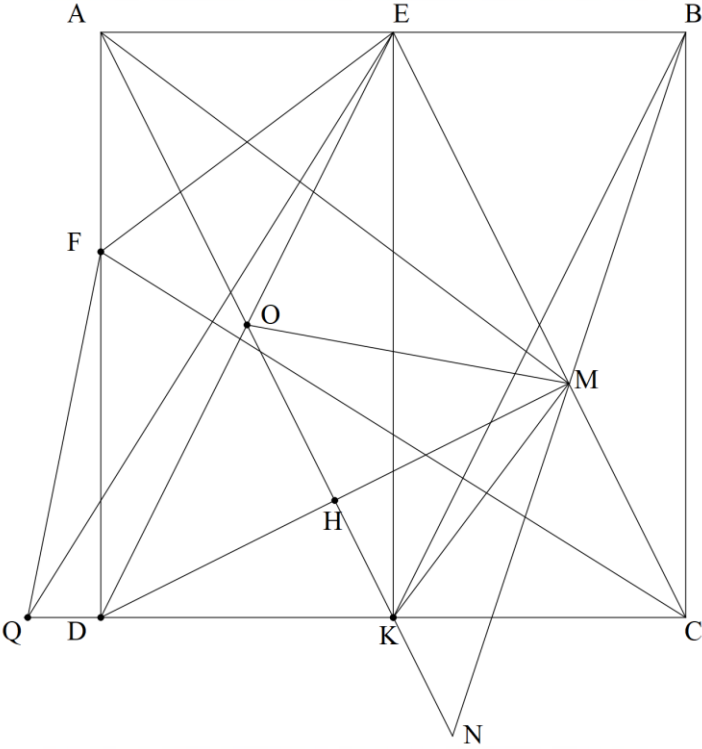
<p>Câu 2.</p> <p>(4,0 điểm)</p>	<p>1</p>	<p>Ta có: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$</p> <p>$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 1) = 192$</p> <p>$\Leftrightarrow (x + 1)^2 (x - 1)(x + 3) = 192 \Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 192 \quad (*)$</p> <p>Đặt $t = x^2 + 2x + 1$ (ĐK : $t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = t - 4$</p> <p>Thay vào (*) ta được $t(t - 4) = 192 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 192 = 0 \Leftrightarrow (t - 16)(t + 12) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 16(TM) \\ t = -12(KTM) \end{cases}$</p> <p>Với $t = 16 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 16 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \\ x + 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-3; 5\}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
--	-----------------	---	---

			0.25
			0.5
			0.25
	2	<p>Ta có : $g(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$</p> <p>Vì $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$</p> <p>Nên tồn tại một đa thức $q(x)$ sao cho $f(x) = g(x) \cdot q(x)$</p> <p>$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot q(x)$</p> <p>Với $x = 1 \Rightarrow a + b + 6 = 0 \Rightarrow b = -a - 6(1)$</p>	0.25
			0.25

		<p>Với $x = -2 \Rightarrow 2a - b + 6 = 0 \quad (2)$</p> <p>Thay (1) vào (2) . Ta có : $2a - (-a - 6) + 6 = 0 \Rightarrow a = -4;$</p> <p style="text-align: center;">$b = -2$</p> <p>Vậy $a = -4; b = -2$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
<p>Câu 3.</p> <p>(4,0 điểm)</p>	<p>1</p>	<p>$x^2 + xy = 2022x + 2023y + 2024$</p> <p>$\Leftrightarrow (x + y + 1)(x - 2023) = 1$</p> <p>Vì $x; y$ nguyên nên $x + y + 1$ và $x - 2023$ là ước của 1</p>	<p>0.5</p> <p>0.25</p>

	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases}$ <p>TH1: $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x - 2023 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2024 \\ x = 2024 \end{cases}$</p> <p>TH2: $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x - 2023 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2024 \\ x = 2022 \end{cases}$</p> <p>Vậy các cặp (x;y) nguyên cần tìm là: {(2024;-2024);(2022;-2024)}</p>	<p>0.5</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
2	<p>Đặt $a = x^2 - 2xy - y, b = xy - 2y^2 - x, c = 2x^2 + y^2 + 2x + y$.</p> <p>Ta có $a - b = (x - y)(x - 2y + 1)$.</p> <p>Do a và b chia hết cho 5 nên $a - b$ chia hết cho 5.</p> <p>Suy ra $x - y \vdots 5$ hoặc $x - 2y + 1 \vdots 5$.</p>	0.5

	<p>▪ Trường hợp 1: Nếu $x - y \vdots 5$ thì $x \equiv y \pmod{5}$. Khi đó</p> $a \equiv x^2 - 2x^2 - x = -(x^2 + x) \pmod{5};$ $c \equiv 2x^2 + x^2 + 2x + x = 3(x^2 + x) \pmod{5}.$ <p>Do $a \vdots 5$ nên $x^2 + x \vdots 5$ hay $c \vdots 5$.</p>	0.25
	<p>▪ Trường hợp 2: Nếu $x - 2y + 1 \vdots 5$ thì $x \equiv 2y - 1 \pmod{5}$. Khi đó</p> $a \equiv (2y - 1)^2 - 2(2y - 1)y - y = -3y + 1 \pmod{5};$ $c \equiv 2(2y - 1)^2 + y^2 + 2(2y - 1) + y \equiv 9y^2 - 3y \equiv 3y(3y - 1) \pmod{5}.$ <p>Do $a \vdots 5$ nên $3y - 1 \vdots 5$ hay $c \vdots 5$.</p> <p>Từ hai trường hợp trên suy ra ĐPCM</p>	0.5
		0.5

			0.25
Câu 4 (6,0 điểm) m			
			

--	--	--	--

	1	Chứng minh được AEKD là hình chữ nhật.	1.0
	3	Ta có O là giao điểm của 2 đường chéo AK và DE nên	
	điểm	$OA = OE = OK = OD = \frac{1}{2}AK = \frac{1}{2}DE$ $\Rightarrow MO = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}AK \Rightarrow \Delta AMK \text{ vuông tại K} \Rightarrow AM \perp KM \text{ (ĐPCM)}$	1.0
			1.0
	2	Gọi H là giao điểm của AK và DM	
	1,5	Chứng minh được AECK là hình bình hành .	0.25
	điểm	<p>Từ đó suy ra $AK \parallel CE \Rightarrow HK \parallel MC$ mà $KD = KC \Rightarrow HD = HM$</p> <p>kết hợp với $DM \perp CE \Rightarrow AH \perp DM$</p> <p>$\Rightarrow \Delta ADM$ cân tại A</p>	0.25

		$\Rightarrow AD = AM = AB \Rightarrow \triangle AMB$ cân tại A Do $\triangle ADM$ cân tại A $\Rightarrow \angle AMD = \frac{180^\circ - \angle DAM}{2}$ Do $\triangle ABM$ cân tại A $\Rightarrow \angle AMB = \frac{180^\circ - \angle BAM}{2}$ $\Rightarrow \angle AMD + \angle AMB = \frac{180^\circ - \angle DAM + 180^\circ - \angle BAM}{2} = \frac{360^\circ - (\angle DAM + \angle BAM)}{2} = \frac{360^\circ - \angle DAB}{2} = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$ $\Rightarrow \angle BMD = 135^\circ$	0.25
		Lại có $\angle BMD$ là góc ngoài của tam giác vuông HMN từ đó tính được $\angle ANB = 45^\circ$	0.25
			0.25

			0.25
	3	<p>Qua E vẽ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q</p> <p>Xét hình vuông ABCD có EK là đường trung bình .</p> <p>Suy ra $EK = AD = CD$, $EK // AD \Rightarrow AD \perp CD \Rightarrow \angle EKQ = 90^\circ$</p> <p>Xét $\triangle CDF$ và $\triangle EKQ$ có:</p> <p>$\angle KEQ = \angle FCQ$ (cùng phụ với góc $\angle EQC$); $CD = EK$; $\angle EKQ = \angle CDF = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \triangle CDF = \triangle EKQ$ (g.c.g) $\Rightarrow CF = EQ$ (Hai cạnh tương ứng)</p> <p>Xét $\triangle CEQ$ có CF là đường phân giác đồng thời là đường cao.</p> <p>Suy ra $\triangle CEQ$ cân tại C $\Rightarrow CF$ cũng là đường trung trực</p>	0.25

		$\Rightarrow FE = FQ$ (tính chất đường trung trực) $\Rightarrow EF + FQ = 2EF$ $\Rightarrow EQ \leq EF + FQ = 2EF$. Dấu “=” xảy ra khi E; Q, F thẳng hàng Mà $EQ = FC \Rightarrow FC \leq 2EF$ (ĐPCM) 	0.25 0.25 0.25 0.25
Câu 5 (2,0 điểm)		Ta có: $\frac{1+3a}{1+b^2} = (1+3a)\left(1 - \frac{b^2}{1+b^2}\right) = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2}$ Ta chứng minh được $\frac{b}{1+b^2} \leq \frac{1}{2}$. Thật vậy: $\frac{b}{1+b^2} - \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow$	0,25

	<p>$\frac{2b-1-b^2}{2(1+b^2)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-(b-1)^2}{2(1+b^2)} \leq 0$ đúng với mọi b.</p> <p>Do đó $\frac{b^2}{1+b^2} \leq \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{-b^2}{1+b^2} \geq \frac{-b}{2}$</p> <p>Khi đó $\frac{1+3a}{1+b^2} = 1+3a - \frac{b^2(1+3a)}{1+b^2} \geq 1+3a - \frac{b(1+3a)}{2}$ (1)</p> <p>Tương tự ta cũng chứng minh được: $\frac{1+3b}{1+c^2} \geq 1+3b - \frac{c(1+3b)}{2}$ (2)</p> <p>Và $\frac{1+3c}{1+a^2} \geq 1+3c - \frac{a(1+3c)}{2}$ (3)</p> <p>Cộng vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta có:</p> $\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq 3+3(a+b+c) - \frac{b(1+3a)+c(1+3b)+a(1+3c)}{2}$ $= 3+3(a+b+c) - \frac{(a+b+c)+3(ab+bc+ca)}{2} = \frac{5(a+b+c)}{2} - \frac{3}{2}$ <p>Lại có:</p>	0.25
		0,25

		$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \forall a; b; c \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$	0,25
		$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow a+b+c \geq 3.$	
		<p>Do đó $\frac{1+3a}{1+b^2} + \frac{1+3b}{1+c^2} + \frac{1+3c}{1+a^2} \geq \frac{5.3}{2} - \frac{3}{2} = 6.$</p>	
		Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$	0.25
			0.25
			0.25

			0.25
--	--	--	------

Ghi chú:

-Học sinh làm cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa.

-Bài hình nếu học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm.

UBND HUYỆN HIỆP HÒA

ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN LẦN 2

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN: TOÁN 8

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1 (5,0 điểm):

1) Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^2 - x - 2022.2023$ b) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

2) Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và

số đo diện tích bằng số đo chu vi.

3) Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 5, $f(x)$ chia cho $x +$

1

dư - 4. Tính $M = (a^{2019} + b^{2019})(b^{2021} + c^{2021})(c^{2023} + a^{2023})$

Bài 2 (4,0 điểm):

Cho $A = \left(\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x - 1} (x \neq 1)$

1) Rút gọn A

2) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 3 (4,0 điểm):

1) Cho x, y, z khác 0 thỏa mãn :

$$x + y + z = \frac{1}{2} ; \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{xyz} = 4 \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$$

Chứng minh rằng: $M = (x^3 + y^3)(y^{2013} + z^{2013})(z^{2023} + x^{2023}) = 0$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$

Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 6

Bài 4 (6,0 điểm): Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Gọi O là giao điểm của

2 đường chéo. Lấy I thuộc cạnh AB, M thuộc cạnh BC sao cho góc IOM bằng 90° .

Gọi N là giao điểm của AM và CD.

a) Chứng minh $BI = CM$

b) Tính diện tích tứ giác BIOM theo a

c) Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

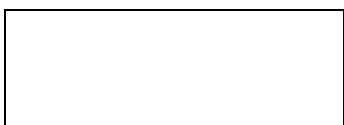
Bài 5 (1,0 điểm): Với a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^5}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^5}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^5}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$$

----- Đề gồm 01 trang-----

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

HDC MÔN THI: TOÁN 8



Bài	Nội dung	Điểm
1(5đ)	1) a) $x^2 - x - 2022.2023 = x^2 - x - 2022(2022 + 1)$	
	$= x^2 - x - 2022^2 - 2022$	0,5
	$=(x + 2022)(x - 2023)$	0,5
	b) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$	
	$= a^3(b - c) - b^3(b - c) - b^3(a - b) + c^3(a - b)$	0,5
	$= = (a - b)(b - c)(a - c)(a + b + c)$	0,5
	2) Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z; trong đó cạnh huyền là z	

	<p>(x, y, z là các số nguyên d-ơng)</p> <p>Ta có $xy = 2(x+y+z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)</p> <p>Từ (2) suy ra $z^2 = (x+y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có :</p> $z^2 = (x+y)^2 - 4(x+y+z)$ $z^2 + 4z = (x+y)^2 - 4(x+y)$ $z^2 + 4z + 4 = (x+y)^2 - 4(x+y) + 4$ $(z+2)^2 = (x+y-2)^2, \text{ suy ra } z+2 = x+y-2$ $z = x + y - 4 ; \text{ thay vào (1) ta đ-ợc :}$ $xy = 2(x+y+x+y-4)$ $xy - 4x - 4y = -8$ $(x-4)(y-4) = 8 = 1.8 = 2.4$ <p>Từ đó ta tìm đ-ợc các giá trị của x, y, z là :</p> $(x=5, y=12, z=13) ; (x=12, y=5, z=13) ;$ $(x=6, y=8, z=10) ; (x=8, y=6, z=10)$	<p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p>
	<p>3) Gọi đa thức thương của f(x) cho x – 2 và x + 1 lần lượt là Q₁ và Q₂</p> <p>Theo bài ra ta có $f(x) = (x - 2)Q_1 + 5 = (x + 1)Q_2 - 4$</p>	<p>0.25</p>

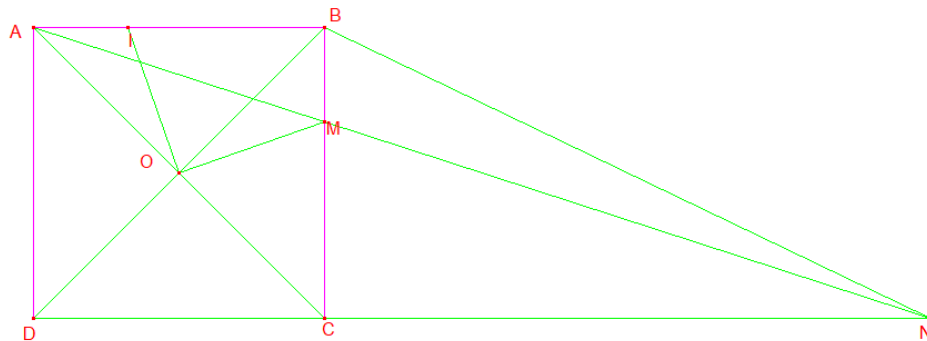
	<p>Vì $f(x)$ chia cho $x - 2$ dư 5 nên $f(2) = 5 \Rightarrow 8 + 4a + 2b + c = 5$</p> <p>$\Leftrightarrow 4a + 2b + c = -3$ (*)</p> <p>Vì $f(x)$ chia cho $x + 1$ dư -4 nên $f(-1) = -4$</p> <p>$\Rightarrow -1 + a - b + c = -4 \Leftrightarrow a - b + c = -3$ (**)</p> <p>Từ * và ** $\Rightarrow a = -b$</p> <p>Thay $a = -b$ vào M ta có $M = 0$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p>
2(4 đ)	<p>1) $A = \left(\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + x^2 + 1} - \frac{x^2 + 3}{x^3 - x^2 + 3x - 3} \right) : \frac{1}{x - 1} (x \neq 1)$</p> <p>$= \left(\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1} + \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x^2 + 3}{(x - 1)(x^2 + 3)} \right) : \frac{1}{x - 1}$</p> <p>$= \dots\dots\dots$</p> <p>$= \frac{2x^2 + 2 + x - 1 - x^2 - x - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} : \frac{1}{x - 1}$</p> <p>$= \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$</p> <p>KL:.....</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

		0,75
		0,25
	<p>2) Ta có</p> $x^2 \geq 0$ $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ $\forall \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0 \text{ nên } A \geq 0 \text{ (1)}$ $\text{Xét hiệu } \frac{4}{3} - A = \dots\dots\dots = \frac{(x+2)^2}{3(x^2+x+1)}$ <p>Lập luận $\Rightarrow A \leq \frac{4}{3}$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow 0 \leq A \leq \frac{4}{3}$. Vì A là số nguyên nên $A \in \{0;1\}$</p> <p>Với $A = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots x = 0$ (TM)</p> <p>Với $A = 1 \Rightarrow \dots\dots\dots x = -1$ (TM)</p> <p>KL...</p>	0.25

		0.25
		0.5
		0.5
3 (4đ)	<p>Ta có $x + y + z = 0,5$ (1) $\Rightarrow 2x + 2y + 2z = 1$</p> <p>Ta có $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2x + 2y + 2z}{xyz} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 = 4$</p> <p>$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ (2) (vì $1/x + 1/y + 1/z > 0$)</p> <p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$</p> <p>$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x + y)(y + z)(z + x) = 0$</p> <p>Nếu $x + y = 0 \Rightarrow x = -y \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow M = 0$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

	<p>Nếu $y + z = 0 \dots\dots\dots \Rightarrow M = 0$</p> <p>Nếu $z + x = 0 \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow M = 0$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>2) Ta có $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$</p> <p>$\Leftrightarrow \dots\dots\dots \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$</p> <p>Vì 6 chia hết cho 6 nên $6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ chia hết cho 6</p> <p>$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 6</p> <p>Xét hiệu $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$</p> <p>$= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$</p> <p>Chứng minh $a^3 - a$; $b^3 - b$; $c^3 - c$ chia hết cho 6</p> <p>$\dots \Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 6</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p>

4



0,5

a) Chứng minh $\triangle BIO = \triangle CMO$ (g.c.g)

$\Rightarrow BI = CM$ (2 cạnh tương ứng)

1,5

0,5

a) Ta có $\triangle BIO = \triangle CMO$ nên $S_{BIO} = S_{CMO}$

$$S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$$

0,5

	$= S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4}a^2$	1,5
	<p>c) Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với AN cắt CD tại E</p> <p>Chứng minh AE = AM</p> <p>Xét tam giác ANE vuông tại A có AD vuông góc NE có</p> $S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE$ $\Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2 (*)$ <p>Áp dụng định lý pytago ta có: $NE^2 = AN^2 + AE^2 (**)$</p> $(*) \text{ và } (**) \Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2}$ <p>Vì AE = AM và CD = AD \Rightarrow đpcm</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0.25</p>
5 (1 đ)	<p>Ta có $\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{2a - b}{3} \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + ab + b^2) (a, b, c > 0)$</p> $\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$ $\dots \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \text{ (Luôn đúng)}$	

	<p>Do đó $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3} \Leftrightarrow \frac{a^5}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a^3-a^2b}{3};$</p> <p>Chứng minh tương tự...</p> <p>Ta được: $VT \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3} + \frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a}{3}$</p> <p>Vì vai trò của a, b, c như nhau, nên ta giả sử $a \geq b \geq c > 0$</p> <p>$a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-c^2a = a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)$</p> <p>$= a^2(a-b)+b^2(b-a+a-c)+c^2(c-a) = (a-b)^2(a+b)+(a-c)(b-c)(b+c) \geq 0$</p> <p>(Với mọi $a \geq b \geq c > 0$).</p> <p>Từ đó $\Rightarrow VT \geq \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
--	--	---

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

LỚP 8 CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN

Thời gian: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 12/01/2023

Câu 1: (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$.

Rút gọn A và tìm số nguyên x để A chia hết cho 2.

2. Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{ab^2}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc^2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ca^2}{c^2+a^2-b^2}$

Câu 2: (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2-5x+2} + \frac{13x}{3x^2+x+2} = 6$

2. Phân tích đa thức sau thành phân tử:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$$

Câu 3: (4,0 điểm)

1. Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$
2. Cho x;y là các số nguyên khác 0; 1; -1 và $x^3 + y^3$ chia hết cho xy.

Chứng minh rằng $x^2 + 1$ không chia hết cho y.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tứ giác ABCD. Gọi E, I lần lượt là trung điểm của AC và BC; M là điểm đối xứng với I qua E.

1. Chứng minh tứ giác ABIM là hình bình hành.
2. Gọi N, F lần lượt là trung điểm của AD và BD; K là điểm đối xứng với I qua F.

Chứng minh: ba đường thẳng IN; MF; KE đồng quy.

3. Gọi O là giao hai đường chéo AC và BD. Kí hiệu $S; S_1; S_2$ lần lượt là diện tích tứ giác

ABCD, tam giác AOB và tam giác COD. Biết $S_1 = a^2; S_2 = b^2$ với a, b là các số dương

cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác ABCD để $S = (a + b)^2$

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho các số dương x, y thoả mãn $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN

MÔN TOÁN

Câu	Ý	Tóm tắt nội dung hướng dẫn	Điểm
Câu 1		Cho biểu thức $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$ với $x \neq 2; x \neq 3$.	
		+) Với $x \neq 2; x \neq 3$ ta có:	
		$A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} = \frac{(2x-9)-(x+3)(x-3)+(2x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$	0,5
	1	$= \frac{2x-9-x^2+9+2x^2-3x-2}{(x-3)(x-2)}$	0,25
	(2,5		
	d)	$= \frac{x^2-x-2}{(x-3)(x-2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{x+1}{x-3}$	0,5
		Vậy với $x \neq 2; x \neq 3$ thì $A = \frac{x+1}{x-3}$	0,25
		+) Ta có: $A = \frac{x+1}{x-3}$ chia hết cho 2 thì A phải nhận giá trị nguyên. Do x nguyên nên A nhận giá trị nguyên khi $x+1$ chia hết cho $x-3$.	0,25

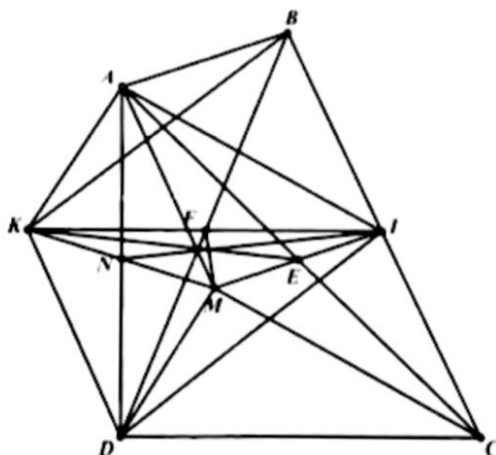
		<p>Mà $x + 1 = x - 3 + 4$ nên suy ra 4 chia hết cho $x - 3$</p> <p>$\Rightarrow x - 3 \in U(4) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$. Suy ra $x \in \{4; 2; 5; 1; 7; -1\}$</p>	0,5
		<p>+) Đối chiếu với điều kiện $x \neq 2; x \neq 3$ và thử lại ta thấy $x \in \{7; -1\}$ là giá trị cần tìm.</p>	0,25
		<p>Cho các số thực a, b, c đôi một khác nhau thỏa mãn:</p> <p>$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $abc \neq 0$.</p> <p>Tính giá trị biểu thức $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2}$</p>	
2		<p>+) Từ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$</p>	
(1,5		<p>Do $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca > 0$ với a, b, c đôi một khác nhau nên suy ra</p>	0,5
d)		<p>$a + b + c = 0$.</p>	
		<p>Khi đó:</p> $\frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{ab^2}{a^2 + (b+c)(b-c)} = \frac{ab^2}{a^2 + (-a)(b-c)} = \frac{b^2}{a+c-b} = \frac{b^2}{-b-b} = \frac{b}{-2}$ <p>Tương tự: $\frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} = \frac{c}{-2}; \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{a}{-2}$</p>	0,5

		<p>Công theo về các đẳng thức trên ta được:</p> $P = \frac{ab^2}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc^2}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2 - b^2} = \frac{b}{-2} + \frac{c}{-2} + \frac{a}{-2} = -\frac{1}{2}(a + b + c) = 0$ <p>Vậy $P = 0$.</p>	0,5
Câu 2		Giải phương trình: $\frac{2x}{3x^2 - 5x + 2} + \frac{13x}{3x^2 + x + 2} = 6$	
	1 (2đ)	Điều kiện xác định: $x \notin \left\{a; \frac{2}{3}\right\}$	0,25
		<p>Với điều kiện trên PT đã cho tương đương với</p> $2x(3x^2 + x + 2) + 13x(3x^2 - 5x + 2) = 6(3x^2 + x + 2)(3x^2 - 5x + 2)$ $\Leftrightarrow 54x^4 - 117x^3 + 105x^2 - 78x + 24 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow (2x - 1)(3x - 4)(9x^2 - 3x + 6) = 0$	0,75
		$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}; x = \frac{3}{4}$ (do $9x^2 - 3x + 6 = 0$ vô nghiệm)	0,5
		Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right\}$	0,25
	2	Phân tích đa thức sau thành phân tử:	

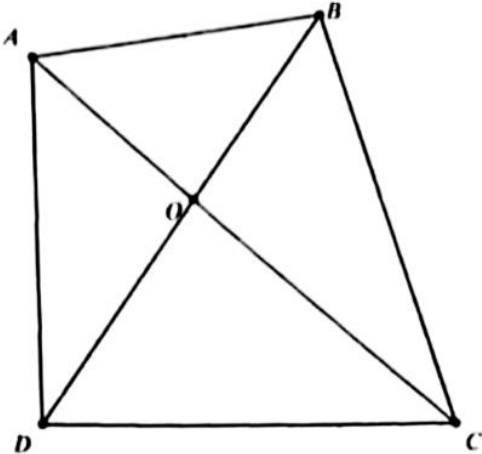
	(2đ)	$2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$	
		Đặt $B = 2(x^4 + y^4 + z^4) - (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)(x + y + z)^2 + (x + y + z)^4$ Và $x^4 + y^4 + z^4 = a, x^2 + y^2 + z^2 = b, x + y + z = c$ Khi đó: $B = 2a - b^2 - 2bc^2 + c^4 = 2(a - b^2) + (b - c^2)^2$	0,5
		Ta có: $a - b^2 = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2), b - c^2 = -2(xy + yz + zx)$	0,75
		Vậy: $B = -4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 4(xy + yz + zx)^2$ $B = 4(2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz) = 8xyz(x + y + z)$	0,75
Câu 3	1 (2đ)	Tìm cặp số nguyên (x;y) thoả mãn phương trình: $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$	
		Phương trình $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5 \Leftrightarrow y(x^2 + 2) = x^3 + 3x - 5$ $\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2} \quad (\text{do } x^2 + 2 > 0)$	0,5
		Với x nguyên, để y nguyên thì x - 5 chia hết cho $x^2 + 2$	0,5

		Suy ra $(x + 5)(x - 5)$ chia hết cho $x^2 + 2 > 0$	
		Suy ra 27 chia hết cho $x^2 + 2 > 0$ do đó $x^2 + 2 > 0$ chỉ có thể là 3; 9; 27.	0,5
		Từ đó ta có $x \in \{1; -1; 5; -5\}$ Thay lần lượt các giá trị của x vào đề bài ta tìm được các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn đề bài là (-1; -3); (5; 5).	0,5
	2 (2đ)	Cho x;y là các số nguyên khác 0; 1; -1 và $x^3 + y^3$ chia hết cho xy. Chứng minh rằng $x^2 + 1$ không chia hết cho y.	
		Vì $x^3 + y^3$ chia hết cho xy nên $\frac{x^3 + y^3}{xy} = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$ là số nguyên. Đặt: $\frac{x^2}{y} = \frac{a}{b}; \frac{y^2}{x} = \frac{m}{n}$ với $(a, b) = 1; (m, n) = 1; b > 0; n > 0$	0,25
		Theo giả thiết ta có $\frac{a}{b} + \frac{m}{n}$ là số nguyên nên $\frac{an + bm}{bn} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} an + bm : b \\ an + bm : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} an : b \\ bm : n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n : b \\ b : n \end{cases} \Rightarrow n = b \quad (1)$	0,5
		Mặt khác: $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^2}{x} = xy \in \mathbb{Z}$ nên $am : n \Rightarrow a : n$ (vì $(m, n) = 1$) (2)	0,5

		Từ (1) và (2) suy ra $a \vdots b \Rightarrow x^2 \vdots y$	0,25
		Do đó: $x^2 + 1 \vdots y \Leftrightarrow 1 \vdots y \Leftrightarrow y = \pm 1$. Không xảy ra do $y \neq \pm 1$ Vậy $x^2 + 1$ không chia hết cho y .	0,5
Câu 4		<p>Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, I lần lượt là trung điểm của AC và BC; M là điểm đối xứng với I qua E.</p> <p>1. Chứng minh tứ giác $ABIM$ là hình bình hành.</p> <p>2. Gọi N, F lần lượt là trung điểm của AD và BD; K là điểm đối xứng với I qua F. Chứng minh: ba đường thẳng $IN; MF; KE$ đồng quy.</p> <p>3. Gọi O là giao hai đường chéo AC và BD. Kí hiệu $S; S_1; S_2$ lần lượt là diện tích tứ giác $ABCD$, tam giác AOB và tam giác COD.</p> <p>Biết $S_1 = a^2; S_2 = b^2$ với a, b là các số dương cho trước. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để $S = (a + b)^2$</p>	



1	(2đ)	<p>Vì M đối xứng với I qua E nên E là trung điểm của MI</p> <p>Tứ giác AICM có E là trung điểm của hai đường chéo AC và MI nên AICM là hình bình hành.</p>	0,75
		<p>$\Rightarrow AM \parallel IC$ và $AM = IC$.</p> <p>Mà $IC = BI$ và B, I, C thẳng hàng suy ra $AM \parallel BI$ và $AM = BI$.</p>	0,75
		<p>Tứ giác AMIB có $AM \parallel BI$ và $AM = BI$ nên là hình bình hành</p>	0,5
	2	<p>Tương tự câu a, tứ giác BKDI là hình bình hành</p>	0,5
(2đ)		<p>$\Rightarrow KD \parallel BI$; $KD = BI$ mà $AM \parallel BI$; $AM = BI$ (do ABMI là hình bình hành)</p> <p>$\Rightarrow KD \parallel AM$; $KD = AM \Rightarrow AMKD$ là hình bình hành $\Rightarrow N$ là trung điểm của MK</p>	0,75

	<p>Xét ΔMKI có N, F, E lần lượt là trung điểm của MK; KI; MI</p> <p>Suy ra IN; MF, KE là ba đường trung tuyến của tam giác</p> <p>\Rightarrow IN; MF; KE đồng quy (ĐPCM)</p>	0,75
3		
(2d)	<p>Ta có $\frac{S_{AOB}}{S_{AOD}} = \frac{OB}{OD} = \frac{S_{BOC}}{S_{COD}} \Rightarrow S_{AOD} \cdot S_{BOC} = a^2 \cdot b^2$</p>	0,5
	<p>Áp dụng BĐT: $(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow (S_{AOD} + S_{BOC})^2 \geq 4a^2b^2$</p> <p>$\Rightarrow S_{AOD} + S_{BOC} \geq 2ab$. Do a, b > 0</p>	0,5
	<p>Ta có $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{AOD} + S_{BOC} + S_{COD} \geq a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$ không đổi</p>	0,5
	<p>Dấu “=” xảy ra khi $\Leftrightarrow S_{AOD} = S_{BOC} \Leftrightarrow AB \parallel CD$ hay ABCD là hình thang</p>	0,5

		Vậy: $S_{ABCD} = (a + b)^2$ khi tứ giác ABCD là hình với hai đáy là: $AB \parallel CD$	
Câu 5 (2đ)		<p>Cho các số dương x, y thỏa mãn $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8$.</p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y$.</p>	
		<p>Từ giả thiết $2x^2 + 2xy + y^2 \leq 8 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 9$</p> <p>$\Leftrightarrow (x + y)^2 + (x - 1)^2 \leq 9$, suy ra $(x + y)^2 \leq 9 \Rightarrow 0 < x + y \leq 3$</p>	0,5
		<p>Do x, y > 0 nên ta có:</p> $P = \left(\frac{2}{x} + 2x\right) + \left(\frac{4}{y} + y\right) - 4x - 4y \geq 2\sqrt{\frac{2}{x} \cdot 2x} + 2\sqrt{\frac{4}{y} \cdot y} - 4(x + y)$	0,5
		Suy ra $P \geq 8 - 4(x + y) \geq 8 - 4 \cdot 3 = -4$ (do $0 < x + y \leq 3$).	0,5
		Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -4 khi x = 1 và y = 2.	0,5

Chú ý:

- Bài hình nếu HS không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không tính điểm.
- HS nếu làm theo cách khác mà vẫn đúng thì vẫn chấm điểm tối đa bài đó.
- Điểm chấm chi tiết đến 0,25 đ.

PHÒNG GD&ĐT YÊN ĐỊNH

ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 8

TRƯỜNG THCS YÊN GIANG

NĂM HỌC 2023-2024

MÔN THI: TOÁN

Ngày thi: 06/3/2021

*Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)***Câu 1: (4 điểm).**

Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$

1) Rút gọn biểu thức M.

2) Tính giá trị của biểu $N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4}$ khi $M = \frac{1}{2}$.

Câu 2: (4 điểm).

1) Giải phương trình: $(6x+7)^2 = \frac{6}{(x+1)(3x+4)}$.

2) Tìm đa thức $P(x)$ biết $P(x)$ chia cho $x + 3$ dư 1; chia cho $x - 4$ dư 8;

chia cho $(x + 3)(x - 4)$ được thương là $3x$ và còn dư.

Câu 3: (4 điểm).

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^4 - y^4 - 2y^2 = 25$

2) Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn: $4m^2 + m = 5n^2 + n$. Chứng minh rằng

$m - n$ và $5m + 5n + 1$ đều là số chính phương.

Câu 4: (6 điểm)

Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Tia phân giác của góc BAD cắt BD ở M, tia phân giác của góc ABC cắt AC ở N.

1) Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.

2) Gọi I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của OI và AB. Chứng minh tam giác AIK cân.

3) Tính diện tích tam giác AOM khi AD = 14cm, AB = 35cm, AM = 12cm.

Câu 5: (2,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{y^2 + y} + \frac{1}{z^2 + z} \geq \frac{3}{2}$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số

báo danh:

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HOÀNG HÓA – YÊN ĐỊNH – QUẢNG XƯƠNG – THỌ

Câu 1	<p>1) Rút gọn biểu thức M.</p>	
	<p>- Điều kiện: $a \neq 0; a \neq 1$</p>	
	<p>(4 đ)</p> $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ $= \left[\frac{(a-1)^2}{a^2+a+1} - \frac{1-2a^2+4a}{(a-1)(a^2+a+1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2+4)}$ $= \frac{(a-1)^3-1+2a^2-4a+a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} \cdot \frac{4a}{a^2+4}$	0,5

		0,5
	$= \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4}$	0,5
	$= \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{4a}{a^2 + 4}$ <p>Vậy : $M = \frac{4a}{a^2 + 4}$ (với $a \neq 0; a \neq 1$).</p>	0,5
	<p>2) Tính giá trị của biểu $N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4}$ khi $M = \frac{1}{2}$.</p>	
	<p>Ta có : $M = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4 = 0$ (1).</p> <p>Nhận xét : Các nghiệm của (1) đều thỏa mãn điều kiện $a \neq 0; a \neq 1$.</p>	0,5
	Thực hiện phép chia đa thức $a^3 - 9a^2 + 15a - 4$ cho đa thức $a^2 - 8a + 4$	0,5

	ta được : $a^3 - 9a^2 + 15a - 4 = (a^2 - 8a + 4)(a - 1) + 3a$	
	Thực hiện phép chia đa thức $a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4$ cho đa thức $a^2 - 8a + 4$ ta được : $a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4 = (a^2 - 8a + 4)(a^2 - 1) + 2a$	0,5
	$N = \frac{a^3 - 9a^2 + 15a - 4}{a^4 - 8a^3 + 3a^2 + 10a - 4} = \frac{(a^2 - 8a + 4)(a - 1) + 3a}{(a^2 - 8a + 4)(a^2 - 1) + 2a} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}.$ <p>Vậy $M = \frac{3}{2}.$</p>	0,5
Câu	1) Giải phương trình: $(6x + 7)^2 = \frac{6}{(x + 1)(3x + 4)}.$	

	chia cho $(x + 3)(x - 4)$ được thương là $3x$ và còn dư.	
	<p>Vì đa thức $(x + 3)(x - 4)$ có bậc là 2 nên đa thức dư khi chia $P(x)$ cho $(x + 3)(x - 4)$ có dạng $R(x) = ax + b$</p> <p>$\Rightarrow P(x) = (x + 3)(x - 4). 3x + ax + b$</p>	0,5
	<p>Vì khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x + 3$ thì dư bằng 1 nên :</p> $P(-3) = -3a + b = 1 \quad (1).$ <p>Vì khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $x - 4$ thì dư bằng 8 nên :</p> $P(4) = 4a + b = 8 \quad (2)$	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra : $\begin{cases} -3a + b = 1 \\ 4a + b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$	0,5
	Vậy: $P(x) = (x + 3)(x - 4). 3x + x + 4 = 3x^3 - 3x^2 - 35x + 4$	0,5

3	Câu 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn: $x^4 - y^4 - 2y^2 = 25$	
	$x^4 - y^4 - 2y^2 = 25 \Leftrightarrow x^4 - (y^2 + 1)^2 = 24 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 + 1) = 24$	0,5
	(4 đ) Suy ra: $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ là các ước của 24 và có tích bằng 24.	
	Vì $(x^2 + y^2 + 1) - (x^2 - y^2 - 1) = 2y^2 + 2$ là số chẵn nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ có cùng tính chẵn lẻ. Mà tích của chúng bằng 24 là số chẵn nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ đều là số chẵn.	0,5
	Vì $x^2 + y^2 + 1 > 0$ nên $x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 - 1$ là các ước chẵn dương. Mà $x^2 + y^2 + 1 > x^2 - y^2 - 1$; nên ta có các trường hợp :	0,5
	Trường hợp 1 : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 12 \\ x^2 - y^2 - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 7 \\ y^2 = 4 \end{cases} \cdot (\text{ loại })$	0,5

	<p>Trường hợp 2 : $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 6 \\ x^2 - y^2 - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 0 \end{cases} . (\text{ loại })$</p> <p>Vậy không tồn tại cặp số nguyên (x; y) nào thỏa mãn đề bài :</p>	
	<p>2) Cho các số tự nhiên m, n thỏa mãn: $4m^2 + m = 5n^2 + n$. Chứng minh rằng $m - n$ và $5m + 5n + 1$ đều là số chính phương.</p>	
	<p>Ta có $4m^2 + m = 5n^2 + n$</p> $\Leftrightarrow 5(m^2 - n^2) + m - n = m^2 \Leftrightarrow (m - n)(5m + 5n + 1) = m^2 \quad (1)$ <p>Vậy $(m - n); (5m + 5n + 1)$ là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau, thỏa mãn (*) nên chúng đều là các số chính phương.</p>	0,5
	<p>Đặt : $d = UCLN(m - n, 5m + 5n + 1)$. Suy ra :</p> $\begin{cases} m - n : d \\ 5m + 5n + 1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5m - 5n : d \\ 5m + 5n + 1 : d \end{cases} \Rightarrow 10m + 1 : d \quad (2)$	0,5

	<p>Mặt khác, từ (1) suy ra : $m^2:d^2 \Rightarrow m:d \Rightarrow 10m:d$ (3).</p> <p>Từ (2) và (3) suy ra : $1:d \Rightarrow d=1$ (Vì d là số tự nhiên).</p>	0,5
	<p>Vì $UCLN(m-n, 5m+5n+1)=1$ nên $m-n, 5m+5n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Khi hai số nguyên tố cùng nhau mà có tích là một số chính phương thì cả hai số đó đều là số chính phương.</p> <p>Vậy $m-n$ và $5m+5n+1$ đều là số chính phương.</p>	0,5
<p>Câu 4 (6,</p>	<div data-bbox="462 1136 1128 1455" data-label="Image"> </div> <p>1) Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.</p>	

0đ	Đặt $AB = a, AD = b$. Áp dụng tính chất đường phân giác ta có :	0,5
	$\frac{DM}{MB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DM}{DM + MB} = \frac{AD}{AD + AB} \Leftrightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{b}{b + a}.$	
	Mà $BD = 2.DO$ (tính chất hình bình hành). Suy ra : $\frac{DM}{DO} = \frac{2b}{b + a}$. (1)	0,5
	Tương tự, vì BN là đường phân giác của tam giác ABC nên :	0,5
	$\frac{CN}{NA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{CN}{CN + NA} = \frac{BC}{BC + AB} \Leftrightarrow \frac{CN}{BD} = \frac{b}{b + a} \Leftrightarrow \frac{CN}{CO} = \frac{2b}{b + a}. \quad (2)$	
	Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{DM}{DO} = \frac{CN}{CO}$. Suy ra $MN \parallel CD$.	0,5
	2) Gọi I là giao điểm của AM và BN, K là giao điểm của OI và AB.	
	Chứng minh tam giác AIK cân.	
	Vì AI, BI là hai đường phân giác của hai góc kề cạnh AB của hình bình	0,5

	hình ABCD nên $AI \perp BI$. Suy ra tam giác AIB vuông tại I.	
	<p>Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác AIK và BIK, ta có:</p> $\frac{PM}{KA} = \frac{IP}{IK}, \quad \frac{PN}{KB} = \frac{IP}{IK}, \text{ suy ra : } \frac{PM}{KA} = \frac{PN}{KB} \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{KA}{KB} \quad (1)$	0,5
	<p>Áp dụng định lí Ta-lét vào các tam giác AOK và BOK, ta có:</p> $\frac{PM}{KB} = \frac{OP}{OK}, \quad \frac{PN}{KA} = \frac{OP}{OK}, \text{ suy ra : } \frac{PM}{KB} = \frac{PN}{KA} \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{KB}{KA} \quad (2)$	0,5
	<p>Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{KA}{KB} = \frac{KB}{KA} \Leftrightarrow KA^2 = KB^2 \Leftrightarrow KA = KB$.</p> <p>Suy ra IK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB của tam giác vuông AIB. Suy ra $KA = KI$. Vậy tam giác AIK cân tại K.</p>	0,5
	<p>3) Tính diện tích tam giác AOM khi $AD = 14\text{cm}$, $AB = 35\text{cm}$, $AM = 12\text{cm}$.</p>	

	<p>Gọi E là giao điểm của MN và AD. Từ E kẻ EH vuông góc với AM.</p> <p>Vì $EM \parallel AB$, AM là đường phân giác của góc BAD dễ thấy tam giác AEM cân tại E, H là trung điểm của AM. Suy ra $AH = 6 \text{ cm}$.</p>	0,5
	<p>Áp dụng định lí Ta-lét, tính chất đường phân giác ta có :</p> $\frac{EA}{ED} = \frac{BM}{MD} = \frac{AB}{AD} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA + ED} = \frac{AB}{AB + AD} \Leftrightarrow \frac{EA}{AD} = \frac{AB}{AB + AD}$ $\Leftrightarrow EA = \frac{AB \cdot AD}{AB + AD} = \frac{35 \cdot 14}{35 + 14} = 10$	0,5
	<p>Áp dụng định lí pitago vào tam giác vuông AEH .</p> $EH^2 = EA^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Leftrightarrow EH = 8 \text{ cm}$ $S_{AEM} = \frac{EH \cdot AM}{2} = \frac{8 \cdot 12}{2} = 48 \text{ cm}^2, \quad S_{AMD} = \frac{AD \cdot S_{AEM}}{AE} = 168 \text{ cm}^2$	0,5

	<p>Theo câu a : $\frac{DM}{DO} = \frac{2b}{b+a} \Leftrightarrow \frac{DM}{DO-DM} = \frac{2b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{DM}{MO} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$</p> <p>$S_{AOM} = \frac{OM.S_{AMD}}{MD} = \frac{3.168}{4} = 126cm^2.$</p>	0,5
Câu 5 (2,0đ)	<p>Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 3$.</p> <p>Tìm giá trị lớn nhất của: $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} \geq \frac{3}{2}$</p>	
	<p>Đặt $P = \frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{y^2+y} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{z(z+1)}$</p> <p>$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right)$</p>	0,5
	<p>Áp dụng BĐT $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ và $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ với a, b, c</p>	0,5

	<p>dương, dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.</p> <p>Ta có $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1\right); \frac{1}{y+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{y} + 1\right); \frac{1}{z+1} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{z} + 1\right)$</p>	
	<p>Bởi vậy</p> $P = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{y} + 1 + \frac{1}{z} + 1\right)$ $= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \frac{3}{4}$	0,5
	$\geq \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{x+y+z} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$ <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$. Đạt được tại $x = y = z = 1$.</p>	0,5

HẾT

Chú ý:

1. *Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.*
2. *Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.*

PHÒNG GD&ĐT YÊN THÀNH

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI CỤM

CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 2

Năm học 2023-2024

Môn Toán 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (5,0 điểm)

a) Tìm a, b để đa thức $F(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$

b) Tìm số tự nhiên n để $p = n^3 - 3n^2 + n - 3$ là số nguyên tố

c) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{15x + 6}{x^4 - 1} \right) : \frac{x + 2}{x^2 - 1}$. (Với $x \neq \pm 1; x \neq -2$)

Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị lớn nhất của A

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 - y^2 + y = 0$.

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho các số a, b, c khác 0 thỏa mãn $a + b = c + \frac{1}{2023}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 2023$

Tính giá trị của biểu thức: $B = (a^{99} + b^{99} - c^{99}) \left(\frac{1}{a^{99}} + \frac{1}{b^{99}} - \frac{1}{c^{99}} \right)$

b) Với n là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5. Chứng minh: $2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1$

chia hết cho 80.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: $\angle AEF = \angle ABC$

b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua D. Giao điểm của EF với AM là N.

Chứng minh: $HN \cdot AD = AN \cdot DM$.

c) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh ba điểm I, D, K thẳng

hàng.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số thỏa mãn $|a| < 1$; $|b| < 1$; $|c| < 1$ và $ab + bc + ca =$

2

Chứng minh $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN LỚP 8

(Gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1(5đ)	<p>Câu 1: (5,0 điểm)</p> <p>a) Tìm a,b để đa thức $F(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$</p> <p>b) Tìm số tự nhiên n để $p = n^3 - 3n^2 + n - 3$ là số nguyên tố</p> <p>c) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{4x}{x^3 + x^2 + x + 1} + \frac{15x + 6}{x^4 - 1} \right) : \frac{x + 2}{x^2 - 1}$. (Với $x \neq \pm 1; x \neq -2$)</p> <p>Rút gọn biểu thức A rồi tìm giá trị lớn nhất của A</p>	
	<p>a) Gọi đa thức thương khi chia F(x) cho g(x) là Q(x), ta có:</p> <p>$ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x^2 + x - 2) \cdot Q(x)$ đúng với mọi giá trị của x</p>	

	$\rightarrow ax^3 + bx^2 + 10x - 4 = (x - 1)(x + 2)$. $Q(x)$ đúng với mọi giá trị của x	0,5
	<p>- Xét tại $x = 1$ ta có: $a + b + 10 - 4 = 0 \rightarrow a + b = -6$ (1)</p>	0,5
	<p>- Xét tại $x = -2$ ta có: $-8a + 4b - 20 - 4 = 0 \rightarrow -8a + 4b = 24$ (2)</p>	
	<p>Từ (1) và (2) tìm được $a = -4$; $b = -2$</p>	0,5
	<p>b)</p> <p>Ta có $p = (n^2 + 1)(n - 3)$</p> <p>Mà $n^2 + 1 \geq 1$ nên để p nguyên tố thì ta có các TH sau:</p> <p>TH1: $n^2 + 1 = 1$ và $n - 3$ nguyên tố</p> <p>$n^2 + 1 = 1 \rightarrow n = 0$, khi đó $n - 3 = -3$ không nguyên tố</p> <p>TH2: $n - 3 = 1$ và $n^2 + 1$ nguyên tố</p> <p>$n - 3 = 1 \rightarrow n = 4$, khi đó $n^2 + 1 = 17$ nguyên tố</p>	<p>1,0</p> <p>0,5</p>

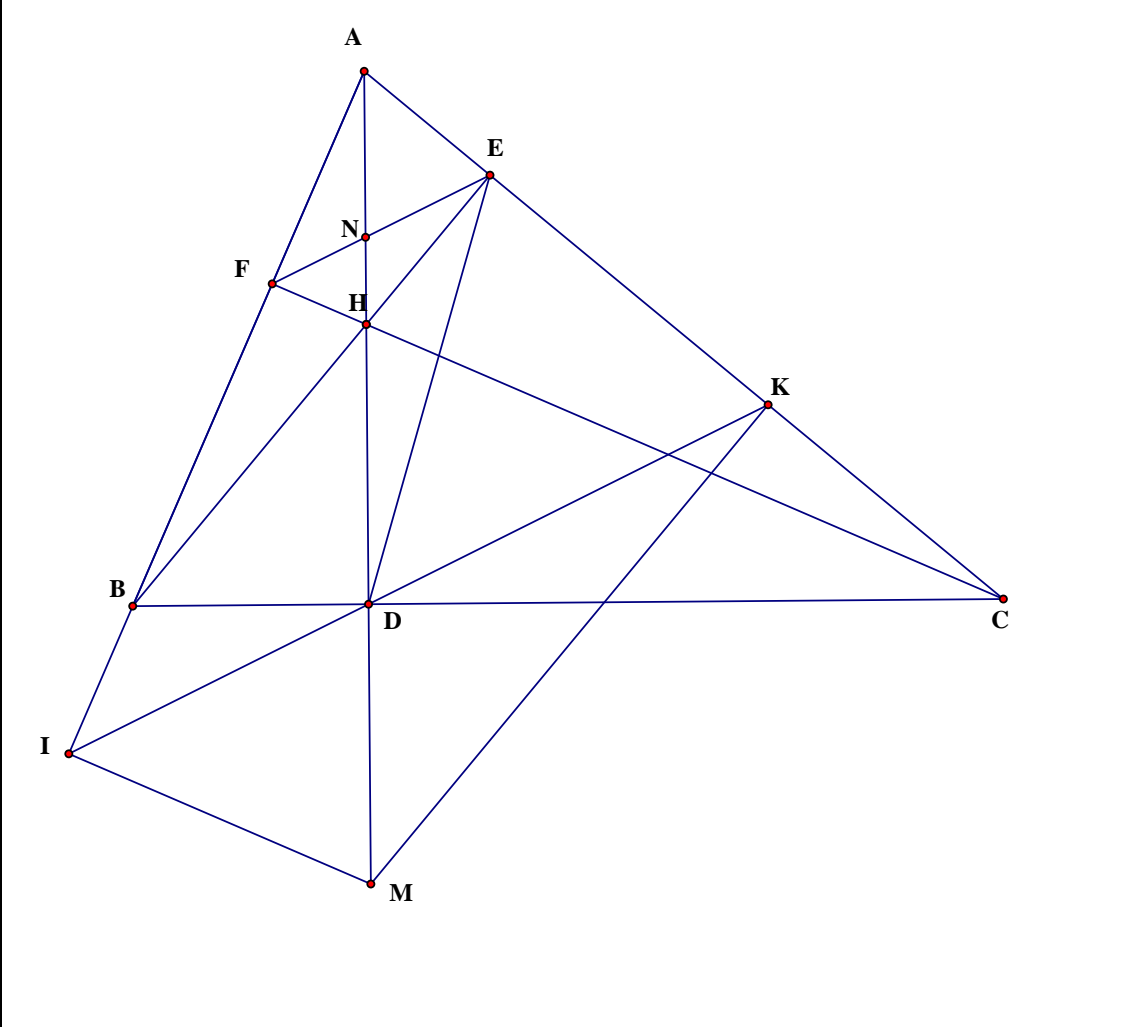
	Vậy $n = 4$	0,5
	<p>c)</p> <p>Rút gọn đúng $A = \frac{4x+3}{x^2+1}$</p> <p>Tìm max A:</p> <p>$A = 4 - \frac{(2x-1)^2}{x^2+1} \leq 4$. Dấu '=' xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ (T/m)</p> <p>Vậy $\max A = 4$ khi $x = \frac{1}{2}$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
2(4đ)	<p>Câu 2: (4,0 điểm)</p> <p>a) Giải phương trình : $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$</p> <p>b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 - y^2 + y = 0$.</p>	

	<p>a) $\frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$</p> <p>$\Leftrightarrow \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \quad (1)$</p> <p>ĐK : $x \neq -4 ; x \neq -5 ; x \neq -6 ; x \neq -7$</p> <p>$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$</p> <p>$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow x = -13 \text{ (t/m)} ; x = 2 \text{ (t/m)}$</p> <p>Vậy $S = \{-13 ; 2\}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>b) (2,0)</p> <p>$x^2 - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 + 4y = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - (2y-1)^2 = -1$</p>	

	$\Leftrightarrow (2x + 2y - 1)(2x - 2y + 1) = -1 = -1 \cdot 1$ <p>Giải 2 TH ta đ- ọc 2 nghiệm là (0; 0); (1; 0).</p>	1.0
		1.0
3(6đ)	<p>Câu 3: (4,0 điểm)</p> <p>a) Cho các số a,b,c khác 0 thỏa mãn $a + b = c + \frac{1}{2023}$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 2023$</p> <p>Tính giá trị của biểu thức: $B = (a^{99} + b^{99} - c^{99}) \left(\frac{1}{a^{99}} + \frac{1}{b^{99}} - \frac{1}{c^{99}} \right)$</p> <p>b) Với n là số tự nhiên lẻ không chia hết cho 5 .</p> <p>Chứng minh: $2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1$ chia hết cho 80.</p>	
	<p>a) (2,0đ) Ta có $a + b = c + \frac{1}{2023} \Rightarrow a + b - c = \frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{1}{a + b - c} = 2023$</p> <p>$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} + 2023 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 2023$</p>	

	$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b-c}$ $\Rightarrow \frac{a+b}{ab} - \frac{a+b-c+c}{c(a+b-c)} = 0 \Rightarrow (a+b) \frac{ac+bc-c^2-ab}{abc(a+b-c)} = 0 \Rightarrow (a+b)(b-c)(a-c) = 0$ <p>Nếu $a+b = 0 \rightarrow A = 1$</p> <p>Nếu $b-c = 0 \rightarrow A = 1$</p> <p>Nếu $a-c = 0 \rightarrow A = 1$</p> <p>Vậy $A = 1$</p>	<p>0,75</p> <p>0,75</p> <p>0,5</p>
	<p>b) Ta có $2n^5 + n^4 - 10n^3 + 8n - 1 = (n^4 - 1) + (2n^5 - 10n^3 + 8n)$</p> $= (n^4 - 1) + 2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ <p>Ta thấy Với mọi n lẻ thì $2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ chia hết cho 5 và 16</p>	<p>0,5</p>

	<p>→ $2n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ chia hết cho 80 (1)</p> <p>Với n không chia hết cho 5 thì $n^4 - 1 = n^{5-1} - 1$ chia hết cho 5 (Fecma)</p> <p>Với n lẻ nên $n^4 - 1 = (n^2 + 1)(n-1)(n+1)$ chia hết cho 16</p> <p>→ $n^4 - 1$ chia hết cho 80 (2)</p> <p>→ Từ (1) và (2) → đpcm</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
4(6đ)	<p>Câu 4: (6,0 điểm)</p> <p>Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và $AB < AC$, các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.</p> <p>a) Chứng minh: $\angle AEF = \angle ABC$</p> <p>b) Gọi M là điểm đối xứng của H qua D. Giao điểm của EF với AM là N.</p> <p>Chứng minh: $HN \cdot AD = AN \cdot DM$.</p> <p>c) Gọi I và K lần lượt là hình chiếu của M trên AB và AC. Chứng minh ba điểm I, D, K thẳng hàng</p>	



a) Xét $\triangle AEB$ và $\triangle AFC$ có :

EAB chung

AEB = AFC(= 90°)

0,5

	<p>Do đó $\triangle AEB \simeq \triangle AFC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$</p> <p>Xét $\triangle AEF$ và $\triangle ABC$ có : \widehat{BAC} chung</p> $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} \text{ (vì } \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \text{)}$ <p>Do đó $\triangle AEF \simeq \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>b) Chứng minh tương tự câu a ta được : $\widehat{CED} = \widehat{CBA}$.</p> <p>Do đó : $\widehat{AEF} = \widehat{CED}$</p> <p>Vì $\widehat{BEF} + \widehat{AEF} = \widehat{BED} + \widehat{CED} = 90^\circ$ nên $\widehat{BEF} = \widehat{BED} \Rightarrow EB$ là tia phân giác của góc DEF</p> <p>Tam giác NED có EH là tia phân giác của \widehat{DEN} nên: $\frac{HN}{HD} = \frac{EN}{ED}$ (1)</p>	<p>0,5</p>

	<p>Vì $EA \perp EH$ nên EA là tia phân giác ngoài tại đỉnh E của $\triangle DEN$.</p> $\Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{EN}{ED} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{HN}{HD} = \frac{AN}{AD}$, mà $HD=DM$ (Do M là điểm đối xứng của H qua D)</p> <p>Nên $\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow HN \cdot AD = AN \cdot DM$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>c) $\frac{HN}{DM} = \frac{AN}{AD} = \frac{AN + HN}{AD + DM} = \frac{AH}{AM} \Rightarrow \frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}$</p> <p>$\triangle AMI$ có $HF \parallel MI$ (cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM}$ (định lí Ta lét)</p>	<p>0,5</p>

	<p>Mà $\frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AM}$ nên $\frac{AF}{AI} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow FN // ID$ (định lí Ta lét đảo) (3)</p> <p>$\triangle AMK$ có $HE // MK$ (cùng $\perp AC$) $\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AH}{AM}$ (định lí Ta lét),</p> <p>$\triangle AIK$ có $\frac{AF}{AI} = \frac{AH}{AM} = \frac{AE}{AK} \Rightarrow IK // FE$ (Định lí Ta lét đảo) (4)</p> <p>Từ (3) và (4) suy ra I, K, D thẳng hàng</p>	0,5
		0,5
Câu	Câu 5. (1,0 điểm)	
5(1,0)	Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $ a < 1$; $ b < 1$; $ c < 1$ và $ab + bc + ca = 2$.	

Chứng minh $\frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq 6$

Chứng minh được BĐT: Với a,b,c bất kỳ và x,y,z là các số dương ta có:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \quad (*) \quad \text{Dấu '=' xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

Vì $|a| < 1$; $|b| < 1$; $|c| < 1$ nên $1 - b^2$; $1 - c^2$; $1 - a^2$ là các số dương. Áp dụng

$$\text{BĐT} (*) \text{ ta có: } \frac{a^2}{1-b^2} + \frac{b^2}{1-c^2} + \frac{c^2}{1-a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3-(b^2+c^2+a^2)}$$

$$\text{Lại có } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad (b-c)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc;$$

$$(c-a)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \text{Dấu '=' xảy ra khi } a = b = c$$

$$\Rightarrow -(a^2 + b^2 + c^2) \leq -(ab + bc + ca) \Rightarrow 3 - (a^2 + b^2 + c^2) \leq 3 - (ab + bc + ca)$$

0,25

0,25

vì $|a| < 1$; $|b| < 1$; $|c| < 1$ nên $3 - (a^2 + b^2 + c^2) > 0$; $3 - (ab + bc + ca) > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 - (a^2 + b^2 + c^2)} \geq \frac{1}{3 - (ab + bc + ca)} = \frac{1}{3 - 2} = 1 \quad (\text{do } ab + bc + ca = 2)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1 - b^2} + \frac{b^2}{1 - c^2} + \frac{c^2}{1 - a^2} \geq (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 4$$

Mà $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 2$ (do $ab + bc + ca = 2$)

$$\text{Nên } \frac{a^2}{1 - b^2} + \frac{b^2}{1 - c^2} + \frac{c^2}{1 - a^2} \geq 2 + 4 = 6$$

$$\text{Dấu '=' xảy ra khi } \begin{cases} \frac{a}{1 - b^2} = \frac{b}{1 - c^2} = \frac{c}{1 - a^2} \\ a = b = c \\ ab + bc + ca = 2 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Vậy } \frac{a^2}{1 - b^2} + \frac{b^2}{1 - c^2} + \frac{c^2}{1 - a^2} \geq 6. \text{ Dấu '=' xảy ra khi } a = b = c = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

0,25

		0,25
--	--	------

Ghi chú: - Học sinh giải cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

- Câu 4 nếu học sinh không vẽ hoặc vẽ hình sai thì không chấm.

PHÒNG GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO**ĐỀ KSCL HSG CẤP HUYỆN****HUYỆN NAM TRỰC****NĂM HỌC 2023 - 2024****ĐỀ CHÍNH THỨC****Môn : Toán 8**

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (5 điểm)

1) Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$

b) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$.

2) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 2023$. Chứng minh rằng

$$A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023) \text{ là số chính phương}$$

Câu 2. (5 điểm)

1) Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

b) $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$

2) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$.

Câu 3. (7,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) có đường cao AH và BK cắt nhau tại D. Gọi M là trung điểm của AB, P là điểm đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh AHBP là hình vuông.

b) Chứng minh $HP = 2MK$ và $\triangle BHD = \triangle AHC$.

c) Qua D kẻ đường thẳng vuông góc với AH tại D, qua C kẻ đường thẳng vuông góc với BC tại C, hai đường thẳng này cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.

Câu 4. (2,0 điểm)

1) Tìm đa thức dư khi chia đa thức $P(x)$ cho đa thức $(x-1)(x^2+1)$ biết đa thức $P(x)$ chia cho $x-1$ được dư là 4 và khi chia cho x^2+1 được dư là $3x+5$.

2) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy.$$

Câu 5. (1,0 điểm)

Lấy 2020 điểm thuộc miền trong của một tứ giác để cùng với 4 đỉnh ta được 2024 điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của tứ giác ban đầu là 1 cm^2 . Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2024 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4042} \text{ cm}^2$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$1) a) \quad x^2 - 5xy + 4y^2 + x - y$$

$$= x^2 - xy - 4xy + 4y^2 + x - y$$

$$= x(x - y) - 4y(x - y) + (x - y)$$

$$= (x - y)(x - 4y + 1)$$

$$b) \quad x^3 - 9x^2 + 6x + 16$$

$$= x^3 - 8x^2 - x^2 + 8x - 2x + 16$$

$$= x^2(x - 8) - x(x - 8) - 2(x - 8)$$

$$= (x - 8)(x^2 - x - 2)$$

$$= (x - 8)(x^2 - 2x + x - 2)$$

$$= (x - 8)(x - 2)(x + 1)$$

$$2) \quad \text{Ta có: } ab + bc + ca = 2023$$

$$\Rightarrow a^2 + 2023 = a^2 + ab + bc + ca = a(a + b) + c(b + a) = (a + c)(a + b)$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } b^2 + 2023 = (b + a)(b + c); c^2 + 2023 = (c + a)(c + b)$$

Khi đó: $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023) = [(a+b)(b+c)(c+a)]^2$

Vì a, b, c là các số nguyên nên $a + b; b + c; c + a$ là các số nguyên

Do vậy $[(a+b)(b+c)(c+a)]^2$ là số chính phương hay A là số chính phương.

Vậy $A = (a^2 + 2023)(b^2 + 2023)(c^2 + 2023)$ là số chính phương với các số nguyên a, b, c

thỏa mãn $ab + bc + ca = 2023$.

Câu 2:

1) a) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 3\}$

b) $(x^2 - 4)(x^2 - 10) = 72$

Đặt $x^2 - 7 = y$. Khi đó ta có:

$$(y+3)(y-3) = 72$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 9 = 72$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ y = -9 \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 9 \Rightarrow x^2 - 7 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Với } y = -9 \Rightarrow x^2 - 7 = -9 \Leftrightarrow x^2 = -2 \text{ (Vô lí vì } x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x)$$

$$\text{Vậy } x \in \{-4; 4\}$$

$$2) \quad xy^2 + 2xy + x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y^2 + 2y + 1) - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y+1)^2 - 3(y+1) = -3$$

$$\Leftrightarrow (y+1)(xy + x - 3) = -3$$

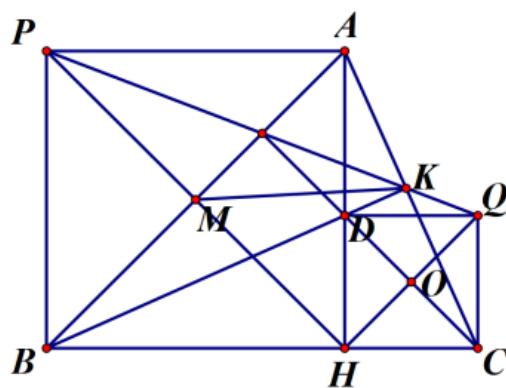
$$\text{Vì } x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y+1 \in \mathbb{Z}; xy + x - 3 \in \mathbb{Z} \text{ mà } -3 = 1 \cdot (-3) = 3 \cdot (-1)$$

Ta có bảng giá trị sau:

$y + 1$	1	-3	-1	3
y	0	-4	-2	2
$xy + x - 3$	-3	1	3	-1
x	0	$\frac{-4}{3}$	-6	$\frac{2}{3}$
	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn	Loại

Vậy các cặp giá trị nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(0; 0); (-6; -2)$

Câu 3:



a) Ta có P đối xứng với H qua M nên M là trung điểm của PH.

Xét tứ giác AHBP có M là trung điểm của AB và M là trung điểm của PH

Suy ra AHBP là hình bình hành

Lại có $AHB = 90^\circ$ (do AH là đường cao của tam giác ABC)

Do đó AHBP là hình chữ nhật.

Suy ra $PBH = 90^\circ$ mà $ABH = 45^\circ$ nên BA là phân giác của PBH

Hình chữ nhật AHBP có BA là phân giác của PBH nên AHBP là hình vuông.

b) Xét $\triangle ABK$ vuông tại K có KM là đường trung tuyến nên $KM = \frac{1}{2} AB$

Lại có AHBP là hình vuông nên $PH = AB$

Do đó: $KM = \frac{1}{2} PH \Rightarrow PH = 2KM$

Chứng minh $HBD = HAC$ (cùng phụ với ACB)

Vì AHBP là hình vuông nên $AH = HB$

Chứng minh $\triangle BHD = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Gọi O là giao điểm của DC, QH

C/m HDQC là hình vuông nên $DC = QH$ và O là trung điểm của DC, QH

Ta có $\triangle DKC$ vuông tại K có KO là đường trung tuyến nên $KO = \frac{1}{2} DC$

Do đó $KO = \frac{1}{2}QH \Rightarrow \Delta KQH$ vuông tại K nên $HKQ = 90^\circ$

Chứng minh tương tự $HKP = 90^\circ$

Do đó $PKQ = 180^\circ$

Vậy P, K, Q thẳng hàng.

Câu 4:

1) Vì đa thức $(x-1)(x^2+1)$ có bậc là 3

$\Rightarrow P(x)$ chia cho đa thức $(x-1)(x^2+1)$ có thương là $Q(x)$ và đa thức dư có dạng là ax^2+bx+c

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x^2+1)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-1)(x^2+1)Q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a \\ &= [(x-1)Q(x) + a](x^2+1) + bx + c - a \end{aligned}$$

Do đó $P(x)$ chia cho x^2+1 dư $bx+c-a$

$$\text{Mà } P(x) \text{ chia } x^2+1 \text{ dư } 3x+5 \Rightarrow \begin{cases} b=3 \\ c-a=5 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } P(x) \text{ chia } (x-1) \text{ dư } 4 \Rightarrow P(1) = 4 \Rightarrow a+b+c = 4 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases}$$

2) Ta có: $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$

$$= x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy$$

$$= x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$$

Do $x + y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ thay vào C ta được:

$$C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy$$

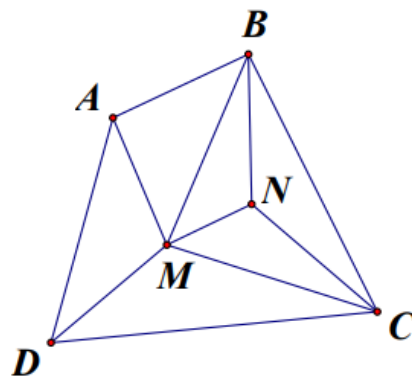
$$= x^2y^2 + 12xy + 4$$

$$= (x^2y^2 + 2xy \cdot 6 + 36) - 32$$

$$= (xy + 6)^2 - 32 \geq -32$$

Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$

Câu 5:



Xét tứ giác ABCD có diện tích bằng 1 cm^2 .

Với điểm thứ nhất M, ta có 4 tam giác chung đỉnh M đôi một không có điểm trong chung.

Với điểm thứ hai N phải là điểm trong của một trong 4 tam giác trên.

Nối N với 3 đỉnh của tam giác đó, tạo nên 3 tam giác chung đỉnh N.

Tuy nhiên số tam giác đôi một không có điểm trong chung chỉ tăng thêm 2 vì mất đi một tam giác chứa điểm N.

Số tam giác không có điểm trong chung lúc này là: $4 + 2$

Tương tự với $2020 - 2 = 2018$ điểm còn lại, cuối cùng số tam giác đôi một không có điểm trong chung là:

$$4 + 2 + 2018 \cdot 2 = 4042$$

Tổng diện tích của 4042 các tam giác đó bằng 1 cm^2 , nên tồn tại ít nhất một tam giác có diện tích không

vượt quá $\frac{1}{4042} \text{ cm}^2$.

PHÒNG GD&ĐT TP. BẮC GIANG

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI

TRƯỜNG THCS LÊ QUÝ ĐÔN

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

MÔN KHẢO SÁT: TOÁN 8

Ngày khảo sát: 11/02/2023

(Đề có: 01 trang)

Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề**Câu 1:** (5,0 điểm)

1) Cho biểu thức $M = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$, với $a \neq 0$; $a \neq 1$.

a) Rút gọn M .b) Tìm giá trị của a để M đạt giá trị lớn nhất.2) Cho các số thực a, b thỏa mãn: $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = 3a^3 - 2b^4 + 2022.$$

Câu 2: (4,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 3x + 1 = 0$

2) Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho $(x-3)$ dư 2; $f(x)$ chia cho $(x+4)$ dư 9 và

$f(x)$ chia cho $(x^2 + x - 12)$ được thương là $(x^2 + 3)$ và còn dư.

Câu 3: (4,0 điểm)

1) Tìm các cặp số tự nhiên (x, y) thỏa mãn : $x^2 + 3^y = 3026$

2) Cho a và b là các số tự nhiên thỏa mãn $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Chứng minh rằng: $a - b$ và

$2a + 2b + 1$ là các số chính phương.

Câu 4: (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE, CF . Gọi H là trực tâm của tam giác

ABC . Chứng minh:

1) $\triangle ABC$ đồng dạng với $\triangle AEF$.

$$2) \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1.$$

$$3) \frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4.$$

Câu 5: (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}$. Tìm giá trị lớn

nhất và nhỏ nhất của biểu thức $Q = x + y + z$.

.....**HẾT**.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
Câu 1		5.0
1.1a	$M = \left[\frac{(a-1)^2}{a^2 + a + 1} - \frac{1 - 2a^2 + 4a}{(a-1)(a^2 + a + 1)} + \frac{1}{a-1} \right] \cdot \frac{4a^2}{a(a^2 + 4)}$	0.5
(2,0 điểm)	$M = \frac{(a-1)^3 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4}$	0.5
	$M = \frac{a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 1 + 2a^2 - 4a + a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4}$	0.5

	$M = \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} \cdot \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{4a}{a^2 + 4}$	0.5
	KL	
	<p>Ta có $M = \frac{4a}{a^2 + 4} = \frac{(a^2 + 4) - (a^2 - 4a + 4)}{a^2 + 4} = 1 - \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4}$</p>	0.5
1.1b		
(1.5 điểm)	<p>Vì $\frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} \geq 0$ với mọi a nên $1 - \frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} \leq 1$ với mọi a.</p> <p>Dấu "=" xảy ra khi $\frac{(a - 2)^2}{a^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow a = 2$ (tm)</p>	0.5
	Vậy giá trị lớn nhất của M là 1 khi $a = 2$.	0.5
1.2	Ta có $a^2 + b^2 + ab - a + b + 1 = 0$	
(1.5 điểm)	$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2ab - 2a + 2b + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) = 0$	0.5

	$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \\ (b+1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$	0.5
	<p>Thay $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ vào $M = 3a^3 - 2b^4 - 1$ ta được $M = 3.1^3 - 2(-1)^4 + 2022 = 2023$</p> <p>Vậy giá trị của biểu thức $M = 2023$.</p>	0.5
Câu 2		4.0
2.1	+) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình	0.5
(2.0	+) Chia cả hai vế của phương trình cho x^3 ta được:	
điểm)	$x^3 - 3x^2 + 6x - 7 + \frac{6}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0 \Leftrightarrow (x^3 + \frac{1}{x^3}) - 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 6(x + \frac{1}{x}) - 7 = 0$	0.5
	Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = t^3 - 3t$	0.5
	Thay vào phương trình ta được:	0.5

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0 \text{ vô nghiệm}$$

KL

2.2

(2.0 điểm)

Do $f(x)$ chia cho $x^2 + x - 12 = (x-3)(x+4)$ được thương là $x^2 + 3$ còn dư nên ta có :

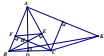
$$f(x) = (x+4)(x-3)(x^2+3) + a.x + b$$

Cho $x = -4 \Rightarrow f(x) = -4a + b = 9$

Cho $x = 3 \Rightarrow f(x) = 3a + b = 2$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} -4a + b = 9 \\ 3a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \end{cases}$

	Đa thức cần tìm: $f(x) = (x+4)(x-3)(x^2+3) - x + 5$	0.5
Câu 3		4.0
3.1 (2 điểm)	Xét $y = 0 \Rightarrow x^2 = 3026 - 1 = 3025 \Rightarrow x = 55$	0.5
	Xét $y > 0 \Rightarrow 3^y : 3$ còn $x^2 : 3$ dư 0 hoặc 1	0.5
	$\Rightarrow x^2 + 3^y : 3$ dư 0 hoặc dư 1, Mà 3026 chia 3 dư 2, vô lý	0.5
	KL: Vậy $(x; y) = (55; 0)$.	0.5
3.2 (2 điểm)	$2a^2 + a = 3b^2 + b \Leftrightarrow (2a^2 - 2b^2) + (a - b) = b^2 \Leftrightarrow (a - b)(2a + 2b + 1) = b^2 \quad (1)$ Gọi $(a - b; 2a + 2b + 1) = d$.	0.5

	Khi đó : $b^2 = (a-b)(2a+2b+1):d^2 \Rightarrow b:d$	0.5
	Mà $a-b:d \Rightarrow a:d \Rightarrow 2a+2b:d \Rightarrow (2a+2b+1)-(2a+2b):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d=1$	0.5
	Như vậy: $(a-b; 2a+2b+1) = 1$.	
	Từ đó, theo (1) suy ra: $a-b$ và $2a+2b+1$ là các số chính phương.	0.5
Câu 4		
4.1 (2 điểm)	Chứng minh đúng: $\triangle AEB \sim \triangle AFC$.	0.5
	Suy ra: $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$	0.5
	Chứng minh đúng: $\triangle ABC \sim \triangle AEF$	1.0

4.2 (2.0 điểm)	Chỉ ra được: $\frac{HD}{AD} = \frac{S_{BHC}}{S_{ABC}}$	0.5
	Tương tự: $\frac{HE}{BE} = \frac{S_{AHC}}{S_{ABC}}; \frac{HF}{CF} = \frac{S_{AHB}}{S_{ABC}}$.	0.5
	Suy ra: $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{S_{BHC} + S_{AHC} + S_{AHB}}{S_{ABC}}$	0.5
	$\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$	0.5
4.3 (1.0 điểm)	Dựng đường thẳng d đi qua C song song với AB . Gọi K là điểm đối xứng với A qua d . Chứng minh được góc BAK vuông, $CK=AC$, $AK = 2CF$. Xét ba điểm B, C, K ta có $BK \leq BC + CK$.	0.5
	Tam giác BAK vuông tại A nên:	0.5

	$AB^2 + AK^2 = BK^2 \Rightarrow AB^2 + AK^2 \leq BC + CK^2$ $\Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \leq BC + CK^2 \Rightarrow 4CF^2 \leq BC + CA^2 - AB^2.$	
	<p>Hoàn toàn tương tự ta có</p> $4AD^2 \leq AB + AC^2 - BC^2,$ $4BE^2 \leq AB + BC^2 - AC^2.$	0.5
	<p>Cộng vế với vế ba bất đẳng thức trên ta có</p> $4AD^2 + BE^2 + CF^2 \leq AB + AC + BC^2 \Leftrightarrow \frac{AB + AC + BC^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4.$	0.5
Câu 5		
(1 điểm)	<p>Ta có $y^2 + yz + z^2 = 1011 - \frac{3x^2}{2}$</p> $\Leftrightarrow 2y^2 + 2yz + 2z^2 = 2022 - 3x^2$ $\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 2022 - x^2 + 2xy - y^2 - z^2 + 2xz - x^2$	0.5

	$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 2022 - (x-y)^2 - (x-z)^2 \leq 2022$ $\Leftrightarrow -\sqrt{2022} \leq x+y+z \leq \sqrt{2022}$	
	$\Rightarrow x+y+z \text{ nhỏ nhất bằng } -\sqrt{2022} \text{ khi } x=y=z=\frac{-\sqrt{2022}}{3}$ $x+y+z \text{ lớn nhất bằng } \sqrt{2022} \text{ khi } x=y=z=\frac{\sqrt{2022}}{3}$	0.5

Lưu ý khi chấm bài:

- Trên đây chỉ là sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic.

Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.

- Với bài toán hình học nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.

ĐỀ SỐ 1**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH****ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn thi: **Toán 8**(Đề thi gồm: **01** trang)Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)**Câu 1:** (4,0 điểm): Phân tích đa thức thành nhân tử:

a. $x^2 + 7x + 12$

b. $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$

Câu 2: (4,0 điểm):

a. Chứng minh rằng nếu: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$ thì $x = y = z$

b. Tìm dư trong phép chia đa thức $P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2022$

cho đa thức $x^2 + 10x + 21$.

Câu 3: (4,0 điểm):

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 2x^2 + 3x - 4$

b. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $2xy + 3x - 5y = 9$

Câu 4: (7,0 điểm):

Cho hình vuông ABCD. Qua A vẽ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt đường thẳng BC tại P và R, cắt đường thẳng CD tại Q và S.

a. Chứng minh $\triangle AQR$ và $\triangle APS$ là các tam giác cân.

b. QR cắt PS tại H; M, N lần lượt là trung điểm của QR và PS. Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

c. Chứng minh P là trực tâm $\triangle SQR$.

d. Chứng minh MN là đường trung trực của AC.

e. Chứng minh bốn điểm M, B, N, D thẳng hàng.

Câu 5: (1,0 điểm):

Chứng minh: $B = n^3 - 6n^2 + 11n - 6 : 24$ với n là một số tự nhiên lẻ.

Hết

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu.*

- *Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

.....

Cán bộ coi thi số 1: Cán bộ coi thi số 2:

.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH

Môn: Toán 8

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4,0 điểm)	a) $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = (x^2 + 3x) + (4x + 12)$ $= x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4)$	1,0
	b) $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023 = x^4 - x + 2023x^2 + 2023x + 2023$	1,0
	$= x(x^3 - 1) + 2023(x^2 + x + 1) = x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2023(x^2 + x + 1)$	0,5
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2023)$	1,0
		0,5
Câu 2 (4,0 điểm)	a) Ta có: $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ $\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy + 2yz + 2zx$ $\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 = 0$	1,0

	$\Rightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \quad (1)$ <p>Ta có : $(x - y)^2 \geq 0, (y - z)^2 \geq 0, (z - x)^2 \geq 0$</p> <p>Do đó: $(1) \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$</p> <p>b) $P(x) = (x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 2022 = (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2022$</p> <p>Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ ($t \neq -3; t \neq -7$), biểu thức P(x) được viết lại:</p> $P(x) = (t - 5)(t + 3) + 2022 = t^2 - 2t + 2007$ <p>Do đó khi chia $t^2 - 2t + 2007$ cho t ta có số dư là 2007</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p> <p>1,0</p>
<p>Câu 3</p> <p>(4,0 điểm)</p>	<p>a) Ta có: $A = 2x^2 + 3x - 4 = 2\left(x^2 + 2x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16}\right) - \frac{9}{8} - 4$</p> $= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{8} \geq \frac{-41}{8}$ <p>Dấu “=” xảy ra khi $x + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{-41}{8}$ đạt được khi $x = -\frac{3}{4}$</p>	<p>1,0</p>

b) $2xy + 3x - 5y = 9$

$$\Rightarrow 4xy + 6x - 10y = 18 \Rightarrow 2x(2y + 3) - 5(2y + 3) = 3$$

$\Rightarrow (2y + 3)(2x - 5) = 3$ do x, y là các số nguyên nên ta có bảng sau:

$2x - 5$	-3	-1	1	3
$2y + 3$	-1	-3	3	1
x	1	2	3	4
y	-2	-3	0	-1

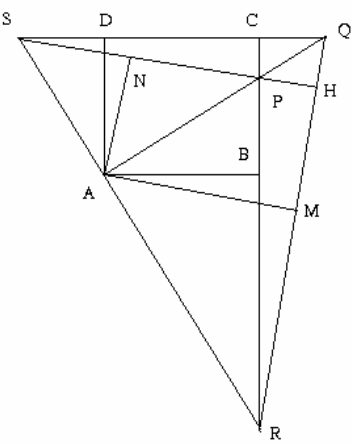
Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là: $(1; -2), (2; -3), (3; 0), (4; -1)$

1,0

0,5

0,5

1,0

<p>Câu 4</p> <p>(7,0 điểm)</p>	<p>Vẽ đúng hình, cân đối đẹp.</p>  <p>a) $\triangle ADQ = \triangle ABR$ (cgv-gn) vì $DAQ = BAR$ (cùng phụ với BAQ) và $DA = BA$ (cạnh hình vuông). Suy ra $AQ = AR$, nên $\triangle AQR$ là tam giác vuông cân tại A. Chứng minh tương tự ta có: $\triangle ABP = \triangle ADS$ do đó $AP = AS$ và $\triangle APS$ là tam giác vuông cân tại A.</p> <p>b) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân AQR và APS nên $AN \perp SP$ và $AM \perp RQ$. Mặt khác: $PAN = PAM = 45^\circ$ nên góc MAN vuông. Vậy tứ giác AMHN có ba góc vuông, nên AMHN là hình chữ nhật.</p> <p>c) Theo giả thiết: $QA \perp RS$, $RC \perp SQ$ nên QA và RC là hai đường cao của $\triangle SQR$. Vậy P là trực tâm của $\triangle SQR$.</p> <p>d) Trong tam giác vuông cân AQR thì MA là trung điểm nên $AM = \frac{1}{2}$</p>	<p>0,5</p> <p>1,5</p> <p>1,5</p>
--	--	----------------------------------

	<p>QR</p> <p>$\Rightarrow MA = MC$, nghĩa là M cách đều A và C.</p> <p>Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân ASP và tam giác vuông SCP, ta có $NA = NC$, nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC</p> <p>e) Vì ABCD là hình vuông nên B và D cũng cách đều A và C. Nói cách khác, bốn điểm M, N, B, D cùng cách đều A và C nên chúng nằm trên đường trung trực của AC, nghĩa là chúng thẳng hàng.</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p> <p>1,5</p>
--	---	----------------------------------

<p>Câu 5</p> <p>(1,0 điểm)</p>	$ \begin{aligned} n^3 - 6n^2 + 11n - 6 &= n^3 - 3n^2 - 3n^2 + 9n + 2n - 6 \\ &= n^2(n-3) - 3n(n-3) + 2(n-3) \\ &= (n-3)(n^2 - 3n + 2) \\ &= (n-3)[(n^2 - n) - (2n - 2)] \\ &= (n-3)[n(n-1) - 2(n-1)] \\ &= (n-3)(n-2)(n-1) \end{aligned} $ <p>Do n lẻ nên $n-3$, $n-2$, $n-1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp trong đó có hai số chẵn. Trong 2 số chẵn này có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 4.</p> <p>Nên $(n-3)(n-2)(n-1) : 2.4 = 8$</p> <p>Mặt khác $(n-3)(n-2)(n-1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên</p> $(n-3)(n-2)(n-1) : 3 \text{ mà } (8;3) = 1$ $\Rightarrow (n-3)(n-2)(n-1) : 8.3 = 24$ <p>Vậy, $n^3 - 6n^2 + 11n - 6 : 24$ với mọi số tự nhiên n lẻ.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---	-----------------------

*** Lưu ý: Học sinh làm cách khác đúng vẫn tính điểm tối đa.**

ĐỀ SỐ 2

Bài 1 (3 điểm). Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15$

b) $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Bài 2 (3 điểm).

a) Tính $A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$

b) Chứng minh $(a^2 + 3a + 1)^2 - 1$ chia hết cho 24 với a là số tự nhiên.

Bài 3 (3 điểm). Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$

Bài 4 (4 điểm). Tìm giá trị nguyên của x để phân thức sau có giá trị nguyên.

$$A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3}$$

Bài 5 (4 điểm): Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm nằm giữa B và C. Từ M kẻ MD song song AB ($D \in AC$), kẻ ME song song AC ($E \in AB$)

a) Xác định vị trí của M nằm trên BC để DE ngắn nhất.

b) Tính DE ngắn nhất với $AB = 4(\text{cm})$; $\angle ABC = 60^\circ$ 

Bài 6 (3 điểm). Tìm x biết: $x^5(3x - 1)^{m+3} : x^5(3x - 1)^{m-1} - 5^6 : 5^2 = 0$;

(với $x \neq 0$; $x \neq \frac{1}{3}$; $m \in \mathbb{N}^*$)

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT TOÁN LỚP 8

Bài 1 (3 điểm):

$$a) a^4 + 8a^3 + 14a^2 - 8a - 15 = a^4 + 8a^3 + 15a^2 - a^2 - 8a - 15$$

$$= (a^4 + 8a^3 + 15a^2) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= a^2(a^2 + 8a + 15) - (a^2 + 8a + 15)$$

$$= (a^2 + 8a + 15)(a^2 - 1)$$

$$= (a+3)(a+5)(a+1)(a-1)$$

$$b) 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$= (a + b - c)(a + b + c)(c - a + b)(c + a - b)$$

Bài 2 (3 điểm):

a) Ta có $3x(x+1) = x(x+1)(x+2) - (x-1)x(x+1)$.

Do đó: $3A = 1.2.3 - 0.1.2 + 2.3.4 - 1.2.3 + 3.4.5 - 2.3.4 + \dots + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = n(n+1)(n+2)$

$$\Rightarrow A = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

b) $(a^2+3a+1)^2-1 = (a^2+3a+1+1)(a^2+3a+1-1) = (a^2+3a+2)(a^2+3a) = a(a+1)(a+2)(a+3)$ chia hết cho 24. (tích

của bốn số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 24)

Bài 3 (3 điểm):

$$M = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

$$M = \left(\frac{b+c}{a} + 1 \right) + \left(\frac{c+a}{b} + 1 \right) + \left(\frac{a+b}{c} + 1 \right) - 3$$

$$M = \frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} - 3$$

$$M = (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3$$

$$M = -3$$

Bài 4 (4 điểm).

$$A = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 8}{x - 3} = 2x^2 + 1 - \frac{5}{x - 3} \quad (x \neq 3)$$

$$\Rightarrow x - 3 \text{ là ước của } 5 \Rightarrow \text{Ư}(5) = \{-5; -1; 1; 5\}$$

$$\text{Nếu } x - 3 = -5 \Rightarrow x = -2$$

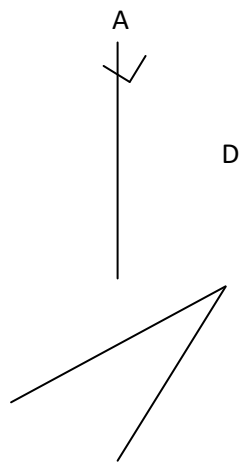
$$\text{Nếu } x - 3 = -1 \Rightarrow x = 2$$

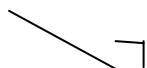
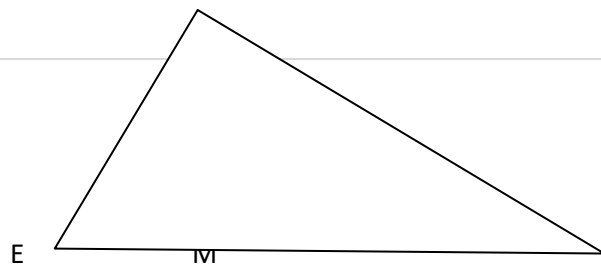
$$\text{Nếu } x - 3 = 1 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Nếu } x - 3 = 5 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{Vậy } x = -2; x = 2; x = 4; x = 8$$

Bài 5 (4 điểm).





B

C

M

a) Tứ giác ADME có:



$AE \parallel DM$ ($AB \parallel DM$) ; $AD \parallel EM$ ($AC \parallel EM$) và $A = 90^\circ$ (gt)

\Rightarrow tứ giác ADME là hình chữ nhật

$\Rightarrow DE = AM$ (t/c hình chữ nhật)

Mà AM ngắn nhất khi $AM \perp BC$ tức là AM là đường cao ΔABC

Vậy M là chân đường cao kẻ từ A đến BC của ΔABC



b) Xét ΔABM vuông tại M có $\angle B = 60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM$ là nửa tam giác đều có cạnh AB

$$\Rightarrow BM = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2(\text{cm})$$

$$\Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2 = 4^2 - 2^2 = 12 \text{ (pi-ta-go)}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{12} \text{ cm}$$

Vậy AM ngắn nhất bằng $\sqrt{12}$ cm \Rightarrow DE ngắn nhất bằng $\sqrt{12}$ cm

Câu 6 (3 điểm):

Ta có: $x^5(3x-1)^{m+3} : x^5(3x-1)^{m-1} - 5^6 : 5^2 = 0$ (với $x \neq 0 ; x \neq \frac{1}{3}$)

$$(3x-1)^{m+3-(m-1)} - 5^{6-2} = 0$$

$$(3x-1)^4 = 5^4$$

$$\Leftrightarrow 3x-1 = 5 \text{ hoặc } 3x-1 = -5$$

$$x = 2 \qquad x = \frac{-4}{3}$$

Vậy $x = 2$; $x = \frac{-4}{3}$

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

ĐỀ SỐ 3

Câu 1 (4 điểm).

Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến x

$$4(6 - x) + x^2(2 + 3x) - x(5x - 4) + 3x^2(1 - x)$$

Câu 2 (4 điểm).

Phân tích đa thức sau đây thành nhân tử

a. $x^2y + xy^2 - x - y$

b. $x^2 + 5x - 50$

Câu 3 (3 điểm).

Cho phân thức $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

a. Tìm điều kiện của x để A xác định

b. Rút gọn A

c. Tìm x để giá trị của A bằng 1

Câu 4 (4 điểm).

Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = BA$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm G sao cho $CG = CA$. Kẻ BH vuông góc với AD, CK vuông góc với AG. Chứng minh rằng:

a. $AH = HD$

b. $HK \parallel BC$

Câu 5 (3 điểm):

Cho tam giác đều ABC. M là điểm thuộc cạnh BC. I và D lần lượt là trung điểm của AM và BC; E, F là chân đường vuông góc kẻ từ M đến AB và AC.

a. Tính số đo các góc \widehat{DIE} và \widehat{DIF} .

b. Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

Câu 6 (2 điểm).

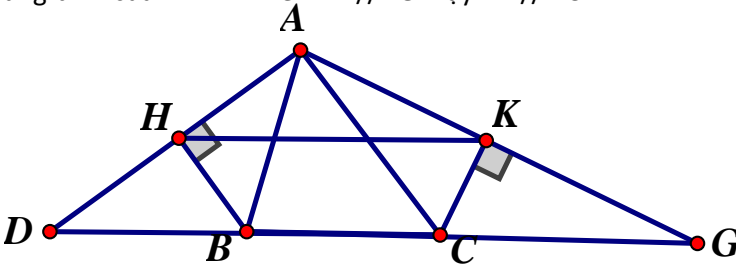
Tìm tất cả các tam giác vuông có số đo các cạnh là các số nguyên dương và số đo diện tích bằng số đo chu vi.

----- HẾT -----

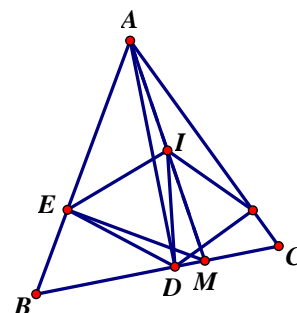
Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (4đ)	$4(6 - x) + x^2(2 + 3x) - x(5x - 4) + 3x^2(1 - x)$ $= 24 - 4x + 2x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 4x + 3x^2 - 3x^3$ $= 24$	 2đ 2đ
Câu 2 (4đ)	a. $x^2y + xy^2 - x - y$ $= (x^2y + xy^2) - (x + y) = xy(x + y) - (x + y)$ $= (xy - 1)(x + y)$ b. $x^2 + 5x - 50 = x^2 + 10x - 5x - 50$ $= (x^2 + 10x) - (5x + 50) = x(x + 10) - 5(x + 10)$ $= (x - 5)(x + 10)$	 1đ 1đ 1đ 0.5đ

		0.5đ
Câu 3 (3đ)	$A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ <p>a. Để A xác định khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ và $x \neq 2$</p> <p>b. $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$</p> <p>c. để $A = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$</p>	<p>1đ</p> <p>1đ</p> <p>1đ</p>
Câu 4 (4đ)	<p>a. $\triangle ABD$ cân B, BH là đường cao nên AH = HD</p> <p>b. tương tự câu a ta có AK = KG</p> <p>HK là đường trung bình của $\triangle ADG$ nên HK // DG. Vậy HK // BC</p> 	<p>2đ</p> <p>1đ</p> <p>1đ</p>

Câu 5 (3đ)	<p>a. Tam giác AEM vuông tại E , EI là đường trung tuyến nên ta có $IE = IA = IM$ khi đó</p> $\widehat{EIM} = 2\widehat{EAI}. (1)$ <p>Ta lại có tam giác ADM vuông tại D, DI là đường trung tuyến</p> <p>Nên $ID = IA = IM$, $\widehat{DIM} = 2\widehat{DAI}$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) ta có: $\widehat{EID} = 2\widehat{EAD} = 60^0$</p> <p>Vậy góc DIE bằng 60^0, tương tự góc DIF bằng 60^0</p> <p>b. $\triangle DIE$ cân tại I, mà $\widehat{DIE} = 60^0$ nên $\triangle DIE$ đều</p> <p>tương tự $\triangle DIF$ đều từ đó DEIF là hình thoi</p>	<p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p> <p>0.5đ</p>



		F	
Câu 6 (2đ)	<p>Gọi các cạnh của tam giác vuông là x, y, z; trong đó cạnh huyền là z (x, y, z là các số nguyên dương)</p> <p>Ta có $xy = 2(x + y + z)$ (1) và $x^2 + y^2 = z^2$ (2)</p> <p>Từ (2) suy ra $z^2 = (x + y)^2 - 2xy$, thay (1) vào ta có :</p> $z^2 = (x + y)^2 - 4(x + y + z)$ $z^2 + 4z = (x + y)^2 - 4(x + y)$ $z^2 + 4z + 4 = (x + y)^2 - 4(x + y) + 4$ $(z + 2)^2 = (x + y - 2)^2, \text{ suy ra } z + 2 = x + y - 2$ $= x + y - 4 ;$	0,5đ	z

	<p>thay vào (1) ta được :</p> $xy = 2(x + y + x + y - 4)$ $xy - 4x - 4y = -8$ $(x - 4)(y - 4) = 8 = 1.8 = 2.4 \quad 0,25$ <p>Từ đó ta tìm được các giá trị của x , y , z là :</p> $(x=5, y=12, z=13) ; (x=12, y=5, z=13) ;$ $(x=6, y=8, z=10) ; (x=8, y=6, z=10)$	0,5đ
		0,5đ
		0,5đ

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

ĐỀ SỐ 4

Bài 1 (3 điểm). Chứng minh rằng:

a) $8^5 + 2^{11}$ chia hết cho 17

b) $19^{19} + 69^{19}$ chia hết cho 44

Bài 2 (3 điểm). Tìm x biết:

$$\frac{(2009 - x)^2 + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}.$$

Bài 3 (4 điểm). Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

a) Tìm điều kiện của x để A xác định .

b) Rút gọn biểu thức A .

c) Tìm giá trị của x để $A > 0$

Bài 4 (4 điểm). Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên:

$$A = \frac{4x^3 - 3x^2 + 2x - 83}{x - 3}$$

Bài 5 (3 điểm): Cho tam giác ABC, đường cao AH, vẽ phân giác Hx của góc AHB và phân giác Hy của góc AHC. Kẻ AD vuông góc với Hx, AE vuông góc Hy.

Chứng minh rằng tứ giác ADHE là hình vuông.

Bài 6 (3 điểm). Cho góc vuông xOy và điểm I nằm trong góc đó. Kẻ IC vuông góc với Ox; ID vuông góc với Oy. Biết IC = ID = a. Đường thẳng kẻ qua I cắt Ox ở A cắt Oy ở B.

a) Chứng minh rằng tích AC.DB không đổi khi đường thẳng đi qua I thay đổi.

b) Biết diện tích tam giác AOB là $S_{AOB} = \frac{8a^2}{3}$. Tính CA và DB theo a.

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT TOÁN LỚP 8

Câu 1 (3 điểm):

a) (1,5đ) Ta có: $8^5 + 2^{11} = (2^3)^5 + 2^{11} = 2^{15} + 2^{11} = 2^{11}(2^4 + 1) = 2^{11} \cdot 17$

Nên kết quả trên chia hết cho 17.

b) (1,5đ) Áp dụng hằng đẳng thức:

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ với mọi } n \text{ lẻ.}$$

Ta có: $19^{19} + 69^{19} = (19 + 69)(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18})$

$$= 88(19^{18} - 19^{17} \cdot 69 + \dots + 69^{18}) \text{ chia hết cho 44.}$$

Câu 2 (3 điểm):

$$\frac{(2009 - x)^2 + (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2}{(2009 - x)^2 - (2009 - x)(x - 2010) + (x - 2010)^2} = \frac{19}{49}.$$

ĐKXĐ: $x \neq 2009; x \neq 2010.$

Đặt $a = x - 2010$ ($a \neq 0$), ta có hệ thức:

$$\frac{(a+1)^2 - (a+1)a + a^2}{(a+1)^2 + (a+1)a + a^2} = \frac{19}{49} \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + 1}{3a^2 + 3a + 1} = \frac{19}{49}$$

$$\Leftrightarrow 49a^2 + 49a + 49 = 57a^2 + 57a + 19 \Leftrightarrow 8a^2 + 8a - 30 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+1)^2 - 4^2 = 0 \Leftrightarrow (2a-3)(2a+5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ a = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ (thoả ĐK)}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{4023}{2} \text{ hoặc } x = \frac{4015}{2} \text{ (thoả ĐK)}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{4023}{2} \text{ và } x = \frac{4015}{2} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 3 (4 điểm):

$$\text{a) } x \neq 2, x \neq -2, x \neq 0 \quad (0,75đ)$$

$$\text{b) } A = \left(\frac{x}{x^2 - 4} + \frac{2}{2 - x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \frac{6}{x + 2} \quad (2đ)$$

$$= \frac{x - 2(x + 2) + x - 2}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2}$$

$$= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6} = \frac{1}{2-x}$$

c) Để $A > 0$ thì $\frac{1}{2-x} > 0 \Leftrightarrow 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2$ (1,25đ)

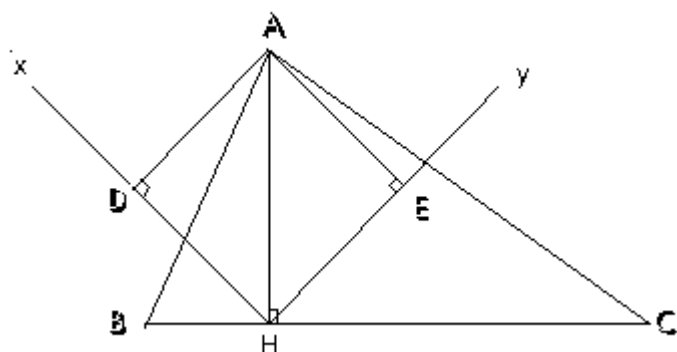
Câu 4 (4 điểm). Biến đổi $A = 4x^2 + 9x + 29 + \frac{4}{x-3}$ (1đ)

$\Leftrightarrow A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x-3$ là ước của 4 (1đ)

$\Leftrightarrow x-3 = \pm 1; \pm 2; \pm 4$ (1đ)

$\Leftrightarrow x = -1; 1; 2; 4; 5; 7$ (1đ)

Câu 5 (3 điểm).



Hx là phân giác của góc AHB ; Hy phân giác của góc AHC mà AHB và AHC là hai góc kề bù

nên Hx và Hy vuông góc (1đ)

Hay DHE = 90° mặt khác ADH = AEH = 90°

Nên tứ giác ADHE là hình chữ nhật (1) (1đ)

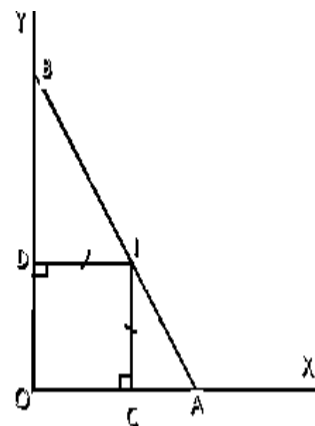
$$AHD = \frac{AHB}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\text{Do } AHE = \frac{AHC}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow AHD = AHE$$

Hay HA là phân giác DHE (2)

Từ (1) và (2) ta có tứ giác ADHE là hình vuông (1đ)



Câu 6 (3 điểm):

a) (1,5đ) Ta có góc A chung và AIC = ABO (cặp góc đồng vị)

$$\Rightarrow \triangle IAC \sim \triangle BAO \quad (\text{g.g})$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AC}{AO} = \frac{IC}{BO} \Rightarrow \frac{AC}{IC} = \frac{AO}{BO} \quad (1)$$

Tương tự: $\Delta BID \sim \Delta BAO$ (g.g)

$$\text{Suy ra: } \frac{OA}{ID} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{ID}{BD} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) Suy ra: } \frac{AC}{IC} = \frac{ID}{BD}$$

$$\text{Hay } AC \cdot BD = IC \cdot ID = a^2$$

$$\text{Suy ra: } AC \cdot BD = a^2 \text{ không đổi.}$$

b) (1,5đ) Theo công thức tính diện tích tam giác vuông ta có:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \quad \text{mà } S_{AOB} = \frac{8a^2}{3} \text{ (giả thiết)}$$

$$\text{hay } \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{8a^2}{3} \Rightarrow OA \cdot OB = \frac{16a^2}{3}$$

$$\text{Suy ra: } (a + CA)(a + DB) = \frac{16a^2}{3} \Rightarrow a^2 + a(CA + DB) + CA \cdot DB = \frac{16a^2}{3}$$

$$\text{Mà } CA \cdot DB = a^2 \text{ (theo câu a)} \Rightarrow a(CA + DB) = \frac{16a^2}{3} - 2a^2 = \frac{10a^2}{3}$$

$$\Rightarrow CA + DB = \frac{10a}{3}.$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} CA \cdot DB = a^2 \\ CA + DB = \frac{10a}{3} \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ pt} \quad \Rightarrow CA = \frac{a}{3} \text{ và } DB = 3a$$

$$\text{Hoặc } CA = 3a \text{ và } DB = \frac{a}{3}$$

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

ĐỀ SỐ 5

Câu 1 (3 điểm). Cho a, b, c thoả mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

Tính giá trị của biểu thức: $M = (a^{19} + b^{19})(b^5 + c^5)(c^{2017} + a^{2017})$

Câu 2 (3 điểm). Cho phân thức $A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$

a) Tìm điều kiện của x để A xác định

b) Rút gọn A

c) Tìm x để giá trị của A bằng 1 .

Câu 3 (3 điểm). Cho $P = x^2 + x + 1$. Tìm x để P có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

Câu 4 (4 điểm). Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$$

$$B = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ca}{c^2 + a^2 - b^2}; \text{Biết } a + b + c = 0$$

Câu 5 (3 điểm): Tổng tuổi của hai anh em hiện nay là 63. Tuổi của người anh hiện nay gấp đôi tuổi của người em lúc người anh bằng tuổi của em hiện nay. Hỏi tuổi hiện nay của mỗi người ?

Câu 6 (4 điểm). Cho hình vuông ABCD. Qua A kẻ hai đường thẳng vuông góc với nhau lần lượt cắt BC tại P và R, cắt CD tại Q và S.

- 1) Chứng minh $\triangle AQR$ và $\triangle APS$ là các tam giác cân.
- 2) QR cắt PS tại H; M, N là trung điểm của QR và PS. Chứng minh tứ giác AMHN là hình chữ nhật.
- 3) Chứng minh P là trực tâm $\triangle SQR$.
- 4) Chứng minh MN là trung trực của AC.

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8

Câu 1 (3 điểm): $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)c(a+b+c) = -ab(a+b) \Leftrightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)[c(a+c) + bc + ab] = 0 \Leftrightarrow (a+b)[c(a+c) + b(c+a)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+c)(c+b) = 0 \Leftrightarrow a+b=0 \text{ hoặc } b+c=0 \text{ hoặc } c+a=0$$

$$\Leftrightarrow a = -b \text{ hoặc } b = -c \text{ hoặc } c = -a \Leftrightarrow M = 0$$

Câu 2 (3 điểm). Mỗi câu 1 điểm:

$$A = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

a. A xác định khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ và $x \neq 2$

$$b. A = \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

$$c. A = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} = 1 \Leftrightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

Câu 3 (3 điểm): Cho $P = x^2 + x + 1$. Tìm x để P có giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị đó.

$$\text{Ta có } P = x^2 + 2x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{Do } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \text{ không âm nên nhỏ nhất khi } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\text{Tức là } x = -\frac{1}{2} \text{ thì biểu thức có giá trị nhỏ nhất là } \frac{3}{4}$$

Câu 4 (4 điểm). (Mỗi câu đúng 2 điểm):

$$A = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \dots - 99^2 + 100^2$$

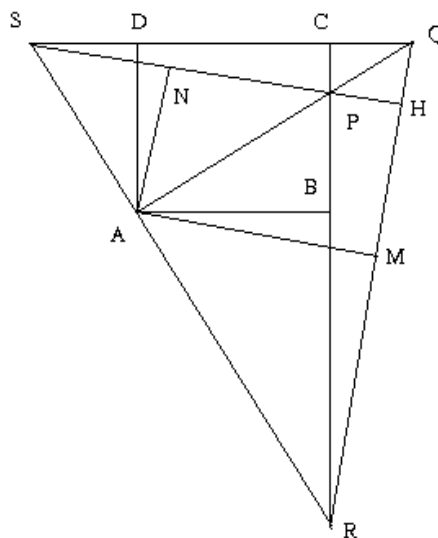
$$A = (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + (100^2 - 99^2)$$

$$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100$$

$$A = 50 \cdot 101 = 5050$$

$$\text{Từ } a + b + c = 0 \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -2ab$$

$$\text{Tương tự } b^2 + c^2 - a^2 = -2bc; c^2 + a^2 - b^2 = -2ac$$



$\triangle AQR$ là tam giác vuông cân tại A. Chứng minh tương tự ta có: $\triangle ABP = \triangle ADS$

do đó $AP = AS$ và $\triangle APS$ là tam giác cân tại A.

2) AM và AN là đường trung tuyến của tam giác vuông cân AQR và APS nên $AN \perp SP$ và $AM \perp RQ$.

Mặt khác: $\angle PAN = \angle PAM = 45^\circ$ nên góc MAN vuông. Vậy tứ giác AHMN có ba góc vuông, nên nó là hình chữ nhật.

3) Theo giả thiết: $QA \perp RS$, $RC \perp SQ$ nên QA và RC là hai đường cao của $\triangle SQR$. Vậy P là trực tâm của $\triangle SQR$.

4) Trong tam giác vuông cân AQR thì MA là trung tuyến nên $AM = \frac{1}{2} QR$.

Trong tam giác vuông RCQ thì CM là trung tuyến nên $CM = \frac{1}{2} QR$.

$\Rightarrow MA = MC$, nghĩa là M cách đều A và C.

Chứng minh tương tự cho tam giác vuông cân ASP và tam giác vuông SCP, ta có $NA = NC$, nghĩa là N cách đều A và C. Hay MN là trung trực của AC

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

ĐỀ SỐ 6

Câu 1 (2 điểm): Cho $P = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2014} + x^{2015}$

Chứng minh: $(x - 1)P = x^{2016} - 1$

Câu 2 (4 điểm): Cho biểu thức: $K = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} + \frac{x^2-4x-1}{x^2-1} \right) \cdot \frac{x+2017}{x}$

a. Tìm điều kiện đối với x để biểu thức K xác định.

b. Rút gọn biểu thức K.

c. Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức K có giá trị nguyên.

Câu 3 (3 điểm): Các cạnh góc vuông của tam giác vuông có độ dài là a, b và diện tích bằng S. Tìm các góc

của tam giác vuông biết $(a + b)^2 = 8S$.



Câu 4 (4 điểm): Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^\circ$) có $AB = 4(\text{cm})$, $CD = 9(\text{cm})$, $BC = 13(\text{cm})$.

Trên cạnh BC lấy M sao cho $BM = AB$. Đường thẳng vuông góc BC tại M cắt AD tại N. Tính diện tích tam giác BNC.

Câu 5 (4 điểm): Cho tam giác ABC với trung tuyến CM. Điểm D thuộc đoạn BM sao cho $BD = 2MD$. Biết



rằng $\angle MCD = \angle BCD$. Chứng minh rằng $\angle ACD = 90^\circ$.

Câu 6 (3 điểm): Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2}$ với $x \neq 0$

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG LỚP 8

Câu 1 (2 điểm):

Ta có $xP = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2015} + x^{2016}$

$$\Rightarrow xP - P = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2015} + x^{2016} - (1 + x + x^2 + \dots + x^{2014} + x^{2015})$$

$$= x^{2016} - 1$$

\Rightarrow điều cần CM

Câu 2 (4 điểm):

a) K có nghĩa khi $x \neq \pm 1$ và $x \neq 0$

b) $K = A.B$

$$A = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 + x^2 - 4x - 1}{(x-1)(x+1)}$$

$$A = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} = 1$$

$$\text{Vậy } K = A.B = 1. \frac{x + 2017}{x} = 1 + \frac{2017}{x}$$

c) Muốn K nguyên thì x ước của 2017.

Mà 2017 là số nguyên tố nên chỉ có ước dương là 1 và 2017.

Nên $x = \pm 1$ và $x = \pm 2017$

Với $x = 1 \Rightarrow K = 2018$

Với $x = -1 \Rightarrow K = -2016$

Với $x = 2017 \Rightarrow K = 2$

Với $x = -2017 \Rightarrow K = 0$

Câu 3 (3 điểm):

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2} ab$$

Theo bài ra $(a + b)^2 = 8S$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 8 \cdot \frac{1}{2} ab = 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

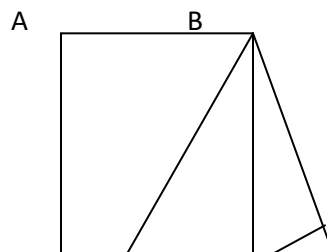
$$\Rightarrow a = b$$

\Rightarrow tam giác vuông cân

\Rightarrow các góc nhọn $= 45^\circ$.

Câu 4 (4 điểm): $BA \perp NA$, $BM \perp NM$, $\underbrace{AB = BM}_{\text{gt}}$ (gt)

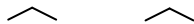
$\Rightarrow NB$ là phân giác của $\angle ANM$



$$MC = BC - BM = 13 - 4 = 9 = CD$$



Do đó NC là tia phân giác của MND



Hai góc ANM và MND kề bù



$$\text{Nên } \angle BNC = 90^\circ$$

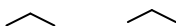
$$\Rightarrow \triangle BNC \text{ vuông tại } N \text{ và } NM \perp BC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow NM^2 = BM \cdot MC = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow MN = 6(\text{cm})$$

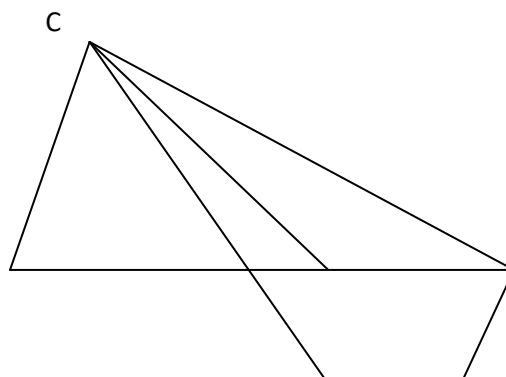
Do đó:

$$S_{NBC} = \frac{1}{2} NM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 13 = 39(\text{cm}^2)$$



Câu 5 (4 điểm): $\triangle BCM$ có $\angle MCD = \angle BCD$ (gt)

$$\text{do đó: } \frac{CB}{CM} = \frac{DB}{DM} = 2 \text{ (vì } DB = 2DM \text{ gt)}$$



$$\Rightarrow BC = 2CM.$$

Gọi P là điểm đối xứng của C qua M

Ta có: $PC = 2CM = BC$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \triangle BCP$ cân tại C có CD là phân giác

Nên $CD \perp BP$

Mặt khác vì M trung điểm AB (gt)

Và M trung điểm của CP

$\Rightarrow BP \parallel AC$ và $BP \perp CD$

$\Rightarrow AC \perp CD$ hay $\angle ACD = 90^\circ$

Câu 6 (3 điểm):

$$A = \frac{(4x^2 - 4x + 1) - 3x^2}{x^2} = \frac{(2x - 1)^2}{x^2} - 3 \geq -3$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Giá trị nhỏ nhất $A = -3$ khi $x = \frac{1}{2}$

----- HẾT -----

Lưu ý: Hướng dẫn chấm này chỉ trình bày sơ lược một cách giải. Bài làm của học sinh phải chi tiết,

lập luận chặt chẽ, tính toán chính xác mới được điểm tối đa.

ĐỀ SỐ 7

Câu 1 (4 điểm): Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

Câu 2 (3 điểm): Cho x, y là các số lớn hơn hoặc bằng 1.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

Câu 3 (3 điểm): Tìm m để phương trình $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$ có nghiệm dương.

Câu 4 (4 điểm): Giải phương phương trình sau:

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

Câu 5 (3 điểm): Trong một cái giỏ đựng một số táo. Đầu tiên người ta lấy ra một nửa số táo và bỏ lại 5

quả, sau đó lấy thêm ra $\frac{1}{3}$ số táo còn lại và lấy thêm ra 4 quả. Cuối cùng trong giỏ còn lại 12 quả. Hỏi

trong giỏ lúc đầu có bao nhiêu quả?

Câu 6 (3 điểm): Cho tam giác vuông cân ABC ($AB = AC$). Qua C vẽ đường thẳng cắt cạnh AB tại D. Từ B vẽ

đường vuông góc với CD tại I cắt AC tại E.

Chứng minh rằng $AD = AE$.

----- HẾT -----

Lưu ý : Cán bộ coi thi không được giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM THI KHẢO SÁT HSG

Câu 1 (4 điểm): Nhân cả 2 vế của: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$ rồi rút gọn \Rightarrow

đpcm

Câu 2 (3 điểm): $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \quad (2)$$

$$\forall x \geq 1; y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow xy - 1 \geq 0$$

\Rightarrow BĐT (2) đúng \Rightarrow BĐT (1) đúng (dấu "=" xảy ra khi $x = y$)

Câu 3 (3 điểm): Tìm m để phương trình $\frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3$ có nghiệm dương.

Điều kiện: $x \neq 2; x \neq -2$

$$\text{Ta có } \frac{2x-m}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} = 3 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x(1-m) = 2m-14$$

a) Nếu $m = 1$ phương trình có dạng $0 = -12$ vô nghiệm.

b) Nếu $m \neq 1$ phương trình trở thành $x = \frac{2m-14}{1-m}$

$$\text{Phương trình có nghiệm dương} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2m-14}{1-m} \neq 2 \\ \frac{2m-14}{1-m} \neq -2 \\ \frac{2m-14}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases}$$

Vậy thoả mãn yêu cầu bài toán khi $\begin{cases} m \neq 4 \\ 1 < m < 7 \end{cases}$.

Câu 4 (4 điểm): Giải các phương trình (mỗi PT đúng 2 điểm):

$$\text{a) } x^2 - 3x + 2 + |x - 1| = 0 \quad (1)$$

+ Nếu $x \geq 1$: $(1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$).

+ Nếu $x < 1$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1; x = 3$ (cả hai đều không bé hơn 1, nên bị loại)

Vậy: Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.

$$\text{b) } 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x + 4)^2 \quad (2)$$

Điều kiện để phương trình (2) có nghiệm: $x \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)^2\right] = (x + 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = (x + 4)^2 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 16$$

$\Leftrightarrow x = 0$ hay $x = -8$ và với điều kiện $x \neq 0$.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -8$

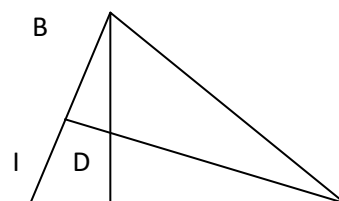
Câu 5 (3 điểm): Chọn ẩn, lập đúng phương trình qua các bước (2 điểm)

Giải phương trình và chọn kết quả là 38 và trả lời đúng (1 điểm)

Câu 6 (3 điểm): $\triangle EBC$ có AB và CI là 2 đường cao cắt nhau tại D



\Rightarrow là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow ED \perp BC$.



$\angle DEA = \angle ABC$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Mà góc $\angle ABC = 45^\circ$ (GT) do đó góc $\angle DEA = 45^\circ$

$\Rightarrow \triangle ADE$ vuông cân tại A .

$\Rightarrow AD = AE$

-----HẾT-----

Lưu ý: Học sinh giải theo cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn: Toán- Lớp 8

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 07 tháng 3 năm 2023

(Đề thi có 01 trang)

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Phân tích các đa thức sau thành nhân tử: $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$.

2) Rút gọn $Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$ (với $x \neq 0, x \neq \pm 1$).

3) Cho $a, b, c \neq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}.$$

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn:

$$x^2 - 3xy + p^2 y^2 = 12p.$$

2) Giải phương trình: $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$.

Bài 3. (3,0 điểm)

1) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Biết rằng

$f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng $2a, 2b$ có giá trị nguyên.

2) Cho a, b là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn $a + 2b^2 - 2$ là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và $b + 2a^2 - 2$ chia hết cho $a + 2b^2 - 2$. Chứng minh $2a + 3$ là số chính phương.

Bài 4. (7,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có $B = 2C$; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Đường vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABM$ là tam giác cân và $\angle ABC = 2\angle AKC$;

b) $MA \cdot KN = MN \cdot KA$;

c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

2) Cho tứ giác ABCD có $\angle BCD = \angle BDC = 50^\circ$; $\angle ACD = \angle ADB = 30^\circ$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng tam giác ABI cân.

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$. Chứng minh: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

2) Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

UBND HUYỆN LƯƠNG TÀI

HƯỚNG DẪN CHẤM

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

Năm học 2022-2023

Môn thi: Toán - Lớp 8

Bài	Lời giải sơ lược	Điểm
1.1 (1,0 điểm)		
	<p>Ta có:</p> $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$ $= (x^4 - x) + 2023(x^2 + x + 1)$	0,25
	$= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2023(x^2 + x + 1)$	0,25
	$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2023)$	0,5
1.2 (1,5 điểm) 2) Rút gọn $Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$ (với $x \neq 0, x \neq \pm 1$).		

	$Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x} + 1 - \frac{1}{x} \right] : \left(\frac{x^3-1}{x^2-x} - \frac{x^3+1}{x^2+x} \right)$ $Q = \left[\frac{(x-1)^2}{x(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)} - \frac{x+1}{x(x+1)} \right] : \left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x(x-1)} - \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} \right]$	0,5
	$Q = \frac{x^2-2x+1+x^2+x-x-1}{x(x+1)} : \frac{x^2+x+1-x^2+x-1}{x}$	0,25
	$Q = \frac{2x^2-2x}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{2x}$	0,25
	$Q = \frac{x-1}{x+1}$	0,25
	<p>Vậy $Q = \frac{x-1}{x+1}$ với $x \neq 0, x \neq \pm 1$</p>	0,25
<p>1.3. (1,5 điểm) Cho $a, b, c \neq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Tính giá trị của biểu thức:</p> $T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}.$		

	$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$ $\Rightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0$ $\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ (b-c)^2 = 0 \\ (c-a)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = c$	0,5
	<p>Thay $b = a, c = a$ vào biểu thức $T = \frac{a^{2022} + b^{2022} + c^{2022}}{(a+b+c)^{2022}}$ ta được:</p> $T = \frac{a^{2022} + a^{2022} + a^{2022}}{(a+a+a)^{2022}} = \frac{3a^{2022}}{9a^{2022}} = \frac{1}{3}.$	0,5
2.1. (2,0 điểm) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương, p nguyên tố thỏa mãn: $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p.$		
	<p>Ta có $x^2 - 3xy + p^2y^2 = 12p \Rightarrow x^2 + p^2y^2 = 3xy + 12p : 3$</p> <p>Ta có số chính phương chia 3 dư 0, 1</p> <p>$\Rightarrow x : 3; py : 3$</p>	0,5
	<p>$\Rightarrow x^2 + (py)^2 : 9 \Rightarrow 3xy + 12p : 9$</p>	0,25

	mà $x \vdots 3 \Rightarrow p \vdots 3 \Rightarrow p = 3$ (do p nguyên tố)	
	Thay $p = 3$ vào phương trình $x^2 - 3xy + p^2 y^2 = 12p$ ta có $x^2 - 3xy + 9y^2 = 36$ $\Leftrightarrow 4x^2 - 12xy + 36y^2 = 144$ $\Leftrightarrow (2x - 3y)^2 + 27y^2 = 144$	0,25
	$\Rightarrow 27y^2 \leq 144 \Rightarrow y^2 \leq 5$ mà y^2 là chính phương và y nguyên dương $y^2 \in \{1; 4\}$	0,25
	Nếu $y^2 = 1 \Rightarrow (2x - 3y)^2 = 117$ (loại vì 117 không chính phương)	0,25
	Nếu $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (2x - 6)^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ vì x, y nguyên dương. Vậy $x = 6; y = 2; p = 3$	0,5
2.2. (2,0 điểm) Giải phương trình: $(x^2 - 9)^2 = 12x + 1$.		
	$(x^2 - 9)^2 = 12x + 1 \Leftrightarrow x^4 - 18x^2 + 81 = 12x + 1$ $\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 + 81 = 36x^2 + 12x + 1$	0,25

$\Leftrightarrow (x^2 + 9)^2 = (6x + 1)^2$ $\Leftrightarrow (x^2 + 9)^2 - (6x + 1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 9 + 6x + 1)(x^2 + 9 - 6x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 + 6x + 10)(x^2 - 6x + 8) = 0$	0,5
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 10 = 0 & (1) \\ x^2 - 6x + 8 = 0 & (2) \end{cases}$	0,25
<p>Giải (1): $x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + 1 = 0$ suy ra phương trình (1) vô nghiệm</p>	0,25
<p>Giải (2): $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$</p> $\Leftrightarrow x(x - 2) - 4(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 4) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$	0,5
Tập nghiệm của phương trình đã cho $S = \{2; 4\}$	0,25

3.1 (1,5 điểm) Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ. Biết rằng

$f(0), f(1), f(2)$ có giá trị nguyên. Chứng minh rằng $2a, 2b$ có giá trị nguyên.

	$f(0) = c$ (1), $f(1) = a + b + c$ (2), $f(2) = 4a + 2b + c$ (3) là các số nguyên .	0,5
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow a + b \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2a + 2b \in \mathbb{Z}$ (4)	0,25
	Từ (1) ,(3) và (4) suy ra $2a$ là số nguyên. .	0,25
	Từ (4) và $2a$ nguyên suy ra $2b$ nguyên	0,25
	Vậy $2a, 2b$ có giá trị nguyên.	0,25

3.2. (1,5 điểm) Cho a, b là hai số nguyên phân biệt lớn hơn 1 thỏa mãn $a + 2b^2 - 2$ là lũy thừa của một số nguyên tố khác 13 và $b + 2a^2 - 2$ chia hết cho $a + 2b^2 - 2$. Chứng minh $2a + 3$ là số chính phương.

	<p>Đặt: $a + 2b^2 - 2 = p^k$; p nguyên tố khác 13; $k \in \mathbb{N}^*$ do a, b lớn 1 và</p> $b + 2a^2 - 2 \vdots a + 2b^2 - 2$ $\Rightarrow \begin{cases} b + 2a^2 - 2 - (a + 2b^2 - 2) \vdots p^k \\ b + 2a^2 - 2 \geq a + 2b^2 - 2 \end{cases}$ <p>Vì $\Rightarrow \begin{cases} (a - b)(2a + 2b - 1) \vdots p^k \\ (a - b)(2a + 2b - 1) > 0 \text{ (do } a \neq b, a, b > 1) \end{cases}$</p> $\Rightarrow \begin{cases} a - b \vdots p^m \\ 2a + 2b - 1 \vdots p^n \\ a > b \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{N}; m + n = k)$	0,5
	<p>TH1: Nếu $m \neq 0 \Rightarrow n \neq 0$ vì $a - b < a + 2b^2 - 2$</p> $\Rightarrow \begin{cases} a - b \vdots p \\ 2a + 2b - 1 \vdots p \end{cases} \Rightarrow 4a - 1 \vdots p$ <p>Lại có:</p> $b + 2a^2 - 2 \vdots a + 2b^2 - 2 = p^k$ $\Rightarrow b + 2a^2 - 2 \vdots p \Rightarrow 2b + 4a^2 - 4 \vdots p$ $\Rightarrow 4a^2 - 2a - 3 \vdots p$ $\Rightarrow 4a^2 - a - (a + 3) \vdots p$ $\Rightarrow a + 3 \vdots p$	0,5

	Kết hợp với $4a-1: p \Rightarrow 13: p \Rightarrow p=13$ vì p nguyên tố (loại)	
	<p>TH2: Nếu $m = 0$</p> <p>$\Rightarrow 2a+2b-1: p^k \Rightarrow 2a+2b-1: a+2b^2-2$</p> <p>$\Rightarrow 2a+2b-1 \geq a+2b^2-2$</p> <p>$\Rightarrow a \geq 2b^2-2b-1 \quad (1)$</p> <p>Ta lại có:</p> <p>$2(a+2b^2-2)-(2a+2b-1): a+2b^2-2$</p> <p>$\Rightarrow 4b^2-2b-3: a+2b^2-2$</p> <p>$\Rightarrow 4b^2-2b-3 \geq a+2b^2-2 \Rightarrow 2b^2-2b-1 \geq a \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) $a = 2b^2-2b-1 \Rightarrow 2a+3 = (2b-1)^2$ là chính phương (đpcm)</p>	0,5

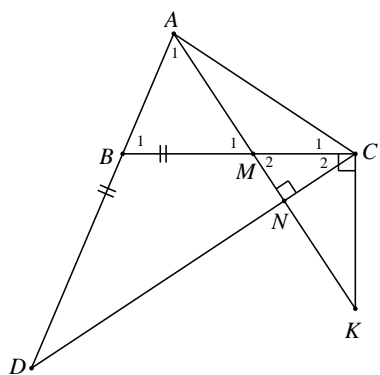
4.1. (5,5 điểm) 1) Cho tam giác ABC có $B = 2C$; trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Qua A kẻ đường thẳng vuông góc với CD cắt BC và CD lần lượt tại M và N. Đường vuông góc với BC tại C cắt AM tại K. Chứng minh rằng:

a) $\triangle ABM$ là tam giác cân và $\angle ABC = 2\angle AKC$;

b) $MA.KN = MN.KA$;

c) Tính độ dài ba cạnh của tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp.

Vẽ hình + Giả thiết, kết luận



0,25

a) $A_1 + D = 90^\circ, M_2 + C_2 = 90^\circ$ (1)

$BD = BC \Rightarrow \triangle BCD$ cân tại B

$\Rightarrow D = C_2$ (2)

0,5

	<p>Từ (1), (2) $\Rightarrow A_1 = M_2$</p> <p>$M_1 = M_2$ (2 góc đối đỉnh)</p> <p>$\Rightarrow A_1 = M_1 \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B</p>	0,5
	Ta lại có $D + A_1 = 90^\circ; K + M_2 = 90^\circ$ mà $A_1 = M_2 \Rightarrow D = K$	0,5
	Mà $ABC = 2ADC \Rightarrow ABC = 2AKC$ (đpcm)	0,25
b)	<p>$\cdot C_1 = \frac{ABC}{2}, C_2 = \frac{ABC}{2} \Rightarrow C_1 = C_2 \Rightarrow CM$ là đường phân giác của ΔACN</p>	0,5
	$\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{CA}{CN}$ (3)	0,25
	Chứng minh được CK là tia phân giác của góc ngoài tại C của ΔACN	0,5

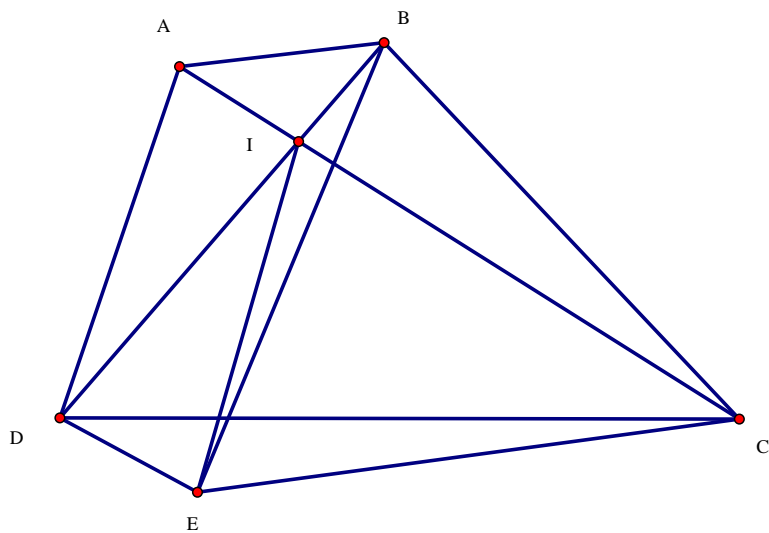
	$\Rightarrow \frac{AK}{KN} = \frac{CA}{CN} \quad (4)$	
	Từ (3), (4) $\Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{KA}{KN} \Rightarrow MA.KN = KA.MN$ (đpcm)	0,25
c)	<p>$D = C_2$ (Theo (2)), $B_1 = D + C_2 \Rightarrow B_1 = 2D$</p> <p>$B_1 = 2C_1$ (GT)</p> <p>$\Rightarrow C_1 = D$</p>	0,25
	<p>Xét ΔABC và ΔACD có:</p> <p>BAC là góc chung, $C_1 = D$</p> <p>$\Delta ABC \sim \Delta ACD$</p> <p>$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB.AD$</p> <p>$\Rightarrow AC^2 = AB(AB + BD) = AB(AB + BC)$</p>	0,25

	<p>Đặt $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$</p> <p>Ta có: $b^2 = c(c+a) \Rightarrow (b-c)(b+c) = c.a \quad (*)$</p> <p>Vì a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp, ta có các trường hợp:</p> <p>TH1:</p> $b - c = 1 \Rightarrow b = c + 1$ $\Rightarrow 2c + 1 = ca$ $\Leftrightarrow c(a - 2) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad (loại)$	0,5
	<p>TH2:</p> $b - c = 2 \Rightarrow b = c + 2$ $\Rightarrow a = c + 1$ <p>Thay vào (*) ta được:</p> $2(2c + 2) = c(c + 1)$ $\Leftrightarrow c^2 - 3c - 4 = 0$ $\Rightarrow c = 4 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = 6$	0,5

Vậy 3 cạnh của tam giác là 4; 5; 6.

4.2(1,5 điểm) Cho tứ giác ABCD có $BCD = BDC = 50^\circ$; $ACD = ADB = 30^\circ$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng tam giác ABI cân.

Giả thiết, Kết luận + hình vẽ



0,25

	<p>Từ giả thiết $\Rightarrow CBI = CIB = 80^\circ \Rightarrow CB = CI; BCI = 20^\circ$</p>	0,25
	<p>Vẽ tam giác đều BCE (E thuộc nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A).</p> <p>$\Rightarrow \triangle BDE = \triangle CBI (cgc)$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} BDE = 80^\circ \\ DE = BI \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow AID = BIC = IDE (= 80^\circ)$</p> <p>$\Rightarrow AI // DE (1)$</p>	0,5

	<p> $Do: DIE = DIC - EIC$ $= 100^0 - \frac{180^0 - ECI}{2} (CI = CE = CB)$ $= 30^0$ $\Rightarrow DIE = ADI (= 30^0) \Rightarrow AD // IE (2)$ Từ (1) và (2) \Rightarrow Tứ giác AIED là hình bình hành nên $DE = AI$. Mà $DE = BI$ Suy ra $AI = BI$ do đó tam giác ABI cân tại I. </p>	0,5
<p>5.1. (1,0 điểm) Cho $x, y > 0$ thỏa mãn: $x + y = 1$. Chứng minh: $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.</p>		
	<p>Ta có:</p> $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \text{ dấu } = \text{ xảy ra khi } a = b$	0,5

	<p>Áp dụng ta có:</p> $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{\left(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}\right)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(x + y + \frac{x+y}{xy}\right)^2$ $= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2$	
	<p>Mặt khác:</p> $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$ $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{xy}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{25}{2}$ <p>Dấu bằng xảy ra khi $x = y = 1/2$</p>	0,5
<p>5.2 (1,0 điểm) Cho một đa giác đều gồm 2019 đỉnh. Người ta tô mỗi đỉnh của đa giác bởi một màu xanh hoặc màu đỏ. Chứng minh rằng luôn tìm được ba đỉnh của đa giác là 3 đỉnh của một tam giác cân được đánh dấu bởi cùng 1 màu.</p>		

	<p>Vì đa giác đều có số đỉnh là 2019 (số lẻ) nên tồn tại 2 đỉnh kề nhau được tô cùng 1 màu, gọi 2 đỉnh đó là A và B. Mặt khác đa giác đều này tồn tại 1 đỉnh M nào đó nằm trên đường trung trực của AB.</p>	0,25
	- Nếu M được tô cùng màu với A và B, ta có tam giác MAB thỏa mãn đề bài.	0,25
	<p>- Nếu M khác màu với A và B ta gọi đỉnh E kề với đỉnh A; gọi đỉnh F kề với đỉnh B và xảy ra trường hợp:</p> <p>+ Nếu cả E và F khác màu với A, B thì ta có M,E,F cùng màu suy ra tam giác MEF thỏa mãn đề bài.</p>	0,25
	<p>+ Nếu có ít nhất 1 đỉnh E hoặc F cùng màu với A và B, giả sử đỉnh E thì ta có tam giác ABE thỏa mãn đề bài.</p> <p>Vậy bài toán được chứng minh.</p>	0,25

UBND HUYỆN THANH SƠN

ĐỀ THI HỌC SINH NĂNG KHIẾU CẤP HUYỆN

PHÒNG GD&ĐT

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán 8

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Thời gian làm bài 120 phút, không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có 02 trang)

Ghi chú:

- Thí sinh lựa chọn đáp án phần trắc nghiệm khách quan **chỉ có một** lựa chọn đúng.

- Thí sinh làm bài thi (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi

(không làm bài trên đề thi).

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (8,0 điểm)

Câu 1. Cho $x + y = 9$, $xy = 14$. Giá trị của biểu thức $x^3 + y^3$ là

A. 513

B. 531

C. 315

D. 351

Câu 2. Cho $a + b = 1$, biểu thức $C = 2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$ có giá trị là

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

Câu 3. Phân tích đa thức $3x^2 + 8x + 4$ thành nhân tử được kết quả là

A. $(x-2)(3x+2)$ B. $(x+2)(3x-2)$ C. $(x+2)(3x+2)$ D. $(x-2)(3x-2)$

Câu 4. Đa thức $a^3 + 4a^2 - 29a + 24$ được viết dưới dạng nhân tử là

A. $(a-1)(a-3)(a-8)$ B. $(a-1)(a+3)(a+8)$ C. $(a+1)(a-3)(a+8)$ D. $(a-1)(a-3)(a+8)$

Câu 5. Cho $9x^2 + 4y^2 = 20xy$ ($2y < 3x < 0$), biểu thức $A = \frac{3x-2y}{3x+2y}$ có giá trị là

A. $-\frac{1}{2}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{2}$

Câu 6. Giá trị biểu thức $A = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$ là

A. 5050

B. 5005

C. 4950

D. 4590

Câu 7. Bất phương trình $\frac{x-2021}{x-2022} > 1$ có tập nghiệm là

A. $S = \{x \mid x < 2022\}$ B. $S = \{x \mid x > 2022\}$ C. $S = \{x \mid x < 2021\}$ D. $S = \{x \mid x > 2021\}$

Câu 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B(x) = x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 30$ là

A. 0

B. 5

C. 10

D. 20

Câu 9. Cho $abc = 2022$, giá trị biểu thức $A = \frac{2022a}{ab + 2022a + 2022} + \frac{b}{bc + b + 2022} + \frac{c}{ac + c + 1}$ là

A. 1

B. 3

C. 2022

D. 2

Câu 10. Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ và $a + b + c \neq 0$, giá trị biểu thức $N = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a + b + c)^2}$ là

- A. 1 B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. $\frac{1}{2}$

Câu 11. Cho tam giác ABC và điểm D trên cạnh BC sao cho $\frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$, điểm E trên đoạn

AD sao cho $\frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$. Gọi K là giao điểm của BE và AC. Tỉ số $\frac{AK}{KC}$ là

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{5}{8}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{8}$

Câu 12. Cho hình bình hành ABCD có điểm G thuộc cạnh CD sao cho $DG = \frac{1}{4}DC$. Gọi E

là giao điểm của AG và BD. Tỉ số $\frac{DE}{DB}$ là

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm$. Trên cạnh AB, lấy điểm

M sao cho $AM = 10cm$, trên cạnh AC lấy điểm N sao cho $AN = 8cm$. Độ dài đoạn MN là

A. 10cm

B. 12cm

C. 14cm

D. 16cm

Câu 14. Cho hình vuông ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC và I là giao

điểm của DF và CE. Tỉ số $\frac{S_{CIF}}{S_{CBE}}$ là

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 15. Cho tam giác ABC, các đường trung tuyến BD và CE. Lấy M, N trên BC sao cho

BM = MN = NC. Gọi I là giao điểm của AM và BD, K là giao điểm của AN và CE. Biết BC =

10cm thì độ dài IK là

A. 3,5cm

B. 3cm

C. 2,5cm

D. 2cm

Câu 16. Để lập đội tuyển năng khiếu bóng rổ nhà trường đưa ra quy định tuyển chọn

như sau: mỗi bạn dự tuyển sẽ được ném 10 quả bóng vào rổ, quả bóng vào rổ được

cộng 4 điểm; quả bóng ném ra ngoài thì bị trừ 2 điểm. Nếu bạn nào có số điểm từ 22

điểm trở lên thì sẽ được chọn vào đội tuyển. Một học sinh muốn được chọn vào đội tuyển thì số quả bóng phải ném vào rổ ít nhất là

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 - x + 2y = 1$

b) Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ và $B = \underbrace{888\dots8}_n$. Chứng minh rằng:

$A + 2B + 4$ là số chính phương.

Câu 2 (3,5 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ac}{c^2 + a^2 - b^2}$

biết $a + b + c = 0$ và $a, b, c \neq 0$.

b) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$.

Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M, AH cắt BC tại D.

a) Chứng minh $BD^2 = AD.DM$.

b) Kẻ AK vuông góc với EF tại K. Chứng minh $\triangle AEK$ đồng dạng $\triangle AHF$.

c) Chứng minh: $AB.AC = BE.CF + AE.AF$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a+b+c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = a+b+c+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm./.

(Chú ý: Thí sinh được sử dụng máy tính cầm tay)

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO THANH SƠN

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH NĂNG KHIẾU LỚP 8 THCS

NĂM HỌC 2022 - 2023

MÔN: TOÁN

Hướng dẫn chấm có: 03 trang

A. Một số chú ý khi chấm bài.

Đáp án dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách giải. Thí sinh giải cách khác mà đúng thì tổ chấm cho điểm từng phần ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

B. Đáp án và thang điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm)

Mỗi câu trả lời đúng cho 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	D	B	C	D	A	A	B	B	A	B	D	C	B	D	C	C

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - y^2 - x + 2y = 1$

b) Cho số nguyên dương n và các số $A = \underbrace{444\dots4}_{2n}$ và $B = \underbrace{888\dots8}_n$. Chứng minh rằng:

$A + 2B + 4$ là số chính phương.

Nội dung	Điểm

<p>a) $x^2 - y^2 - x + 2y = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 - 4x + 8y = 4$</p> <p>$\Leftrightarrow (4x^2 - 4x + 1) - (4y^2 - 8y + 4) = 1 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (2y - 2)^2 = 1$</p> <p>$\Leftrightarrow (2x - 2y + 1)(2x + 2y - 3) = 1$</p> <p>Nghiệm $(x, y) \in \{(0;1), (1;1)\}$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
<p>b) Đặt $a = \underbrace{111\dots1}_n$</p> <p>Ta có: $A + 2B + 4 = A = \underbrace{444\dots4}_{2n} + 2 \cdot \underbrace{888\dots8}_n + 4 = 36a^2 + 24a + 4 = (6a + 2)^2$</p>	<p>0,5</p> <p>1,0</p>

Câu 2 (3,5 điểm).

a) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{ab}{a^2 + b^2 - c^2} + \frac{bc}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{ac}{c^2 + a^2 - b^2}$

biết $a + b + c = 0$ và $a, b, c \neq 0$.

b) Giải phương trình: $2x(8x-1)^2(4x-1)=9$

Nội dung	Điểm
<p>a) $A = \frac{ab}{a^2+b^2-c^2} + \frac{bc}{b^2+c^2-a^2} + \frac{ac}{c^2+a^2-b^2}$</p> <p>Ta có: $a^2+b^2-c^2 = a^2+b^2-(-a-b)^2 = -2ab$</p> <p>$A = \frac{ab}{-2ab} + \frac{bc}{-2bc} + \frac{ac}{-2ca} = \frac{-3}{2}$</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
<p>b) $2x(8x-1)^2(4x-1)=9 \Leftrightarrow (64x^2-16x+1)(8x^2-2x)=9$</p> <p>Đặt $y = 8x^2 - 2x$</p> <p>Phương trình: $(8y+1)y=9 \Leftrightarrow 8y^2+y-9=0 \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=\frac{-9}{8} \end{cases}$</p>	<p>0,5</p>

Vậy: $S = \left\{ \frac{-1}{4}; \frac{1}{2} \right\}$	1,0
---	-----

Câu 3 (4,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Qua B kẻ đường thẳng song song với CF cắt tia AH tại M, AH cắt BC tại D.

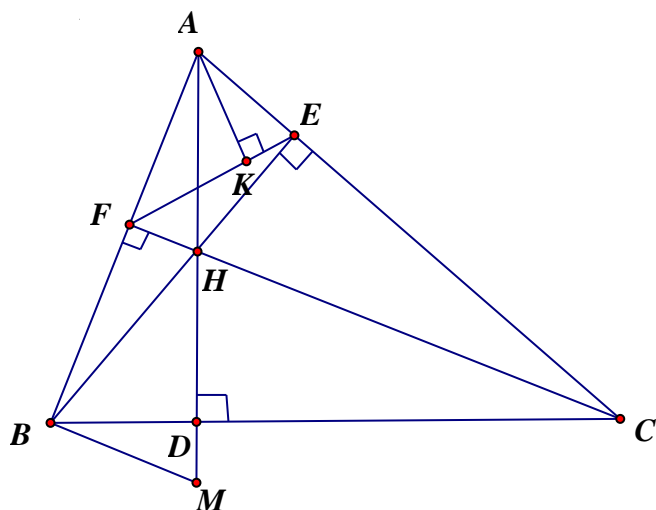
a) Chứng minh $BD^2 = AD \cdot DM$

b) Kẻ AK vuông góc với EF tại K. Chứng minh $\triangle AEK$ đồng dạng $\triangle AHF$.

c) Chứng minh: $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF$.

Nội dung	Điểm

1. Hình vẽ



a) Chứng minh được $BD^2 = AD \cdot DM$

b) Chứng minh được $\triangle AEK$ đồng dạng $\triangle AHF$

c) Ta có: $AB \cdot AC = BE \cdot CF + AE \cdot AF. \Leftrightarrow \frac{BE}{AB} \cdot \frac{CF}{AC} + \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = 1$

$$\frac{BE}{AB} \cdot \frac{BE}{AB} + \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AE}{AB} = 1 \Leftrightarrow \frac{BE^2 + AE^2}{AB^2} = 1$$

Câu 4 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn $a + b + c \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức $P = a + b + c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$.

Nội dung	Điểm
$P = a + b + c + 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq a + b + c + \frac{18}{a + b + c}$ $= \left(a + b + c + \frac{1}{a + b + c}\right) + \frac{17}{a + b + c} \geq 2 + 17 = 19$	0,5
<p>Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.</p>	0,5

Chú ý: Học sinh có cách giải khác vẫn cho điểm tối đa

-----HẾT-----

UBND QUẬN HÀ ĐÔNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC: 2023-2024

Môn kiểm tra: TOÁN 8

Thời gian làm bài: 90 phút

*(Đề thi gồm 01 trang. Học sinh làm bài ra giấy thi)***Bài 1. (5,0 điểm)**

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1}$ với $x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3$

1) Rút gọn A

2) Tìm giá trị lớn nhất của A

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình sau:

$$(2x^2 + x - 13)^2 + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12)$$

2) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$

Bài 3. (3,0 điểm)

1) Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp

Chứng minh rằng : $ab - a - b + 1$ chia hết cho 48

2) Với ba số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $T = 507xz - xy - yz$

Bài 4. (7,0 điểm) Cho hình vuông $ABCD$ có AC cắt BD tại O . Gọi M là điểm bất kỳ

thuộc cạnh BC ($M \neq B$ và C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N . Trên cạnh AB lấy điểm

E sao cho $BE = CM$.

1) Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân;

2) Chứng minh: $EM \parallel BN$;

- 3) Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng;
- 4) Cho độ dài đoạn thẳng $AB = a$ và P, Q lần lượt thuộc cạnh AB, AD sao cho $\angle PCQ = 45^\circ$. Chứng minh tam giác APQ có chu vi bằng $2a$.

Bài 5. (1,0 điểm) Tìm số tự nhiên n để $5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố

-----Hết-----

(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM BÀI KIỂM TRA

HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 8

NĂM HỌC 2022 - 2023

Câu	Đáp án	Điểm
<p>Bài 1</p> <p>(5,0đ)</p>	<p>1) Rút gọn A (3,0 điểm)</p> $A = \left(\frac{x^2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x^2}{x^2 - 3x + 2} \right) \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1} \begin{pmatrix} x \neq 1; x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{pmatrix}$ $= \left[\frac{x^2(x-1) + x^2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} \right] \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x^3 - 4x^2}{(x-2)(x^4 + x^2 + 1)}$ $= \frac{2x^2(x-2)}{(x-2)(x^4 + x^2 + 1)} = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1}$ <p>2) Tìm giá trị lớn nhất của A (2,0 điểm)</p> <p>Với $x \neq 1; x \neq 2; x \neq 3 \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1}$</p> <p>Với: $x = 0 \Rightarrow A = 0$</p>	<p>2,5</p> <p>1,0</p>

Với ; $x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1}$

Áp dụng bất Co si cho các số dương $x^2; \frac{1}{x^2}$ ta có $x^2 = \frac{1}{x^2} \geq 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} = 2$

0,25

$\Rightarrow \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} \leq \frac{2}{3}$ hay $A \leq \frac{2}{3}$ Dấu bằng xảy ra khi $x^2 = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ kết hợp với đk tìm đc $x = -1$

0,5

Vậy $\text{Max } A = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -1$

0,25

0,25

0,25

<p>Bài 2</p> <p>(24,0đ)</p>	<p>1) Giải phương trình sau (2,0 điểm)</p> $(2x^2 + x - 13)^2 + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12)$ $\Leftrightarrow (2x^2 + x - 13)^2 - 4(2x^2 + x - 13)(x^2 - 5x - 12) + 4(x^2 - 5x - 12)^2 = 0$ $\Leftrightarrow [(2x^2 + x - 13) - 2(x^2 - 5x - 12)]^2 = 0$ $\Leftrightarrow (2x^2 + x - 13 - 2x^2 + 10x + 24)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (11x + 11)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	<p>0,5</p>
	<p>2) Tìm các cặp số nguyên (x; y) (2,0 điểm)</p> $x^2 + xy - 2020x - 2021y - 2022 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2021x - 2021y - 2021 = 1$ $\Leftrightarrow (x - 2021)(x + y + 1) = 1$	<p>1,0</p>
	<p>Th1: $\begin{cases} x - 2021 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2020 \\ y = -2022 \end{cases}$</p> <p>Th2: $\begin{cases} x - 2021 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2022 \\ y = -2022 \end{cases}$</p> <p>Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (2020; -2022); (2022; -2022)$</p>	<p>0,5</p>

		1,0
		0,5
		0,5
Bài 3	1) Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp (1,5 điểm)	
(3,0đ)	Chứng minh rằng : $ab - a - b + 1$ chia hết cho 48	
Bài 4		

(0,5đ)	<p>Đặt $A = ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1)$</p> <p>Vì a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp nên</p> $\Rightarrow a = (2k - 1)^2; b = (2k + 1)^2 \quad (k \in \mathbb{Z})$ $\rightarrow A = [(2k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k) = 4k(k - 1)4k(k + 1)$ $= 16k(k - 1)(k + 1) : 16$ <p>Mà $A : 3$ (do $k - 1, k, k + 1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp)</p> <p>Mà 3,16 có UCLN là 1 nên A chia hết cho 48</p> <p>2) Với ba số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 8$.</p> <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $T = 507xz - xy - yz$ (1,5 điểm)</p> $T = 507xz - xy - yz \Leftrightarrow 2T = 507.2xz - 2y(x + z) + 8 - 8$	<p>1,0</p> <p>0,5</p>
--------	---	-----------------------

$$\Leftrightarrow 2T \geq 507.2xz - 2y(x+z) + x^2 + y^2 + z^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz - 2y(x+z) + (x+z)^2 + y^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz + (x+z)^2 - 2y(x+z) + y^2 - 8$$

$$\Leftrightarrow 2T \geq 506.2xz + (x+z-y)^2 - 8 \quad (1)$$

$$+)-y^2 \leq 0 \forall y; (x+z)^2 \geq 0 \forall x, z \Rightarrow 2xz \geq -(x^2+z^2) \geq -(x^2+y^2+z^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2T \geq -506(x^2+z^2) + (x+z-y)^2 - 8$

$$\Leftrightarrow 2T \geq -506(x^2+z^2+y^2) + (x+z-y)^2 - 8 \Leftrightarrow 2T \geq -506.8 + 0 - 8 \Leftrightarrow 2T \geq -507.8 = -4056$$

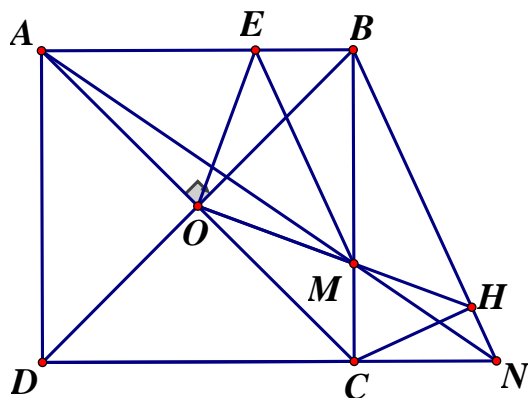
$$\Leftrightarrow T \geq -2028$$

Đấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)^2 = 0 \\ (x+z-y)^2 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=0; z=-2 \\ x=-2; y=0; z=2 \end{cases}$

Vậy $\text{Min}T = -2028 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=0; z=-2 \\ x=-2; y=0; z=2 \end{cases}$

1,0

		0,5
Bài 5 (3,5đ)		



0,5

1) Chứng minh $\triangle OEM$ vuông cân (2,0 điểm)

Ta có ABCD là hình vuông tâm O (GT) nên $AC \perp BD$ tại O ;

$OA = OB = OC = OD$ và $\angle ABO = \angle OCB = 45^\circ$ (tính chất hình vuông)

Xét $\triangle EBO$ và $\triangle MCO$ có :

$OB = OC$ (cmt), $\angle EBO = \angle OCM = 45^\circ$, $BE = CM$ (gt) $\Rightarrow \triangle EBO = \triangle MCO$ (c.g.c)

0,5

$\Rightarrow EO = OM$ (hai cạnh tương ứng) và $\angle EOB = \angle MOC$ (hai góc tương ứng)

0,5

$\Rightarrow \angle EOM = \angle EOB + \angle BOM = \angle COM + \angle MOB = \angle COB = 90^\circ$

0,5

Xét $\triangle EOM$ có $EO = OM$ (cmt) $\Rightarrow \triangle EOM$ cân tại O, mà $\angle EOM = 90^\circ$ (cmt)

	$\Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O (đpcm)	0,5
	<p>2) Chứng minh $EM \parallel BN$ (2,0 điểm)</p> <p>Ta có : $AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (hệ quả định lý Talet)</p> <p>Mà $AB = BC$ (do ABCD là hình vuông) và $BE = CM$(gt) $\rightarrow AE = BM$</p> <p>$\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow EM \parallel BN$ (Định lý Talet đảo)</p>	1,0
		1,0
	<p>3) Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng</p> <p>Kẻ OM cắt BN tại H'</p> <p>Vì $EM \parallel BN$(cmt) $\Rightarrow \angle OME = \angle OH'B$ (hai góc đồng vị)</p> <p>Mà $\angle OME = 45^\circ \Rightarrow \angle OH'B = 45^\circ$</p> <p>Xét $\triangle OMC$ và $\triangle BMH'$ có : $\angle OMC = \angle BMH'$ (hai góc đối đỉnh)</p>	0,5

$\angle OCM = \angle MH'B = 45^\circ \Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'(\text{g.g}) \Rightarrow \frac{OM}{MB} = \frac{MH'}{MC} \Rightarrow \frac{OM}{MH'} = \frac{MB}{MC}$	
<p>Xét $\triangle OMB$ & $\triangle CMH'$: $\frac{OM}{MH'} = \frac{MB}{MC}$ (cmt); $\angle OMB = \angle CMH'$ (hai góc đối đỉnh)</p> <p>$\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH'(\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle OBM = \angle MH'C$ (hai góc tương ứng)</p> <p>Mà $\angle OBM = 45^\circ \Rightarrow \angle MH'C = 45^\circ$</p> <p>Ta có $\angle BH'C = \angle CH'M + \angle MH'B = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$</p> <p>Hay $CH' \perp BN$ tại H' mà $CH \perp BN$ tại H nên $H \equiv H' \Rightarrow O, M, H$ thẳng hàng</p> <p>(đpcm)</p>	0,5
<p>4) Cho độ dài đoạn thẳng $AB = a$ và P, Q lần lượt thuộc cạnh AB, AD sao cho góc PCQ bằng 45° (0,5 điểm)</p> <p>Vẽ hình vuông $BCE'F$, Trên tia BF lấy M' sao cho $BM' = DQ$</p> <p>Dễ dàng chứng minh được $\triangle CQD = \triangle CM'B(\text{c.g.c}) \Rightarrow \angle DCQ = \angle BCM'$ (hai góc tương ứng) và $CM' = CQ$ (hai cạnh tương ứng)</p>	0,5

Ta có : $\left. \begin{array}{l} \angle DCQ + \angle QCA = 45^\circ \\ \angle ACP + \angle QCA = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle DCQ = \angle ACP \Rightarrow \angle BCM' = \angle ACP$

Ta có : $\begin{aligned} \angle M'CP &= \angle PCB + \angle BCM' \\ &= (\angle ACB - \angle ACP) + \angle BCM' = 45^\circ - \angle ACP + \angle BCM' = 45^\circ \end{aligned}$

$\Rightarrow \triangle QCP = \triangle M'CP (\text{c.g.c}) \Rightarrow PQ = PM' \text{ (hai cạnh tương ứng)}$

$\begin{aligned} P_{AQP} &= AP + AQ + PQ = AP + AQ + PM' = AP + AQ + PB + BM' \\ &= AP + AQ + PB + QD = (AP + PB) + (AQ + QD) = 2a(\text{đpcm}) \end{aligned}$

0,5

		0,5
<p>Bài 5</p> <p>(1,0đ)</p>	<p>Tìm số tự nhiên n để $5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố</p> <p>Đặt $A = 5^{2n^2-6n+2} - 12$. Ta có : $5^{2n^2-6n+2} - 12 = 5^2 \cdot 5^{2n(n-3)} - 12$</p> <p>Th1: $\begin{cases} n=0 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow A = 5^2 - 12 = 13$ là số nguyên tố nên $n = 0; 3$ là giá trị cần tìm</p> <p>Th2 : $n(n-3) > 0; n \in \mathbb{N}, n > 3, n \in \mathbb{N}$</p> <p>Ta có $A = 5^{2n^2-6n+2} - 12 = 25^{n^2-3n+1} - 12 = (26-1)^{n^2-3n+1} - 12 = 26.B + (-1)^{n^2-3n+1} - 12$</p> <p>Nếu n lẻ thì $n^2 - 3n + 1$ lẻ nên $(-1)^{n^2-3n+1} = -1$</p> <p>Nếu n chẵn thì $n^2 - 3n + 1$ lẻ nên $(-1)^{n^2-3n+1} = -1$</p> <p>$\Rightarrow A = 26.B - 1 - 12 = 2.13B - 13 = 13(2B-1) : 13$ mà $2B-1 > 0 \forall n > 3, n \in \mathbb{N}$ nên A là hợp số</p>	0,5

	Vậy $\begin{cases} n=0 \\ n=3 \end{cases}$ thì $5^{2n^2-6n+2} - 12$ là số nguyên tố	
		0,5

Ghi chú: Học sinh làm theo cách khác mà đúng vẫn được điểm tối đa

UBND HUYỆN YÊN ĐỊNH

KÌ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8,

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

CHỌN ĐỘI TUYỂN VÒNG 1

ĐỀ CHÍNH THỨC

DỰ THI

HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP

TỈNH

NĂM HỌC: 2023 - 2024

Môn thi: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có 01 trang; gồm 05 câu)

Bài 1. (4,0 điểm)

1. Rút gọn biểu thức:

$$A = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1} \cdot \text{với } x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$$

2. Cho ba số x, y, z khác 0 và thỏa mãn: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$

Tính giá trị biểu thức $P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023})$

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^2 + \frac{9x^2}{x-3} = 40$

2. Tìm x và y thỏa mãn đồng thời cả hai hệ thức sau:

$$x^3 + y^3 = 9 \quad (1) \text{ và } x^2 + 2y^2 = x + 4y \quad (2)$$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^2 + y^2 = 3 - xy$.

2. Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1)$

Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40

Bài 4. (6,0 điểm) Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Bx vuông góc với AB tại B. Trên tia Bx lấy điểm C (C khác B).

Kẻ BH vuông góc với AC (điểm H thuộc AC). Gọi M là trung điểm của AB.

1. Chứng minh rằng: $HA \cdot HC = HB^2$

2. Kẻ HD vuông góc với BC (D thuộc BC). Gọi I là giao điểm của AD và BH. Chứng minh rằng ba điểm C, I, M thẳng hàng.

3. Giả sử AB cố định, điểm C thay đổi trên tia Bx. Biết $\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1$

Tìm vị trí của điểm C trên tia Bx sao cho diện tích tam giác ABI lớn nhất.

Bài 5. (2,0 điểm) Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$

.....Hết.....

Câu	Hướng dẫn chấm	Điểm
1	<p>1. - Với $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$, biểu thức A xác định nên ta có :</p> $A = \left(\frac{2x^3 + x^2 - x}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) : \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \left(\frac{x(2x^2 + x - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x^2 - 1)}{x^3 - 1} - \frac{x^2 + x}{2x^2 + x - 1} + \frac{x}{2x - 1}$ $= \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} - \frac{x(x+1)}{(x+1)(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x(x+1)}{(x^2 + x + 1)} - \frac{x}{(2x-1)} + \frac{x}{2x-1}$ $= \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ <p>Vậy : $A = \frac{x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ (với $x \neq \pm 1, x \neq \frac{1}{2}$)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

		0,5
		0,5
	<p>2. Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \Leftrightarrow (yz + xz + xy)(x + y + z) = xyz$</p> <p>$\Leftrightarrow xyz + x^2z + x^2y + y^2z + xyz + y^2x + z^2y + z^2x + xyz = xyz$</p> <p>$\Leftrightarrow x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + 2xyz = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (x + y)(x + z)(y + z) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = -z \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} = -y^{2023} \\ y^{2023} = -z^{2023} \\ z^{2023} = -x^{2023} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2023} + y^{2023} = 0 \\ y^{2023} + z^{2023} = 0 \\ z^{2023} + x^{2023} = 0 \end{cases}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

	$\Rightarrow P = (x^{2023} + y^{2023})(y^{2023} + z^{2023})(z^{2023} + x^{2023}) = 0.$	0,5
		0,5
2	<p>1. ĐKXD: $x \neq 3$.</p> $x^2 + \frac{9x^2}{x-3} = 40 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 - \frac{6x^2}{x-3} - 40 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6 \cdot \frac{x^2}{x-3} - 40 = 0$ <p>Đặt $t = \frac{x^2}{x-3}$ ta có phương trình $t^2 - 6t - 40 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 10 \\ t = -4 \end{cases}$</p> <p>$t = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 30 = 0$ vô nghiệm;</p> <p>$t = -4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-3} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$</p> <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-6; 2\}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

		0,5
		0,25
	<p>2. Nhân hai vế phương trình (2) với 3, ta được $3x^2 + 6y^2 = 3x + 12y$ (3).</p> <p>Trừ hai phương trình (1) và (3) vế theo vế, ta được:</p> $(x - 1)^3 = (2 - y)^3 \Leftrightarrow y = 3 - x.$ <p>Thế $y = 3 - x$ vào (3), ta được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.</p> <p>Với $x = 1$ thì $y = 2$. Với $x = 2$ thì $y = 1$.</p> <p>Vậy $(x; y) = (2; 1), (1; 2)$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
3	<p>1. Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 3 - xy \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq 1$</p> <p>Mà $x, y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 0 < xy \leq 1 \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = y = 1$</p> <p>Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $(x, y) = (1; 1)$</p>	<p>0,75</p> <p>0,75</p> <p>0,5</p>

	<p>2. Ta có $3(x^2 - 1) = 2(y^2 - 1) \Leftrightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1(*)$</p> <p>Th1: Trước hết ta chứng minh $x^2 - y^2 : 8$</p> <p>Ta có :</p> $\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 4 \pmod{8} \\ 2y^2 \equiv 0; 2 \pmod{8} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 6; 3; 1; 4; 2 \pmod{8}$ <p>Do đó từ (*) ta có : $3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod{8} \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \equiv 1 \pmod{8}$</p> $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow (x^2 - y^2) : 8(1)$ <p>Th2: Chứng minh $x^2 - y^2 : 5$</p> <p>Ta có $\begin{cases} x^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \\ y^2 \equiv 0; 1; 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 \equiv 0; 3; 2 \pmod{5} \\ 2y^2 \equiv 0; 2; 3 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 \equiv 0; 3; 2; 1; 4 \pmod{5}$</p> <p>Do đó từ (*) ta có : $3x^2 - 2y^2 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 \equiv 1 \pmod{5}$</p> $\Leftrightarrow x^2 - y^2 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow x^2 - y^2 : 5(2)$ <p>Từ (1) và (2) kết hợp với $(5; 8) = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 : 40 \Rightarrow đpcm$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---	-----------------------

		0,5
		0,5
4		
	<p>1. Xét $\triangle AHB$ và $\triangle BHC$ có:</p> <p>+) $\widehat{AHB} = \widehat{BHC}$ (do $BH \perp AC$)</p> <p>+) $\widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ với \widehat{HBA})</p> <p>$\Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle BHC$ (g.g)</p> <p>$\Rightarrow \frac{HA}{HB} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow HA \cdot HC = HB^2$</p>	2,0

	<p>2. Giả sử đường thẳng CI cắt HD và AB lần lượt tại các điểm K và M'</p> <p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: CAM', $CM'B$ với</p> <p>$HD \parallel AB$, ta có:</p> $\frac{HK}{AM'} = \frac{CK}{CM'}, \frac{KD}{BM'} = \frac{CK}{CM'} \Rightarrow \frac{HK}{AM'} = \frac{KD}{BM'} \quad (1)$ <p>*Áp dụng hệ quả định lý Ta lét vào các tam giác: IAM', $IM'B$ với</p> <p>$HD \parallel AB$, ta có:</p> $\frac{HK}{M'B} = \frac{KI}{IM'}, \frac{KD}{AM'} = \frac{KI}{IM'} \Rightarrow \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{AM'} \quad (2)$ <p>Từ (1) và (2) suy ra:</p> $\frac{HK}{AM'} : \frac{HK}{M'B} = \frac{KD}{M'B} : \frac{KD}{AM'} \Rightarrow \frac{M'B}{AM'} = \frac{AM'}{M'B} \Rightarrow AM'^2 = M'B^2 \Rightarrow AM' = BM'$ <p>$\Rightarrow M'$ là trung điểm của AB. Mà M cũng là trung điểm của AB (gt)</p> <p>$\Rightarrow M'$ trùng với M. Vậy 3 điểm C, I, M thẳng hàng</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---	----------------------------------

		0,5
	<p>3. Ta có: $\frac{MI}{IC} \cdot \frac{CH}{HA} \cdot \frac{AB}{BM} = 1 \Rightarrow \frac{MI}{IC} = \frac{HA \cdot BM}{CH \cdot AB} = \frac{HA \cdot AB}{2CH \cdot AB} = \frac{HA}{2CH}$</p> <p>$= \frac{HA \cdot CH}{2CH^2} = \frac{HB^2}{2CH^2}$ (1) (Vì : $BM = \frac{AB}{2}$; Theo câu a: $HA \cdot CH = HB^2$)</p> <p>Mà $\triangle AHB \sim \triangle BHC$ nên $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{BC}$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MI}{IC} = \frac{AB^2}{2BC^2} = \frac{a^2}{2x^2} \Rightarrow \frac{MI}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}$</p> <p>Suy ra $\frac{S_{IAB}}{S_{CAB}} = \frac{IM}{MC} = \frac{a^2}{a^2 + 2x^2}$. Mà $S_{CAB} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{ax}{2}$</p> <p>$\Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 x}{a^2 + 2x^2} = \frac{a^3}{2 \cdot \left(\frac{a^2}{x} + 2x \right)} \leq \frac{a^3}{4 \sqrt{\frac{a^2}{x} \cdot 2x}} = \frac{a^3}{4\sqrt{2}a} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$</p> <p>Dấu „=” xảy ra khi: $\frac{a^2}{x} = 2x \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

	<p>Vậy Khi C trên tia Bx sao cho $BC = \frac{a}{\sqrt{2}}$ thì giá trị lớn nhất của $S_{IAB} = \frac{a^2}{4\sqrt{2}}$</p>	0,5
		0,5
5	<p>Với các số a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Ta có :</p> <p>*) $(a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a\left(a^2 - 3a + \frac{9}{4}\right) + \frac{3a}{4} - 1 = a\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3a}{4} - 1 \geq \frac{3a}{4} - 1 \quad (1)$</p> <p>*) $(b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = b\left(b^2 - 3b + \frac{9}{4}\right) + \frac{3b}{4} - 1 = b\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3b}{4} - 1 \geq \frac{3b}{4} - 1 \quad (2)$</p> <p>*) $(c-1)^3 = c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = c\left(c^2 - 3c + \frac{9}{4}\right) + \frac{3c}{4} - 1 = c\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3c}{4} - 1 \geq \frac{3c}{4} - 1 \quad (3)$</p> <p>Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được :</p> $(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3 \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - 3 = \frac{3}{4} \cdot 3 - 3 = -\frac{3}{4} \Rightarrow P \geq -\frac{3}{4}$ <p>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p>

	$\begin{cases} a\left(a-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ b\left(b-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ c\left(c-\frac{3}{2}\right)^2=0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b;c)=\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c)=\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c)=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};0\right) \end{cases}$ <p>Vậy $\min P = -\frac{3}{4}$ khi $(a;b;c)=\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ và các hoán vị của nó</p>	0,5
		0,5

		0,25
--	--	------

UBND HUYỆN TIỀN DU

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2023-2024

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: **TOÁN 8****PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO***Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)***Ngày thi: 22/2/2024****I. PHẦN CHUNG****Câu 1(3,5 điểm)**

1) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}$, với $x \neq \pm 1; x \neq \frac{-1}{4}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn $2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$.

Câu 2(3,0 điểm)

Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

1) $x^4 - 5x^2 + 4$;

2) $(x + y + 2z)^2 + (x + y - z)^2 - 9z^2$.

Câu 3(3,0 điểm)

1) Xác định các số thực a, b để đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức

$$x^2 - 1.$$

2) Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ thì

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1.$$

Câu 4(6,5 điểm) Cho hình chữ nhật ABCD ($AB > 2BC$), trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BC = AM$, trên tia

CB lấy điểm N sao cho $CN = BM$, CM cắt AN tại P, trên cạnh CD lấy điểm E sao cho $CE = CB$.

1) Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành.

- 2) Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.
- 3) Đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt đường thẳng qua N vuông góc với NE tại điểm F. Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông.
- 4) Gọi K là giao điểm của EN với PC, L là giao điểm của EF với AN. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP.

II. PHẦN RIÊNG

Thí sinh lựa chọn làm một (chỉ một) câu trong hai câu sau:

Câu 5a (4,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng nếu $2n$ (với $n \in \mathbb{N}^*$) là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

- 2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$.

Câu 5b (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức $A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$. Tìm số dư khi chia số A cho 3.

2) Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức $A = x^3 y^5 + x^5 y^3$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh : Số báo danh

UBND HUYỆN TIỀN DU

HƯỚNG DẪN CHẤM

PHÒNG GD & ĐT

ĐỀ CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: Toán - Lớp 8

Câu	Đáp án	Điểm
1.1. (2,0 điểm)		
	<p>Cho biểu thức $A = \left(\frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1}$, với $x \neq \pm 1; x \neq -\frac{1}{4}$.</p> <p>Rút gọn biểu thức A.</p>	

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right) : \frac{x-1}{4x+1} \\
&= \left[\frac{3x+1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \right] \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{3x+1-2x(x+1)+3x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{3x+1-2x^2-2x+3x^2-3x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{4x+1}{x-1} \\
&= \frac{4x+1}{x+1}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{4x+1}{x+1}$

0,5

0,25

0,25

0,25

		0,25
		0,25
		0,25
1.2. (1,5 điểm)		

	$2x^3 + (x+1)^3 - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 2x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 2x^3 + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^3 = 1$ $\Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0$ $\Leftrightarrow 3x(x+1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$	0,25
	Vậy $x = 0$ hoặc $x = -1$ thỏa mãn.	0,25
		0,25
		0,25
		0,25

		0,25
2.1 (1,5 điểm)		
	$ \begin{aligned} &x^4 - 5x^2 + 4 \\ &= x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 \\ &= (x^4 - 4x^2) - (x^2 - 4) \\ &= x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\ &= (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 1) \end{aligned} $	0.5
		0.25
		0,25
		0,25

		0,25
2.2 (1,5 điểm)		
	$\begin{aligned} & (x+y+2z)^2 + (x+y-z)^2 - 9z^2 \\ &= \left[(x+y+2z)^2 - 9z^2 \right] + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y+2z-3z)(x+y+2z+3z) + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y-z)(x+y+5z) + (x+y-z)^2 \\ &= (x+y-z) \left[(x+y+5z) + (x+y-z) \right] \\ &= (x+y-z)(2x+2y+4z) \\ &= 2(x+y-z)(x+y+2z) \end{aligned}$	0,25
		0,25
		0,25

		0,25
		0,25
		0,25
3.1 (1,5 điểm)		
	<p>3) Xác định các số thực a, b để đa thức $P(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$.</p>	
	<p>Vì $P(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 - 1$</p> <p>Suy ra $P(x) = (x^2 - 1) \cdot Q(x)$ (1)</p> <p>Thay $x = 1$ vào (1) ta có $P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$ (*)</p> <p>Thay $x = -1$ vào (1) ta có $P(-1) = 0 \Rightarrow -1 - a + b = 0 \Rightarrow b - a = 1$ (**)</p> <p>Từ (*) và (**) ta có: $(a + b) + (b - a) = -1 + 1 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -1$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

	Vậy $a = -1; b = 0$.	0,25
		0,25
3.2 (1,5 điểm)		
	<p>Cho a, b, c là ba số khác 0. Chứng minh rằng nếu $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$ thì</p> $\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = 1.$	
	<p>Ta có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow ab + bc + ca = 0$</p> <p>Khi đó:</p> $\begin{aligned} a^2 + 2bc &= a^2 + 2bc - (ab + bc + ca) \\ &= a^2 + bc - ab - ac \\ &= (a^2 - ab) - (ac - bc) \\ &= a(a - b) - c(a - b) \\ &= (a - b)(a - c) \end{aligned}$	0,25

Tương tự:

$$b^2 + 2ac = (b - a)(b - c)$$

$$c^2 + 2ab = (c - a)(c - b)$$

0,25

0,25

Do đó:

$$\begin{aligned}
 & \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{(b-c)(a^2 - ab - ac + bc)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= \frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

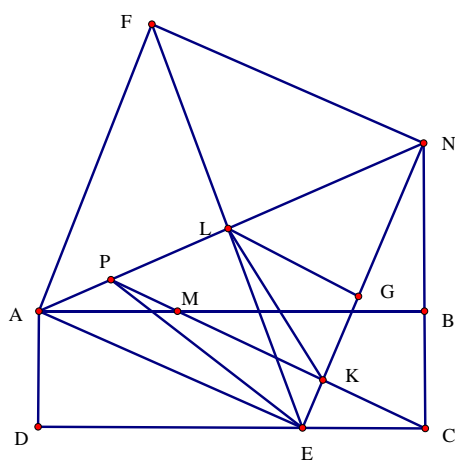
Vậy đẳng thức được chứng minh.

0,25

		0,25
		0,25
4.1 (2,0 điểm)		

Cho hình chữ nhật ABCD ($AB > 2BC$), trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BC = AM$, trên tia CB lấy điểm N sao cho $CN = BM$, CM cắt AN tại P, trên cạnh CD lấy điểm E sao cho $CE = CB$.

- 5) Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành.
- 6) Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau.
- 7) Đường thẳng qua A vuông góc với AE cắt đường thẳng qua N vuông góc với NE tại điểm F. Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông.
- 8) Gọi K là giao điểm của EN với PC, L là giao điểm của EF với AN. Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP.



Vẽ hình đúng, ghi GT – KL đầy đủ.

		0,5
	<ul style="list-style-type: none"> Chứng minh tứ giác AMCE là hình bình hành 	
	+ Ta có ABCD là hình chữ nhật (1) nên $AB \parallel CD$. Mà $M \in AB; E \in CD \Rightarrow AM \parallel CE$	0,5
	+ Lại có: $AM = BC; CE = BC \Rightarrow AM = CE$	0,5
	Xét tứ giác AMCE có: $AM \parallel CE; AM = CE$	
	Do đó tứ giác AMCE là hình bình hành.	0,5
4.2 (1,5 điểm)		
	<ul style="list-style-type: none"> Chứng minh các tam giác ADE và ECN bằng nhau. 	
	+ Từ (1) $\Rightarrow AB = CD$;	0,25
	Mà $AB = AM + BM; CD = CE + DE; AM = CE$ (cmt) $\Rightarrow BM = DE$	0,25
	Mặt khác $CN = BM$ (gt) $\Rightarrow DE = CN (= BM)$	0,25

	<p>+ Từ (1) $\Rightarrow AD = BC$, mà $CE = BC \Rightarrow AD = CE (= BC)$</p>	0,25
	<p>+ Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ECN$ có:</p> $AD = CE (cmt)$ $\angle ADE = \angle ECN (= 90^\circ)$ $DE = CN (cmt)$ $\Rightarrow \triangle ADE = \triangle ECN (c.g.c)$	0,5
4.3 (1,5 điểm)		
	<p>Chứng minh tứ giác AENF là hình vuông</p>	
	<p>+ Có $\triangle ADE = \triangle ECN (cmt) \Rightarrow \begin{cases} AE = NE \\ \angle AED = \angle CNE \end{cases}$</p> <p>Mà $\triangle CNE$ vuông tại C $\Rightarrow \angle ENC + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AED + \angle NEC = 90^\circ \Rightarrow \angle AEN = 90^\circ$</p>	0,25

	<p>+ Xét tứ giác AENF có:</p> $AEN = 90^0 \text{ (cmt)}$ $FAE = 90^0 \text{ (} AF \perp AE \text{)}$ $FNE = 90^0 \text{ (} FN \perp NE \text{)}$ <p>Suy ra AENF là hình chữ nhật</p>	0,25
		0,5
	Lại có $AE = NE$ (cmt)	0,25
	Nên AENF là hình vuông.	0,25
4.4 (1,5 điểm)		
	Tính tỉ số diện tích của hai tam giác NKL và NEP	

	<p>+ Có AENF là hình vuông và AN cắt EF tại L $\Rightarrow \triangle NLE$ vuông cân tại L.</p> <p>Hạ $LG \perp NE (G \in NE) \Rightarrow G$ là trung điểm của NE và $LG = \frac{1}{2}NE$ (*)</p> <p>+ AMCE là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow AE // CM$, mà $AE \perp EN \Rightarrow CM \perp EN$</p> <p>hay $PK \perp KN \Rightarrow \triangle PKN$ vuông cân tại K (do $PNE = 45^\circ$) $\Rightarrow PK = NK$ (**)</p>	0,5
		0,5
	<p>+ $\triangle NKL$ có $LG \perp NK \Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2}LG.NK$</p> <p>$\triangle NPE$ có $PK \perp NE \Rightarrow S_{NPE} = \frac{1}{2}PK.NE$</p> <p>Do đó kết hợp với (*) và (**) $\Rightarrow S_{NKL} = \frac{1}{2}S_{NPE} \Rightarrow \frac{S_{NKL}}{S_{NPE}} = \frac{1}{2}$.</p>	0,25

		0,25
5.1 bảng A (2,0 điểm)		
	Theo bài ra : $2n = a^2 + b^2$ với $a, b \in N$.	0,25
	Từ đây suy ra a, b cùng tính chẵn lẻ.	0,25
	Do đó $a + b$ và $a - b$ là các số chẵn.	0,25
	Đặt $\begin{cases} a + b = 2m \\ a - b = 2k \end{cases}$ trong đó $m, k \in Z$.	0,25
	Suy ra: $a = m + k, b = m - k$	0,5
	Khi đó $2n = (m + k)^2 + (m - k)^2 \Rightarrow n = m^2 + k^2$.	
	Vậy có đpcm.	0,5

5.2 bảng A (2,0 điểm)

3) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của $A = \frac{6x-2}{3x^2+1}$.

$$\begin{aligned}
 *) A &= \frac{6x-2}{3x^2+1} \\
 &= \frac{6x-2}{3x^2+1} - 1 + 1 \\
 &= \frac{6x-2-3x^2-1}{3x^2+1} + 1 \\
 &= 1 - \frac{3(x-1)^2}{3x^2+1}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \leq 1 \text{ với } \forall x$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = 1$.

0,25

		0,25
		0,25
		0,25
	$ \begin{aligned} *) A &= \frac{6x-2}{3x^2+1} \\ &= \frac{6x-2}{3x^2+1} + 3 - 3 \\ &= \frac{6x-2+9x^2+3}{3x^2+1} - 3 \\ &= \frac{(3x+1)^2}{3x^2+1} - 3 \end{aligned} $ <p>$\Rightarrow A \geq -3$ với $\forall x$</p> <p>Dấu “=” xảy ra khi $x = -\frac{1}{3}$</p> <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -3 khi $x = -\frac{1}{3}$.</p>	0,25

		0,25
		0,25
		0,25
5.1 bảng B (2,0 điểm)		
	<p>$A = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 2022^3 + 2023^3$. Tổng A có 2023 số hạng. Ta chia thành</p> <p>2023 : 3 = 674 (nhóm), dư 1 số như sau:</p> $A = (1^3 + 2^3 + 3^3) + (4^3 + 5^3 + 6^3) + \dots + (2020^3 + 2021^3 + 2022^3) + 2023^3$	

		0,25
	<p>+ Chứng minh đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ (1)</p> <p>+ Nếu a, b, c là 3 số tự nhiên liên tiếp. Giả sử $a = n; b = n+1, c = n+2$ ($n \in \mathbb{N}$) khi đó ta có</p> <p>$a + b + c = n + (n+1) + (n+2) = 3n+3$ chia hết cho 3. Mà $3abc$ cũng chia hết cho 3 nên từ (1)</p> <p>$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 : 3$</p>	0,5
	<p>+Áp dụng kết quả trên ta có:</p> <p>$1^3 + 2^3 + 3^3 : 3$</p> <p>$4^3 + 5^3 + 6^3 : 3$</p> <p>...</p> <p>$2020^3 + 2021^3 + 2022^3 : 3$</p> <p>2023 chia cho 3 dư 1 nên 2023^3 chia cho 3 cũng dư 1</p>	

	Do đó A chia cho 3 dư 1.	0,5
		0,25
5.2 bảng B (2,0 điểm)		
	Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^3 y^5 + x^5 y^3$.	
	+ Trước hết ta CM BĐT: $(a + b)^2 \geq 4ab$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.	0,5
	+Áp dụng BĐT trên ta có:	

$$\begin{aligned}
 A &= x^3 y^5 + x^5 y^3 \\
 &= x^3 y^3 (x^2 + y^2) \\
 &= \frac{1}{2} (xy)^2 \cdot [2xy(x^2 + y^2)] \\
 &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(x+y)^2}{4} \right)^2 \cdot \frac{(2xy + x^2 + y^2)}{4} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1^4}{16} \cdot \frac{(x+y)^2}{4} \\
 &= \frac{1}{128}.
 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là $\frac{1}{128}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

		1,0
		0,25
		0,25

Chú ý:

1. Học sinh làm đúng đến đâu giám khảo cho điểm đến đó, tương ứng với thang điểm.
2. HS trình bày theo cách khác mà đúng thì giám khảo cho điểm tương ứng với thang điểm. Trong trường hợp mà hướng làm của HS ra kết quả nhưng đến cuối còn sai sót thì giám khảo trao đổi với tổ chấm để giải quyết.
3. Tổng điểm của bài thi không làm tròn.

-----Hết-----

TRƯỜNG THCS DIỄN HẠNH**ĐỀ THI VÒNG I -TOÁN 8 NĂM HỌC 2023-2024*****Môn Toán 8 Vòng 1 (Thời gian 120 phút)*****Câu 1 :**(4,0đ)

a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số \overline{abcd} biết rằng nó là một số chính phương; chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố.

b) Cho 3 số tự nhiên a, b, c. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì

$a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

Câu 2:(6,0đ) 1. Cho biểu thức: $A = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6} - 2x$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm các giá trị của x để A = 6.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.

2. Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức : $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$.

Câu 3(1,0đ) Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 3xy + 1$.

Câu 4 (7,0đ) Cho tam giác ABC nhọn có góc B bằng 45° và vẽ đường cao AH Gọi M là trung điểm của cạnh AB, E là điểm đối xứng với H qua M.

a) Chứng minh AHBP là hình vuông.

b) Vẽ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh $HP = 2MK$.

c) Gọi D là giao điểm của AH và BK. Qua D và C vẽ các đường thẳng lần lượt song song với BC và AH Sao cho chúng cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng.

d) Chứng minh các đường thẳng CD, AB và PQ đồng quy.

Câu 5(2,0đ) Cần ít nhất bao nhiêu quả cân và một cái cân đĩa để có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13.

..... Hết

ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM ĐỀ THI THỬ VÒNG I

NĂM HỌC 2022-2023

Môn Toán 8 (Thời gian 120 phút)

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 : (4,0đ)	a) Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số \overline{abcd} biết rằng nó là một số chính phương; chia hết cho 9 và d là một số nguyên tố. b) Cho 3 số tự nhiên a, b, c. Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 6 thì	

$a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 6.

1	a)	<p>Lập luận được $d = 5$,</p> <p>vì $\overline{abcd} < 100^2$ suy ra $\overline{abcd} = \overline{x5}^2$</p> <p>Vì \overline{abcd} chia hết cho 9 $\Rightarrow \overline{x5}^2$ chia hết cho 9 $\Rightarrow \overline{x5}$ chia hết cho 3</p> <p>Suy ra $x + 5 \in \{6; 9; 12\} \Rightarrow x \in \{1; 4; 7\}$.</p> <p>+ Nếu $x = 1$ thì $\overline{abcd} = \overline{15}^2 = 225$ vô lý</p> <p>+ Nếu $x = 4$ thì $\overline{abcd} = \overline{45}^2 = 2025$ thoả mãn.</p> <p>+ Nếu $x = 7$ thì $\overline{abcd} = \overline{75}^2 = 5625$ thoả mãn</p> <p>Vậy số tự nhiên có bốn chữ số cần tìm là 2025 và 5625.</p>	0,5đ
			0,5đ
			0,5đ
			0,5đ

2.1

a)

$$\exists K \exists \delta: x \in R$$

0,25đ

	$A = \frac{2(x^4 + 4x^2 - 12) + x^4 + 11x^2 + 30}{x^2 + 6} - 2x$	0,25đ
	$A = \frac{3x^4 + 19x^2 + 6 - 2x^3 - 12x}{x^2 + 6}$	0,25đ
	$A = \frac{(x^2 + 6)(3x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 6}$	0,5đ
	$A = 3x^2 - 2x + 1$	0,25đ
b)	$A = 6 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 1 = 6$	0,25đ
	$\Leftrightarrow (x+1)(3x-5) = 0$	0,5đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ 3x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}$	0,5đ
	<p>Đối chiếu điều kiện ta có $x \in \left\{-1; \frac{5}{3}\right\}$ thì $A = 6$.</p>	

	$P = \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$	
	$P = \frac{a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$	0,25đ
	$P = \frac{ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$	
	$P = \frac{ab(a-b) - c(a-b)(a+b) + c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$	
	$P = \frac{(a-b)(ab - ca - cb + c^2)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$	
	$P = \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 1$	0,25đ
		0,25đ

		0,25đ
		0,25đ
Bài 3(1đ) Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 3xy + 1$		
3	$x^3 + y^3 = 3xy + 1 \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xy = 1$ $\Leftrightarrow (x + y)^3 + 1 - 3xy(x + y + 1) = 2$ $\Leftrightarrow (x + y + 1) \left[(x + y)^2 - (x + y) + 1 \right] - 3xy(x + y + 1) = 2$ $\Leftrightarrow (x + y + 1)(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y) = 2$ <p>Vì $2(x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y) = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in R$</p>	0,25đ

	$\Rightarrow x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y \geq 0$. Do đó ta xét hai trường hợp sau :	0,25đ
	<p>TH1 : $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$</p> <p>TH2 : $\begin{cases} x + y + 1 = 2 \\ x^2 + y^2 + 1 - xy - x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$</p> <p>hoặc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$</p> <p>Vậy: $(x; y) \in \{(1; 0); (0; 1)\}$</p>	0,25đ
Bài 4(7 đ) Cho tam giác ABC nhọn có góc B bằng 45^0 và vẽ đường cao AH Gọi M là		

trung điểm của cạnh AB, E là điểm đối xứng với H qua M.

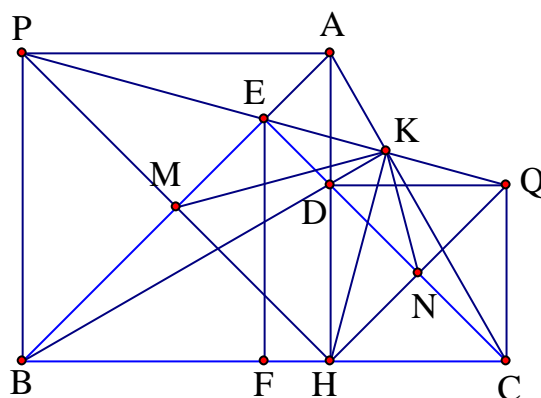
a) Chứng minh AHBP là hình vuông

b) Vẽ đường cao BK của tam giác ABC. Chứng minh $HP = 2MK$.

c) Gọi D là giao điểm của AH và BK. Qua D và C vẽ các đường thẳng lần lượt song song với BC và AH sao cho chúng cắt nhau tại Q. Chứng minh P, K, Q thẳng hàng

d) Chứng minh các đường thẳng CD AB và PQ đồng quy.

4 Hình vẽ : 0,5 đ



a)	<p>Vì M là trung điểm của AB và PH nên tứ giác ABCD là hình bình hành</p> <p>mà $\angle AHB = 90^\circ$ nên AHBP là hình chữ nhật,</p> <p>vì $\angle ABH = 45^\circ$ nên tam giác ABH vuông cân tại H $\Rightarrow HA = HB$.</p> <p>Hình chữ nhật APBH có $HA = HB$ nên là hình vuông.</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
b)	<p>Sử dụng tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông ABK suy ra</p> <p>$AB = 2MK$.</p> <p>dùng kết quả câu a) suy ra $HP = AB$ do đó $HP = 2MK$.</p>	0,5đ

			0,5đ
	c)	<p>Từ $HP = 2MK$ suy ra tam giác HKP vuông tại K. Suy ra $\angle HKP = 90^\circ$</p> <p>Chứng minh tương tự ta có $\angle HKQ = 90^\circ \Rightarrow \angle PKQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$</p> <p>Suy ra P, K, Q thẳng hàng.</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>
	d)	<p>Gọi E là giao điểm của PQ và AB, F là trung điểm của BC.</p> <p>Ta có $ME \parallel HQ$ (vì cùng vuông góc với PH) mà M là trung điểm của PH nên ME là đường trung bình của tam giác HPQ. Suy ra E là trung điểm của PQ suy ra EF là đường trung bình của hình thang $BPCQ$:</p> $EF = \frac{1}{2}(PB + CQ) = \frac{1}{2}(BH + HC) = \frac{1}{2}BC \Rightarrow \triangle EBC \text{ vuông tại } E$ <p>$\Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$.</p>	<p>0,5đ</p> <p>0,5đ</p>

	<p>Mặt khác ta có: $CD \perp AB$ do D là trực tâm của tam giác ABC.</p> <p>Như vậy $CD \perp AB, CE \perp AB \Rightarrow E, D, C$ thẳng hàng do đó CD, AB và PQ đồng quy.</p>	0,5đ
		0,5đ
<p>Câu 5(2đ) Cần ít nhất bao nhiêu quả cân và một cái cân đĩa để có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13.</p>		
5	<p>Với 4 quả cân gồm: 1 quả cân 6kg, 1 quả cân 4kg, 1 quả cân 2kg và 1 quả cân 1kg, ta có thể cân được những khối lượng có giá trị là số nguyên từ 1 đến số 13. Cụ thể như sau:</p>	0,25đ

$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 4$$

$$5 = 4 + 1$$

$$6 = 6$$

$$7 = 6 + 1$$

$$8 = 6 + 2$$

$$9 = 6 + 2 + 1$$

$$10 = 6 + 4$$

$$11 = 6 + 4 + 1$$

	$12 = 6 + 4 + 2$	
	$13 = 6 + 4 + 2 + 1$	0,25đ
		0,25đ

		0,5đ
		0,5đ
	<p>Giả sử chỉ dùng tối đa 3 quả cân mà cũng làm được những điều đề bài yêu cầu. Phải có ít nhất 1 quả cân a_1 nặng 1kg để cân được khối lượng 1kg.</p> <p>TH1: Quả cân có khối lượng lớn nhất là a_2 nặng hơn 4kg. Lúc này không thể cân được khối lượng 2kg, do đó cần có thêm quả cân a_3.</p> <p>+ Nếu quả cân a_3 nặng hơn 2kg thì không thể cân được khối lượng 2kg.</p> <p>+ Nếu quả cân a_3 nặng 1kg hoặc 2kg thì không thể cân được khối lượng 4kg.</p> <p>Vậy TH1 sai.</p>	0,25

	<p>TH2: Quả cân có khối lượng lớn nhất là a_2 nhẹ hơn 5kg. Lúc này kể cả khi có thêm quả là cân a_3 đi nữa cũng không thể cân được 13kg</p> <p>Vậy TH2 sai.</p> <p>Vậy số quả cân ít nhất để thực hiện được yêu cầu bài toán</p>	
--	--	--

PHÒNG GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO ĐỀ KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

HUYỆN VŨ THU'

Môn: TOÁN 8

Năm học: 2023-2024

 ĐỀ CHÍNH THỨC

(Thời gian làm bài: 120 phút)

Bài 1 (4,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$.

Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của biểu thức A khi x, y thỏa mãn đẳng thức

$$x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y).$$

Bài 2 (4,0 điểm).

a) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$.

b) Tìm m để phương trình (ẩn x): $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$ có nghiệm duy nhất.

Bài 3 (4,0 điểm).

a) Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $g(x) = x - 2$ được dư là 21, chia cho đa thức

$h(x) = x^2 + 2$ được đa thức dư là $2x - 1$. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức

$h(x).g(x)$.

b) Tìm các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy = 3x^2 + 5$.

Bài 4 (4,0 điểm).

Cho hình vuông $ABCD$. Gọi K là điểm nằm giữa A và B , I là điểm nằm giữa B và C sao cho $CI = BK$. Đường thẳng AI cắt đường thẳng DC tại M .

a) Chứng minh: $IK \parallel BM$.

b) Gọi N là điểm thuộc tia đối của tia CB sao cho $CN = CM$, O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Chứng minh $\triangle BOI$ đồng dạng $\triangle BND$.

Bài 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A . Lấy điểm D thuộc cạnh BC (D không trùng với B và C). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB và AC .

a) Chứng minh rằng: Nếu AD vuông góc BC thì $\triangle AFE$ đồng dạng $\triangle ABC$.

b) Cho biết $\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}$. Chứng minh AD là trung tuyến hoặc AD là đường phân

giác trong của $\triangle ABC$.

Bài 6 (2,0 điểm).

a) Các số tự nhiên từ 1 đến 10 được xếp xung quanh một đường tròn theo một thứ tự tùy ý. Chứng minh rằng với cách xếp đó, luôn tồn tại ba số theo thứ tự liên tiếp có tổng lớn hơn hoặc bằng 17.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố a và b sao cho $a+b; 4ab-4; 4ab-3$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

----- Hết -----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

PHÒNG GD VŨ THƯ

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HSG HUYỆN

---***---

Môn: Toán 8 – Năm học 2022-2023

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 1	<p>Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ với</p> <p>$x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$.</p> <p>Rút gọn biểu thức A và tính giá trị của biểu thức A khi x;y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y)$.</p>	
	<p>*) Rút gọn biểu thức A:</p> $A = \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{y^2 + xy} \right) : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$ $= \left[\frac{x^2}{x(x + y)} - \frac{x^2 - y^2}{xy} - \frac{y^2}{y(x + y)} \right] : \frac{x^2 + xy + y^2}{x + y}$	0,25
	$= \frac{x^2 y - (x^2 - y^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$	0,25
	$= \frac{xy(x - y) - (x - y)(x + y)^2}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,5
	$= \frac{(x - y)[xy - (x + y)^2]}{xy} \cdot \frac{1}{x^2 + xy + y^2}$	0,25

	$= \frac{-(x-y)(x^2+xy+y^2)}{xy} \cdot \frac{1}{x^2+xy+y^2}$	0,25
	$= \frac{y-x}{xy}$	0,25
	Vậy với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$. thì ta có $A = \frac{y-x}{xy}$	0,25
	*) Tính giá trị của biểu thức A khi x; y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y)$ $x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y) \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$	0,75
	$\Leftrightarrow (x-1)^2 = (y+2)^2 = 0 \text{ (Do } ((x-1)^2 \geq 0; (y+2)^2 \geq 0))$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} (t/m)$	0,25
	Khi đó: $A = \frac{y-x}{xy} = \frac{-2-1}{1(-2)} = \frac{3}{2}$.	0,25
	Kết luận: Khi x,y thỏa mãn đẳng thức: $x^2 + y^2 + 5 = 2(x - 2y)$ thì $A = \frac{3}{2}$	0,25
Bài 2	a) Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$.	

	b) Tìm m để phương trình (ẩn x): $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$ có nghiệm duy nhất.	
a) 2 điểm	<p>Giải phương trình:</p> $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x+3) = 6$ $\Leftrightarrow (2x+2)(2x+4)(2x+1)(2x+3) = 24$	0,25
	<p>Đặt $2x = y$. Phương trình trở thành:</p> $(y+1)(y+2)(y+3)(y+4) = 24$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 4)(y^2 + 5y + 6) = 24$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 4)^2 + 2(y^2 + 5y + 4) + 1 = 25$ $\Leftrightarrow (y^2 + 5y + 5)^2 = 25$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y + 5 = 5(I) \\ y^2 + 5y + 5 = -5(II) \end{cases}$	0,5
	<p>Giải phương trình (I):</p> $y^2 + 5y + 5 = 5 \Leftrightarrow y(y+5) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$	0,5
	Giải phương trình (II)	0,5

	$y^2 + 5y + 5 = -5 \Leftrightarrow y^2 + 5y + 10 = 0$ $\Leftrightarrow \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0$ <p>Phương trình vô nghiệm vì $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ với mọi y</p>	
	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left\{-\frac{5}{2}; 0\right\}$	0,25
b)	ĐKXĐ: $x \neq -1; x \neq 2$	0,25
	$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+m}{x-2} = 2$ $\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2) + (x+1)(x+m)}{(x+1)(x-2)} = 2$	0,25
	$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 + x^2 + mx + x + m = 2(x^2 - x - 2)$	0,25
	$\Leftrightarrow mx = -m - 6$	0,25
	*) Xét $m = 0$. Phương trình trở thành: $0x = -6$ (vô nghiệm)	0,25
	*) Xét $m \neq 0$. Khi đó: $x = \frac{-m-6}{m}$.	0,5

	<p>Phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:</p> $\begin{cases} \frac{-m-6}{m} \neq -1 \\ \frac{-m-6}{m} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m-6 \neq 0 \\ -m-6 \neq 2m \end{cases} \Leftrightarrow m \neq -2$	
	<p>KL: Vậy với $\begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất</p>	0,25
Bài 3	<p>a) Biết rằng đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $g(x) = x - 2$ được dư là 21, chia cho đa thức $h(x) = x^2 + 2$ được đa thức dư là $2x - 1$. Tìm đa thức dư khi chia đa thức $f(x)$ cho đa thức $h(x).g(x)$.</p> <p>b) Tìm các số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy = 3x^2 + 5$.</p>	
a)	<p>Xét phép chia $f(x)$ cho $h(x).g(x)$ ta có:</p> $\begin{aligned} f(x) &= h(x).g(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x-2)(x^2+2)q(x) + ax^2 + bx + c \end{aligned}$	0,25
	<p>Trong đó $q(x)$ là đa thức ẩn x; a, b, c là các số xác định. Ta có:</p>	0,25

	+) $f(x)$ chia cho $(x-2)$ dư 21 nên $f(2) = 21$. Suy ra $4a + 2b + c = 21$	
	+) $f(x) = h(x) \cdot g(x) \cdot q(x) + ax^2 + bx + c$ $f(x) = (x-2)(x^2+2)q(x) + a(x^2+2) + bx + c - 2a$	0,25
	$f(x)$ chia cho $x^2 + 2$ dư $2x-1$ nên $\begin{cases} b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases}$	0,5
	Khi đó ta có: $\begin{cases} 4a + 2b + c = 21 \\ b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + c = 17 \\ b = 2 \\ c - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = 5 \end{cases}$	0,5
	KL: Đa thức dư cần tìm là $3x^2 + 2x + 5$	0,25
b)	$y^2 + 2xy = 3x^2 + 5$ $\Leftrightarrow y^2 + 2xy - 3x^2 = 5$ $\Leftrightarrow (y-x)(y+3x) = 5$	0,5
	Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y-x$ và $y+3x$ là các số nguyên và là ước của 5	0,25
	Ta xét các trường hợp: +) $\begin{cases} y-x = -5 \\ y+3x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}$	0,25

	+) $\begin{cases} y - x = -1 \\ y + 3x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} y - x = 1 \\ y + 3x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
	+) $\begin{cases} y - x = 5 \\ y + 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$	0,25
	Vậy $(x; y) \in \{(1; -4); (-1; -2); (1; 2); (-1; 4)\}$.	0,25
Bài 4	<p>Cho hình vuông $ABCD$. Gọi K là điểm nằm giữa A và B, I là điểm nằm giữa B và C sao cho $CI = BK$. Đường thẳng AI cắt đường thẳng DC tại M.</p> <p>a) Chứng minh: $IK \parallel BM$.</p> <p>b) Gọi N là điểm thuộc tia đối của tia CB sao cho $CN = CM$, O là giao điểm hai đường chéo của hình vuông $ABCD$. Chứng minh $\triangle BOI$ đồng dạng $\triangle BND$.</p>	

A

K

B

H

^

I

O

—

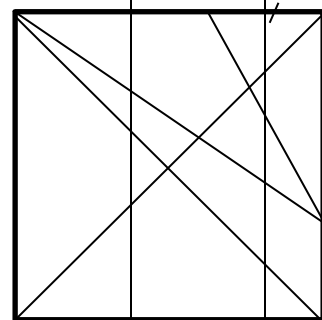
D

C

M

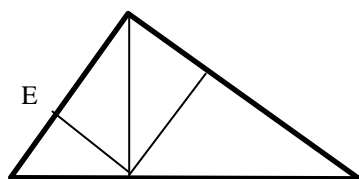
×

N



a)	<p>Chứng minh $IK \parallel BM$</p> <p>Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên</p> <p>Góc $A = \text{Góc } B = \text{Góc } C = \text{Góc } D = 90^\circ$; $AB = BC = CD = DA$.</p>	0,25
	Ta có: $IC \parallel AD$. Theo định lý Talet ta có: $\frac{IC}{AD} = \frac{MI}{MA}$	0,5
	Mà $AD = AB$; $IC = BK \Rightarrow \frac{KB}{BA} = \frac{IM}{MA}$.	1,0
	Theo định lý Talet đảo suy ra $IK \parallel BM$	0,25
b)	Gọi H là giao điểm của AM và BD .	0,25

	$+ C/m \quad OB.BD = AB^2 \quad (1)$	
	$+ C/m \quad \frac{AB}{BI} = \frac{AD}{BI} = \frac{HD}{HB}.$	0,25
	$+ C/m \quad \frac{DM}{AB} = \frac{DH}{HB} \Rightarrow \frac{AB}{BI} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow AB^2 = BI.DM \Rightarrow AB^2 = BI.BN \quad (2)$	0,75
	Từ (1) và (2) suy ra: $OB.BD = BI.BN.$	0,25
	Suy ra $\frac{BO}{BI} = \frac{BN}{BD}; OBI = NBD$, Suy ra: $\triangle OBI$ đồng dạng $\triangle NBD$ (c-g-c)	0,5
Bài 5	<p>Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm D thuộc cạnh BC (D không trùng với B và C). Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB và AC.</p> <p>a) Chứng minh rằng: Nếu AD vuông góc BC thì $\triangle AFE$ đồng dạng $\triangle ABC$.</p> <p>b) Cho biết $\frac{2}{AD^2} = \frac{1}{DB^2} + \frac{1}{DC^2}$. Chứng minh AD là trung tuyến hoặc AD là đường phân giác trong của $\triangle ABC$.</p>	



B

D

C

a)	<p>Khi AD vuông góc BC, C/m được $\triangle AED$ đồng dạng $\triangle ADB$</p> <p>$\Rightarrow AE \cdot AB = AD^2$</p>	0,25
	C/m tương tự ta có: $AF \cdot AC = AD^2$	0,25
	Suy ra: $AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \triangle AFE$ đồng dạng $\triangle ABC$ (c-g-c)	0,25

b)	<p>Đặt $DE = x$; $DF = y$; $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$ ($x, y, a, b, c > 0$).</p> <p>Suy ra $AD^2 = x^2 + y^2$ (1).</p> <p>Với $DE \parallel AC$, $DF \parallel AB$, áp dụng định lý Talet ta có:</p> $\frac{x}{b} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow x = \frac{b \cdot BD}{a} \quad (2).$ <p>Tương tự: Ta c/m được: $y = \frac{c \cdot CD}{a}$ (3)</p>	0,25

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG VÒNG 2 CẤP TỈNH

HUYỆN YÊN ĐỊNH

NĂM HỌC 2023-2024

Số báo danh

Ngày thi: 21/08/2023

Môn thi: **Toán**. Thời gian: 150 phút

(Đề thi này gồm 5 câu, 1 trang)

ĐỀ BÀI.

Bài 1. (4,0 điểm)

1. Cho biểu thức $M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5} \right)$

Tìm x để $M > 1$

2. Cho ba số a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{b^2 + bc}{\sqrt{a^4 + a^2}} \cdot \frac{c^2 + ca}{\sqrt{b^4 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + ab}{\sqrt{c^4 + c^2}}$$

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 4} = 4$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \\ x^2 + y - \sqrt{7x^2 - 3} = 0. \end{cases}$$

Bài 3. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2y - 5x^2 - xy = x - y + 1$.

2. Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2z^2$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 48.

Bài 4. (6,0 điểm)

Từ điểm M nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là các tiếp điểm). Kẻ các đường kính AC và BD, đường thẳng MO cắt AB và CD lần lượt tại I và K. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm B đến đường kính AC.

a) Chứng minh rằng $BH.AC = 2MB.CH$

b) Gọi giao điểm của MC và BH là E. Tính BE theo R và MO = d.

c) Trên tia đối của tia DA lấy điểm F bất kì. Gọi giao điểm của AC và FK là N.

Chứng minh $\widehat{NIK} = \widehat{AFI}$

$$*M = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$$

$$*M < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} > 0$$

0,5

0,5

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} - 1 < 0 \end{cases}$$

Vậy $M > 1$ khi $1 < x < 4$ và $x \neq 3$

0,5

		0,5
<p>Bài 1.2</p> <p>(2 điểm)</p>	<p>Ta có :</p> $A = \frac{b^2 + bc}{\sqrt{a^4 + a^2}} \cdot \frac{c^2 + ca}{\sqrt{b^4 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + ab}{\sqrt{c^4 + c^2}} = \frac{b(b+c)}{\sqrt{a^2(a^2+1)}} \cdot \frac{c(c+a)}{\sqrt{b^2(b^2+1)}} \cdot \frac{a(a+b)}{\sqrt{c^2(c^2+1)}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}}$ <p>Mặt khác vì : $ab + bc + ca = 1$ nên $a^2 + 1 = a^2 + ab + bc + ca = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c)$</p> <p>Tương tự : $b^2 + 1 = (b+a)(b+c)$; $c^2 + 1 = (c+a)(c+b)$</p> <p>Suy ra:</p> $A = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{\sqrt{a^2b^2c^2[(a+b)(b+c)(c+a)]^2}} = \frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{ abc(a+b)(b+c)(c+a) }$	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

	<p>- Nếu $abc(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ thì $A = 1$.</p> <p>- Nếu $abc(a+b)(b+c)(c+a) < 0$ thì $A = -1$.</p>	0,5
		0,5
<p>Bài 2.1</p> <p>(2 điểm)</p>	$x^4 + 2x^2 + x\sqrt{2x^2 + 4} = 4 \Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) + \sqrt{2}.x\sqrt{x^2 + 2} = 4 \quad (1)$ <p>Đặt $x\sqrt{x^2 + 2} = y$. Phương trình (1) trở thành:</p> $y^2 + \sqrt{2}.y = 4 \Leftrightarrow y^2 + \sqrt{2}.y - 4 = 0 \quad (2)$ <p>Giải phương trình (2) được $y_1 = \sqrt{2} ; y_2 = -2\sqrt{2}$</p> <p>Với $y = \sqrt{2}$ thì $x\sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 3 \end{cases}$</p>	0,25

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 1 = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$$

Với $y = -2\sqrt{2}$ thì $x\sqrt{x^2 + 2} = -2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2(x^2 + 2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ (x^2 + 1)^2 = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \left\{ \sqrt{\sqrt{3} - 1}; -\sqrt{2} \right\}$

0,75

0,75

		0,25
<p>Bài 2.2</p> <p>(2 điểm)</p>	<p>Điều kiện $x \geq 1, y \in \mathbb{R}$</p> $y^2 - y(\sqrt{x-1} + 1) + \sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow y^2 - y - \sqrt{x-1}(y-1) = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y - \sqrt{x-1}) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \sqrt{x-1} \end{cases}.$ <p>Với $y = 1$, thay vào (2) ta được</p> $x^2 + 1 - \sqrt{7x^2 - 3} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = \sqrt{7x^2 - 3} \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 = 7x^2 - 3$ $\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad (\text{do điều kiện của } x)$ <p>Với $y = \sqrt{x-1}$, thay vào (2) ta được $x^2 + \sqrt{x-1} - \sqrt{7x^2 - 3} = 0$</p>	0,25

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4) + (\sqrt{x-1} - 1) - (\sqrt{7x^2 - 3} - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) + \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x-2)(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0$$

0,5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = 0 \end{cases}$$

Với $x = 2$ suy ra $y = 1$.

Ta có
$$x+2 + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} - \frac{7(x+2)}{\sqrt{7x^2-3}+5} = (x+2) \left(1 - \frac{7}{\sqrt{7x^2-3}+5} \right) + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

$$= (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1}$$

Với $x \geq 1$ thì $\sqrt{7x^2-3}-2 \geq 0 \Rightarrow (x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} \geq 0$

Suy ra
$$(x+2) \frac{\sqrt{7x^2-3}-2}{\sqrt{7x^2-3}+5} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} > 0$$

0,5

Vậy hệ phương trình có các nghiệm $(1;1), (2;1)$.

0,25

		0,25
		0,25
<p>Bài 3.1</p> <p>(2 điểm)</p>	<p>Ta có: $x^2y - 5x^2 - xy = x - y + 1 \Leftrightarrow x^2y - xy + y = 5x^2 + x + 1$.</p> <p>$\Leftrightarrow y(x^2 - x + 1) = 5x^2 + x + 1 \quad (*)$</p> <p>Vì: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x nên từ $(*)$ suy ra.</p> <p>$y = \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = \frac{5x^2 - 5x + 5 + 6x - 4}{x^2 - x + 1} = 5 + \frac{6x - 4}{x^2 - x + 1}$, mà x, y nguyên nên</p>	

$(6x-4):(x^2-x+1)$, mà $x^2-x+1 = x(x-1)+1$ là số lẻ nên.

0,5

$$(3x-2):(x^2-x+1) \Rightarrow (3x^2-2x):(x^2-x+1) \\ \Rightarrow (3x^2-2x)-3(x^2-x+1):(x^2-x+1) \Rightarrow 7:(x^2-x+1) \Rightarrow x^2-x+1 \in U' \quad (7)$$

Mà $x^2-x+1 > 0$ nên $x^2-x+1 \in \{1;7\} \Rightarrow x \in \{-2;0;1;3\}$. Tính được y

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y)$ là.

0,5

$$(x; y) = (0;1), (1;7), (3;7).$$

0,75

0,25

Bài 3.2	<p>Vì $x^2 + y^2 = 2z^2$ nên x, y cùng tính chẵn lẻ. Suy ra : $x - y, x + y$ cùng chẵn.</p>	
(2 điểm)	<p>Đặt $x + y = 2m, x - y = 2n \quad (m, n \in N^*, m > n)$</p> $2z^2 = (m + n)^2 + (m - n)^2 = 2(m^2 + n^2) \Leftrightarrow z^2 = m^2 + n^2$ <p>Nếu m và n cùng không chia hết cho 4 thì $m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2</p> <p>$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 4 dư 2. Vô lí.</p> <p>Suy ra m hoặc n chia hết cho 4 $\Rightarrow mn : 4 \quad (1)$</p> <p>Nếu m và n cùng không chia hết cho 3 thì $m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2</p> <p>$\Rightarrow z^2 = m^2 + n^2$ chia cho 3 dư 2. Vô lí.</p> <p>Suy ra m hoặc n chia hết cho 3 $\Rightarrow mn : 3 \quad (2)$</p> <p>Vì $(3, 4) = 1$ nên từ (1), (2) $\Rightarrow mn : 12$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

(2 điểm)	$OA=OB \Rightarrow MO$ là trung trực của $AB \Rightarrow I$ là trung điểm AB . Từ đó suy ra OI là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow IO // BC \Rightarrow \angle MOA = \angle BCH$ (đồng vị).	0,75
	<p>Từ đó chứng minh được hai tam giác vuông MAO và BHC đồng dạng (g.g)</p> $\Rightarrow \frac{BH}{MA} = \frac{CH}{OA} \quad (1) \Rightarrow BH \cdot OA = MA \cdot CH$	0,75
	<p>Mà $OA = \frac{AC}{2}, MA = MB \Rightarrow BH \cdot AC = 2MB \cdot CH$</p>	0,5
Bài 4.2 (2 điểm)	<p>Vì $BH // MA$ nên áp dụng định lý Ta let vào tam giác CMA ta có:</p> $\frac{EH}{MA} = \frac{CH}{CA} \Leftrightarrow \frac{EH}{MA} = \frac{CH}{2OA} \quad (2)$	0,5
	<p>Từ (1) và (2) $\Rightarrow BH = 2EH \Leftrightarrow BE = EH = \frac{BH}{2}$</p>	0,5

	<p>Tam giác ABC có cạnh AC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp nên là tam giác vuông, theo hệ thức lượng ta có:</p> $BH^2 = AH.CH = (2R - CH).CH \quad (3)$	0,5
	<p>Thay (1) vào (3) và kết hợp BH=2EH ta được:</p> $BH^2 = \left(2R - \frac{BH.R}{MA}\right) \cdot \frac{BH.R}{MA} \Rightarrow BH = \frac{2R^2.MA}{MA^2 + R^2} = \frac{2R^2.\sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$ $\Rightarrow BE = \frac{R^2.\sqrt{d^2 - R^2}}{d^2}$	0,5
<p>Bài 4.3</p> <p>(2 điểm)</p>	<p>Qua O kẻ đường vuông góc với IK cắt IN tại P.</p> <p>Khi đó ta có OP//AI (cùng vuông góc OI) nên $\frac{NP}{PI} = \frac{NO}{OA}$</p>	

		0,5
	<p>Mặt khác $OK // AF$ (cùng vuông góc AB) nên $\frac{NK}{KF} = \frac{NO}{OA}$</p> <p>Do đó suy ra $\frac{NP}{PI} = \frac{NK}{KF} \Rightarrow PK // IF \Rightarrow FIK = PKI$ (*)</p>	0,5
	Mặt khác tam giác PIK cân đỉnh H (OP là trung trực của IK), nên $PIK = PKI$ (**)	0,5
	<p>Từ (*) và (**) $\Rightarrow FIK = NIK$, mà $FIK = AFI$ (so le trong)</p> <p>$\Rightarrow NIK = AFI$ (đpcm).</p>	0,5
Bài 5	b/ Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x + y + z = xyz$.	

(2 điểm)

Chứng minh rằng: $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq xyz$

Từ Gt suy ra: $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$.

Nên ta có: $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}} = \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow y = z$

Vậy $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$.

Tương tự ta có $\frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{1}{z}\right)$; $\frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{4}{z}\right)$

Vậy ta có $\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1+\sqrt{1+y^2}}{y} + \frac{1+\sqrt{1+z^2}}{z} \leq 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right); "=" \Leftrightarrow x = y = z$

Ta có $(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx) = \dots = \frac{1}{2}[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2] \geq 0$

Nên $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$

$$\Rightarrow (xyz)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow 3 \frac{xy + yz + zx}{xyz} \leq xyz \Rightarrow 3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \leq xyz$$

Vậy $\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq xyz$; "=" $\Leftrightarrow x = y = z$

0,75

0,5

0,5

		0,25
--	--	------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 8

VIỆT TRÌ

CẤP THÀNH PHỐ, NĂM HỌC 2023-2024

Môn: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

(Đề có: 03 trang)

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm)

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và tự luận) trên tờ giấy thi

Câu 1. Giá trị của a để đa thức $x^{2023} - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ là

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Câu 2. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ và $g(x) = x^2 + x - 2$ biết rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi đó $(a; b)$ bằng

A. $(-4; -2)$.

B. $(2; -8)$.

C. $(-2; -8)$.

D. $(-2; 8)$.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{(a-1)^2}{3a + (a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ ta được

A. $-\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$.

B. $\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq -1$.

C. $\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$.

D. $\frac{4a}{a^2-4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$.

Câu 4. Gọi A là tập hợp các giá trị nguyên của n để biểu thức $\frac{25n^2 - 97n + 7}{n - 4}$ nhận giá

trị nguyên. Số các phần tử dương của A bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 5. Biết $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{ax - b}{cx + 1}$. Giá trị của $a^2 + b^2 - c$ bằng

A. 11.

B. 3.

C. 15.

D. 9.

Câu 6. Tổng các nghiệm của phương trình $(x + 2)(3 - 4x) + (x^2 + 4x + 4) = 0$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $-\frac{11}{3}$.

D. $\frac{11}{3}$.

Câu 7. Giá trị của a nguyên dương để phương trình $\frac{x+a}{x-5} + \frac{x+5}{x-a} = 2$ có nghiệm $x = 10$

bằng

A. 5.

B. 10.

C. 15.

D. 20.

Câu 8. Giá trị của m để phương trình $\frac{6x+3}{4} - \frac{5x+3}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{m}{12}$ có nghiệm là

- A. -7 . B. 12 . C. -12 . D. 7 .

Câu 9. Hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$; $A = 3D$; $B - C = 30^\circ$. Khi đó tổng $A + B$ bằng

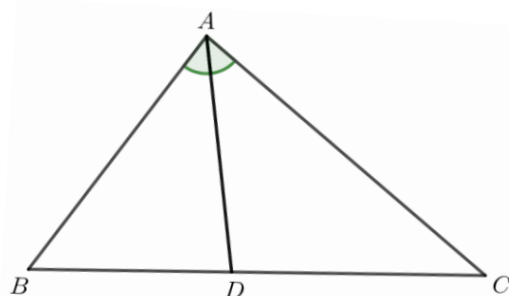
- A. 180° . B. 210° . C. 240° . D. 270° .

Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$, gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của

AB, BC, CD, DA . Tứ giác $EFGH$ là hình vuông khi tứ giác $ABCD$ có điều kiện là

- A. $BD \perp AC, BD = AC$. B. $BD \perp AC$.
C. $BD = AC$. D. $AC = BD, AB \parallel CD$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB : AC = 4 : 5$ và D



là chân đường phân giác trong của góc A

(tham khảo hình vẽ bên). Nếu $BC = 27$

thì $BD^2 + 2.CD^2$ bằng

A. 389.

B. 369.

C. 513.

D. 594.

Câu 12. Cho $\triangle ABC$, một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB và AC theo

thứ tự tại D và E . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\frac{AB}{AD} + \frac{CE}{CA} = 1.$

B. $\frac{AD}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1.$

C. $\frac{CA}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1.$

D.

$$\frac{AD}{AB} + \frac{CA}{CE} = 1.$$

Câu 13. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD , gọi M là trung điểm của cạnh bên AD .

Khi đó $\frac{S_{MBC}}{S_{ABCD}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 14. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $A = D = 90^\circ$, $C = 45^\circ$, $AB = 2cm$, $CD = 4cm$.

Diện tích của hình thang vuông $ABCD$ là

A. $3cm^2$.

B. $8cm^2$.

C. $4cm^2$.

D. $6cm^2$.

Câu 15. Một ca nô xuôi từ bến A đến bến B , hai bến cách nhau $18km$ hết 1 giờ 30 phút. Biết vận tốc dòng nước chảy là $2km/h$ thì vận tốc thực của ca nô (vận tốc khi dòng nước yên lặng) là

A. $12km/h$.

B. $10km/h$.

C. $8km/h$.

D.

$18km/h$.

Câu 16. Lớp 8D có 34 em đi học phụ đạo ba môn: Toán, Ngữ văn, tiếng Anh. Có 12 em đi học Toán, số em đi học tiếng Anh nhiều gấp 3 lần số em đi học Ngữ văn. Trong đó có 5 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Toán, 4 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Ngữ văn, 3 em vừa đi học Toán vừa đi học Ngữ văn, 2 em đi học cả ba môn nói trên. Số em đi học tiếng Anh bằng

A. 24 .

B. 8. C. 16.

D. 27 .

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1: (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.

c) Chứng minh tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}.$$

c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$.

Câu 3: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' ; H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$.

b) Gọi AI là phân giác của $\triangle ABC$; IM, IN thứ tự là phân giác của AIC và AIB .

Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$.

c) Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG

VIỆT TRÌ

LỚP 8 CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn: Toán

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC*(Hướng dẫn chấm có 06 trang)***A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm; mỗi câu đúng 0,5 điểm)**

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	D	9	C
2	A	10	A
3	C	11	D

4	C	12	B
5	A	13	B
6	A	14	D
7	C	15	B
8	D	16	A

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1: (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) \div 6$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.

c) Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Ý	Đáp án	Điểm
a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) \div 6$.		
a) (1,0 đ)	$A = n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(2n-2+3)$	0,25
	$A = 2(n-1)n(n+1) + 3n(n+1)$	0,25
	Ta có: $\left. \begin{array}{l} 2(n-1)n(n+1) \div 6 \\ 3n(n+1) \div 6 \end{array} \right\} \Rightarrow A \div 6$	0,25
	Vậy với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) \div 6$.	0,25
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.		
	$6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 3xy - 4y + 9x + 12 = 7$ $\Leftrightarrow 2x(3x+4) - y(3x+4) + 3(3x+4) = 7$ $\Leftrightarrow (3x+4)(2x-y+3) = 7$	

Ý	Đáp án	Điểm
b) <		

Ý	Đáp án	Điểm
c) (1,0 đ)	Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là: $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in N$).	0,25
	Ta có $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n.(n+3)(n+1)(n+2) + 1$ $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 (*)$	0,25
	Đặt $n^2 + 3n = t$ ($t \in N$) thì $(*) = t(t+2)+1 = t^2 + 2t+1 = (t+1)^2$. $\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n+1)^2$	0,25
	Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n+1 \in N$. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.	0,25

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần

dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$$

c) Giải phương trình : $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$.

Ý	Đáp án	Điểm
a)	Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.	
	Ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1) = 4$.	0,25
	Do bậc của đa thức chia là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$.	0,25
	Theo định nghĩa phép chia còn dư, ta có :	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
a) (1,5 đ)	$ \begin{aligned} f(x) &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + a - a + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1).q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a \\ &= [(x+1).q(x) + a].(x^2+1) + bx + c - a \end{aligned} $	
	<p>Mà $f(x)$ chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Do đó, ta có:</p> $ \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=\frac{9}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{cases} $	0,5
	Vậy đa thức dư cần tìm có dạng: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$	0,25
b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$		
	b) Ta có: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow bcx + acy + abz = 0$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
	$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right)^2 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz} \right) = 4$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \frac{abz + acy + bcx}{xyz} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot 0 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	0,5
	Vậy $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
b) (1,5 đ)		
c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9)=140x^2$.		
	$(x-2)(x-3)(x+6)(x+9)=140x^2 \Leftrightarrow (x^2+x-18)(x^2+3x-18)=140x^2(1)$ <p>$x=0$ không là nghiệm PT(1) chia 2 vế PT(1) cho $x^2 \neq 0$</p> $(x^2+7x-18)(x^2+3x-18)=140x^2 \Rightarrow \left(x+7-\frac{18}{x}\right)\left(x+3-\frac{18}{x}\right)=140$	0,25
	Đặt $x-\frac{18}{x}+5=y, (y \in R)$ ta có phương trình :	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
c) (1,0 đ)	$(y-2)(y+2)=140 \Leftrightarrow y^2=144 \Leftrightarrow \begin{cases} y=12 \\ y=-12 \end{cases}$	
	<p>*Với $y=12$ ta có phương trình</p> $x - \frac{18}{x} + 5 = 12 \Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)(x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=9 \end{cases}$	0,25
	<p>*Với $y=-12$ ta có phương trình</p> $x - \frac{18}{x} + 5 = -12 \Rightarrow x^2 + 17x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 18x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-18 \end{cases}$ <p>Vậy $S = \{-18; -2; 1; 9\}$</p>	0,25

Câu 3:(4,0điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' ; H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$.

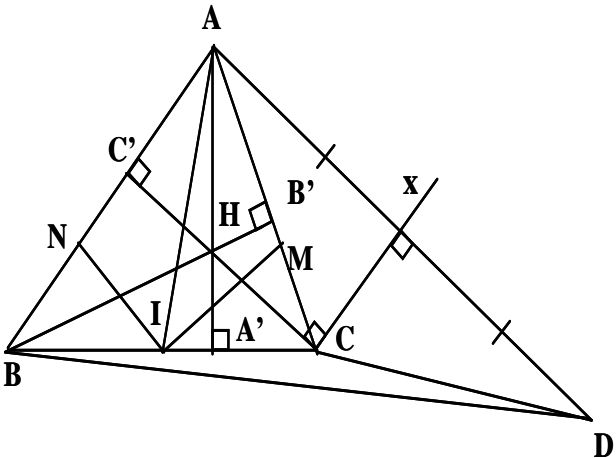
b) Gọi AI là phân giác của $\triangle ABC$; IM, IN thứ tự là phân giác của AIC và AIB .

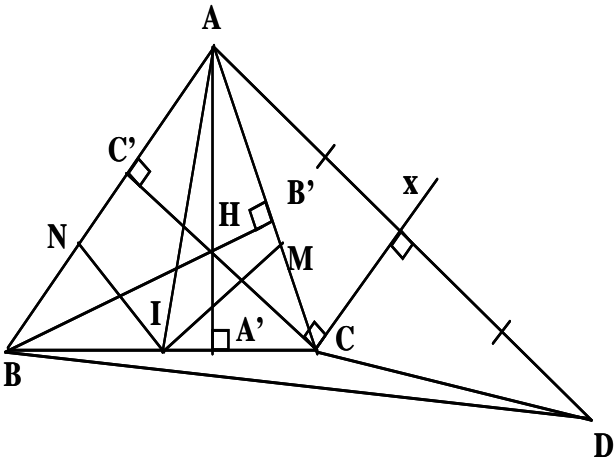
Chứng minh rằng: $AN.BI.CM = BN.IC.AM$.

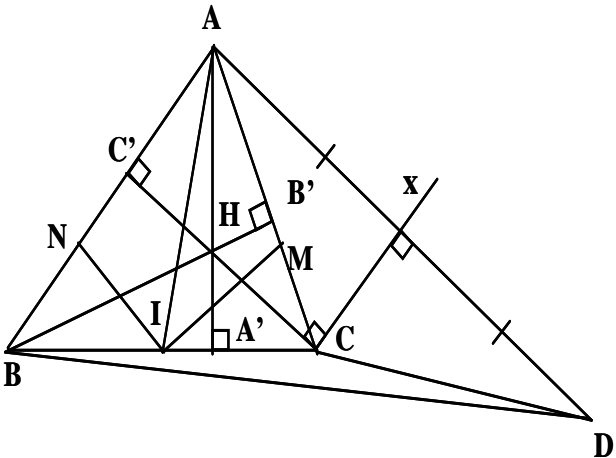
c) Tìm điều kiện của ΔABC để biểu thức $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

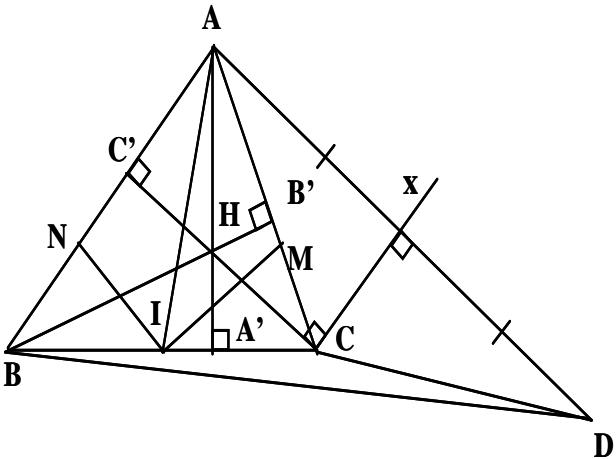
Ý	Đáp án	Điểm
		0,5

Ý	Đáp án	Điểm
a)	$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'};$	
(1,5 đ)	Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}; \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'};$	0,5

Ý	Đáp án	Điểm
		
	$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$	0,5
	<p>Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:</p> $\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$	0,5
	$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$ $\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5
b)	$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5

Ý	Đáp án	Điểm
		
(1,5đ)		
(1,0đ)	<p>Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx</p> <p>- Chứng minh được BAD vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$</p> <p>- Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$</p>	0,25
	<p>- $\triangle BAD$ vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$</p>	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
		
	$\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$ $AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$ $4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$	
	<p>Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$</p> $4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$ <p>- Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$</p>	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
		
	$\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$	
	<p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC$</p> <p>$\Leftrightarrow AB = AC = BC$</p> <p>$\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều</p>	0,25

Câu 4: (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$.

Ý	Đáp án	Điểm
	<p>Trước hết áp dụng BĐT $(A+B)^2 \geq 4AB$</p> <p>Đặt $P = \frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x}$.</p>	0,25
	$P \geq \frac{8xy}{2x+3y} + \frac{8yz}{2y+z} + \frac{8xz}{z+2x} = \frac{8xyz}{2xz+3yz} + \frac{8xyz}{2xy+xz} + \frac{8xyz}{yz+2xy} = Q$	0,25
	<p>Áp dụng BĐT với A, B, C dương $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$</p> $Q \geq 8xyz \cdot \frac{9}{2xz+3yz+2xy+xz+yz+2xy} = \frac{72xyz}{4xy+4yz+3xz} = \frac{72xyz}{3xyz} = 24$ <p>$P \geq Q \geq 24$</p>	0,25

4. (1,0 đ)	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2z \\ 4xy + 4yz + 3xz = 3xyz \\ 2xz + 3yz = 2xy + xz = yz + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 5 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$	0,25
---------------------------------	---	------

-----HẾT-----

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG LỚP 8 NĂM HỌC 2023-2024**Môn Toán 8 – Thời gian 120 phút**

Câu 1: (6 điểm) a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x^2 - xy + x - 3y = 1$.

b) Tìm x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $4x + 1 \vdots y$ và $4y + 1 \vdots x$.

c) Xác định đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia hết cho $2x - 1$, chia cho $x - 2$ thì dư 6, chia cho $2x^2 - 5x + 2$ được thương là $x + 2$ và còn dư.

Câu 2 (4 điểm) 1. Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}$.

Câu 3 (4 điểm) a) Giải phương trình sau: $x(x+1)(x-1)(x+2) = 24$.

b) Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$$

Câu 4 (6 điểm) 1. Cho hình vuông ABCD trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt

lấy các điểm M, N, P, Q sao cho $AM = BN = CP = DQ$.

a) Chứng minh MNPQ hình vuông.

b) Tìm vị trí của M, N, P, Q để diện tích tứ giác MNPQ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), M là trung điểm của BC. Một đường thẳng qua

M và song song với phân giác của góc BAC cắt AC, AB lần lượt tại E, F.

Chứng minh $CE = BF$.

.....**Hết**.....

Hướng dẫn chấm

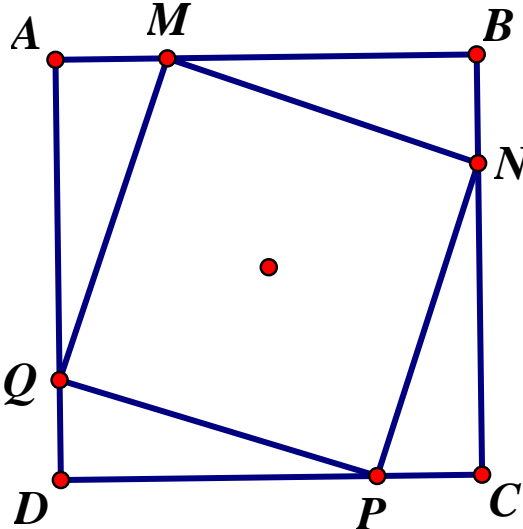
Câu	Nội dung	Điểm
1	<p>Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a) x^2 - xy + x - 3y = 1$</p> <p>Ta có $y(x+3) = x^2 + x - 1$</p> <p>Nếu $x = -3$ Thì VT = 0 còn VP khác 0.</p> <p>Nên $x \neq -3$ suy ra $y = \frac{x^2 + x - 1}{x+3} = x - 2 + \frac{5}{x+3}$</p> <p>$x, y$ là số nguyên nên $5 : x+3$</p> <p>$x+3 \in \{1; -1; 5; -5\}$</p> <p>Vậy các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là: $(-2; 1), (-4; -11), (2; 1); (-8; -11)$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>b) Tìm x, y là các số tự nhiên lớn hơn 1 sao cho $4x+1 : y$ và $4y+1 : x$</p> <p>Đặt $4x+1 = ky$ (k là số tự nhiên)</p> <p>Giả sử $2 \leq x \leq y$</p>	0,5

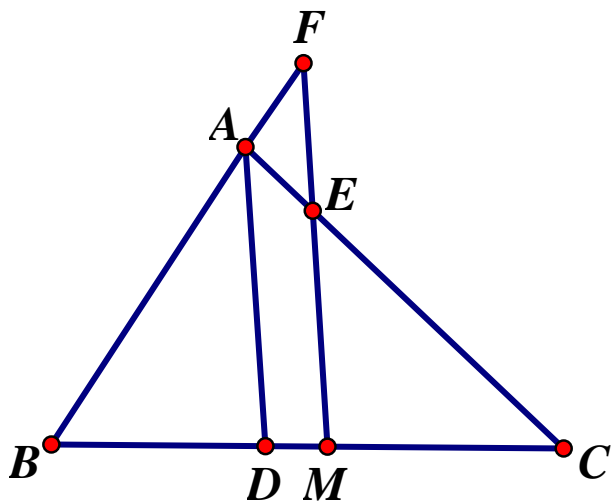
<p>Ta có $ky = 4x + 1 < 4y + y = 5y$ suy ra $k < 5$ mà k là số lẻ nên $k = 1$,</p> <p>$k = 3$.</p> <p>Với $k = 1$ suy ra $y = 4x + 1$ suy ra</p> <p>$4y + 1 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 1 : x \Rightarrow 5 : x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow y = 21$</p> <p>Với $k = 3$ suy ra $3y = 4x + 1$</p> <p>Từ $4y + 1 : x \Rightarrow 12y + 3 : x \Rightarrow 4(4x + 1) + 3 : x \Rightarrow 7 : x \Rightarrow x = 7, y = \frac{29}{3}$</p> <p>(Loại)</p> <p>Vậy $(x; y)$ là $(5; 21), (21; 5)$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
<p>Gọi đa thức dư của phép chia $f(x)$ cho $2x^2 - 5x + 2$ là $ax + b$</p> <p>Thương của phép chia $f(x)$ cho $2x - 1$ là $A(x)$ và thương của phép chia $f(x)$ cho $x - 2$ là $B(x)$.</p>	<p>0,5</p>

	<p>Ta có $f(x) = (2x - 1).A(x)$ (1)</p> <p>$f(x) = (x - 2).B(x) + 6$ (2)</p> <p>$f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + ax + b$ (3)</p> <p>xét $x = \frac{1}{2}$ từ (1) và (3) suy ra $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.a + b = 0$</p> <p>xét $x = 2$ từ (2) và (3) suy ra $f(2) = 6 = 2a + b$</p> <p>Từ đó suy ra $a = 4, b = -2$</p> <p>Vậy $f(x) = (2x^2 - 5x + 2)(x + 2) + 4x - 2.$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
Câu 2	<p>Cho biểu thức $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$</p> <p>a) Rút gọn biểu thức P.</p> <p>b) Tìm x để $P = \frac{-1}{2}.$</p> <p>ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$</p>	

	$\text{a) } P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \left(\frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} + \frac{2-x^2}{x(x-1)} \right)$ $P = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x^2-1+x+2-x^2}{x(x-1)} = \frac{x^2}{x-1}$	0,5
	$\text{b) } p = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -1 \end{cases}$	
	x=-1(KTM), x=1/2 (TM)	1,0
		1,5
		0,5

		0,5
Câu 3	<p>a) Giải phương trình sau: $x(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 24$.</p> <p>Ta có $(x^2 + x)(x^2 + x - 2) = 24$</p> <p>Đặt $x^2 + x = a$ ta có $a(a - 2) = 24$ suy ra $a^2 - 2a = 24$ suy ra</p> <p>$a = 6, a = -4$.</p> <p>Với $a = 6$ suy ra $x^2 + x - 6 = 0$ suy ra $x = 2, x = -3$</p> <p>Với $x = -4$ suy ra $x^2 + x + 4 = 0$ vô nghiệm.</p>	<p>1,0</p> <p>1,0</p>
	<p>b) Cho $x > 0, y > 0$ và $x + y \geq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $P = 2x^2 + y^2 + \frac{28}{x} + \frac{1}{y} + 2022.$ $P = \left(\frac{28}{x} + 7x\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + 2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (x+y) + 2013$ <p>Suy ra $P \geq 2\sqrt{\frac{28}{x} \cdot 7x} + 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} + 0 + 0 + 3 + 2013 \geq 2046$</p>	1,0

	Suy ra GTNN của $P = 2046$ khi $x = 2, y = 1$.	1,0
Câu 4		
	<p>a) Chứng minh MNPQ là hình vuông</p> <p>b) S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi S_{AMQ} lớn nhất mà $S_{AMQ} = \frac{AM \cdot AQ}{2}$</p> $AM \cdot AQ = AM \cdot MB \leq \frac{(AM + MB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4}$ <p>S_{AMQ} lớn nhất là $\frac{AB^2}{8} \Leftrightarrow AM = MB$</p>	<p>2</p> <p>0,5</p> <p>1,0</p>

	<p>Vậy S_{MNPQ} nhỏ nhất khi và chỉ khi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm AB, BC, CD, DA.</p>	0,5
		
	<p>Gọi AD là phân giác của góc BAC</p> <p>Ta có: $AD // FM \Rightarrow \frac{BA}{BF} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow \frac{BF}{BM} = \frac{BA}{BD}$ (1)</p> <p>$ME // AD \Rightarrow \frac{CE}{CA} = \frac{CM}{CD} \Rightarrow \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}$ (2)</p> <p>Theo tính chất đường phân giác $\frac{BA}{CA} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{DC}$ (3)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p>

	Từ (1),(2),(3) suy ra $\frac{BF}{BM} = \frac{CE}{CM} \Rightarrow BF = CE$ (vì $BM = CM$)	0,5
--	---	-----

Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

PHÒNG GD&ĐT KIM THÀNH

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 8

TRƯỜNG THCS PHÚ THÁI

Năm học 2023-2024

Môn: Toán

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1 (2,0 điểm)

1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15$.

2) Cho $xyz = 1$. Tính giá trị biểu thức: $P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Phân tích thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3$

Áp dụng tìm x biết: $(x^2 + x + 2)^3 - (x + 1)^3 = x^6 + 1$

2) Tìm số dư trong phép chia của đa thức: $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6) + 2023$ cho

đa thức $x^2 + 5x + 7$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Cho a, b, c là các số tự nhiên.

Chứng minh rằng $A = 4a(a + b)(a + b + c)(a + c) + b^2c^2$ là một số chính phương.

(Số chính phương là bình phương của một số tự nhiên)

2) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn $3xy + 2y - 2x + 1 = 0$.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho hình vuông ABCD, trên cạnh AB lấy điểm E và trên cạnh AD lấy điểm F sao cho $AE = AF$. Vẽ AH vuông góc với BF (H thuộc BF), AH cắt DC và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng:

1) $AM = BF$;

2) Tứ giác AEMD là hình chữ nhật;

3) $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ với $x \neq -1$

HƯỚNG DẪN CHẤM

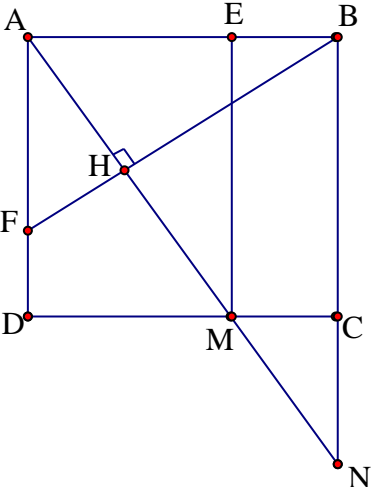
Câu	Đáp án	Điểm	Tổng điểm
1	a) $(x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 5) + 15$ $= (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) + 15$	0,25	1,00
	$= [(x^2 + 4x - 1) - 4][(x^2 + 4x - 1) + 4] + 15$	0,25	
	$= (x^2 + 4x - 1)^2 - 16 + 15$	0,25	

	$= (x^2 + 4x - 1)^2 - 1$		
	$= (x^2 + 4x - 2)(x^2 + 4x)$ $= x(x + 4)(x^2 + 4x - 2)$	0,25	
	$P = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$ $P = \frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{zx}{zx+yzx+yzxz} + \frac{1}{1+z+zx}$	0,25	
	Thay $xyz = 1$ và biểu thức P ta có:	0,25	
	$P = \frac{z}{z+xz+1} + \frac{zx}{zx+1+z} + \frac{1}{1+z+zx}$		1,00
	$P = \frac{z+zx+1}{z+zx+1}$	0,25	
	$P = 1$. Vậy $P = 1$	0,25	

2	Phân tích đa thức thành nhân tử: $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3$ Ta có $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3 = (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b) - (a+b+c)^3$	0,25	1,00
	$= (a+b+c)^3 - 3c(a+b)(a+b+c) - 3ab(a+b) - (a+b+c)^3$ $= -3(a+b)[c(a+b+c) + ab]$ $= -3(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = -3(a+b)(b+c)(a+c) (*)$	0,25	
	Tìm x biết: $(x^2 + x + 2)^3 - (x+1)^3 = x^6 + 1$ Ta có: $(x^2)^3 + (x+1)^3 + 1^3 - (x^2 + x + 2)^3 = 0$ $\Leftrightarrow -3(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x + 2) = 0 \quad (\text{Theo } (*)).$	0,25	
	Vì $x^2 + x + 1 = 0$; $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm .	0,25	

	KL: $x = -2$		
	$P = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) + 2023$ $P = (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) + 2023$	0,25	1,00
	Đặt $x^2 + 5x + 7 = t$ Ta có $P = (t - 13)(t - 1) + 2023$	0,25	
	$P = t^2 - 14t + 13 + 2023$ $P = t^2 - 14t + 2036$	0,25	
	Do đó khi chia $P = t^2 - 14t + 2036$ cho t ta có số dư là 2036	0,25	
3	1) $A = 4a(a+b)(a+b+c)(a+c) + b^2c^2$ $A = 4(a^2 + ab + ac)(a^2 + ac + ab + bc) + b^2c^2$	0,25	
	Đặt $a^2 + ab + ac = t$	0,25	

	<p>Ta có $A = 4t(t + bc) + b^2c^2$</p> <p>$A = 4t^2 + 4t.bc + b^2c^2$</p>		1,00
	$A = (2t + bc)^2 = [2(a^2 + ab + ac) + bc]^2 = (2a^2 + 2ab + 2ac + bc)^2$	0,25	
	Vì a, b, c là các số tự nhiên nên A là một số chính phương.	0,25	
	<p>1) $3xy + 2y - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x + 2)y = 2x - 1$</p> <p>$y = \frac{2x - 1}{3x + 2}, x \neq -\frac{2}{3}$</p>	0,25	1,00
	$y = \frac{2x - 1}{3x + 2} \Rightarrow 3y = \frac{6x - 3}{3x + 2} = \frac{2(3x + 2) - 7}{3x + 2} = 2 - \frac{7}{3x + 2}$	0,25	
	<p>y là số nguyên thì 3y cũng là số nguyên. Để 3y nhận giá trị là số nguyên khi 7 chia hết cho $3x + 2$</p> <p>Hay $3x + 2 \in U(7) = \{\pm 1; \pm 7\}$</p>	0,25	

	$x \in \{-1; -3\}$ Với $x = -1$ thì $y = 3$; với $x = -3$ thì $y = 1$. Vậy $(x; y) \in \{(-1; 3), (-3; 1)\}$	0,25	
			
4.1	Xét $\triangle ADM$ và $\triangle BAF$ có: $\angle ADM = \angle BAF = 90^\circ$	0,25	1,00
	$AD = AB$ (cạnh hình vuông)	0,25	

	$DAM = ABF$ (cùng phụ với góc HAB)		
	Do đó $\triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g)	0,25	
	Suy ra $AM = BF$ (2 cạnh tương ứng)	0,25	
4.2	Do $\triangle ADM = \triangle BAF$ (g.c.g) chứng minh câu a	0,25	1,00
	Suy ra $DM = AF$ (2 cạnh tương ứng)		
	Mà $DM \parallel AF$ (Do $AB \parallel CD$, E thuộc AB, M thuộc CD)	0,25	
	Suy ra AEMD là hình bình hành.	0,25	
	Mặt khác $DAE = 90^\circ$ (Do $DAB = 90^\circ$ và E thuộc AB). Do đó tứ giác AEMD là hình chữ nhật.	0,25	
4.3	Vì $AD \parallel CN \Rightarrow \frac{AD}{CN} = \frac{AM}{MN}$ (Hệ quả định lý Ta lét) $\Rightarrow \frac{AD}{AM} = \frac{CN}{MN}$	0,25	1,00

	Vì $MC \parallel AB \Rightarrow \frac{MN}{AN} = \frac{CM}{AB}$ (Hệ quả định lý Ta lét) $\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{CM}{MN}$	0,25	
	Suy ra $\frac{AD^2}{AM^2} + \frac{AB^2}{AN^2} = \frac{CM^2 + CN^2}{MN^2} = 1$ (Vì $CM^2 + CN^2 = MN^2$ theo Định lý Pytago áp dụng trong tam giác vuông CMN)	0,25	
	Suy ra $\frac{AB^2}{AM^2} + \frac{AB^2}{AN^2} = 1$ (vì $AD = AB$) $\Rightarrow \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$	0,25	
5	$P = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(x+1)^2 - x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{x}{(x+1)^2} = 1 - \frac{(x+1) - 1}{(x+1)^2}$	0,25	1,00
	$P = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} = \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \right] + \frac{3}{4}$	0,25	
	$P = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}, \forall x \neq -1$		

		0,25	
	Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ khi $\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)	0,25	

TRƯỜNG THCS SONG MAI

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán - Lớp: 8

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu 1. (2,0 điểm)a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^3 - 19x + 30$ b) Cho $x = by + cz$; $y = ax + cz$; $z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$; $xyz \neq 0$.Chứng minh: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$ **Câu 2. (1,5 điểm)**a) Giải phương trình: $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$ b) Tìm x, y nguyên thỏa mãn: $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.**Câu 3. (3,0 điểm)**a) Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$ b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$ c) Chứng minh rằng: $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ n .**Câu 4. (3,0 điểm)**

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng của

A qua H . Đường thẳng qua D song song với AB cắt BC và AC lần lượt ở M và N .

a) Chứng minh tứ giác $ABDM$ là hình thoi.

b) Chứng minh AM vuông góc với CD

c) Gọi I là trung điểm của MC , chứng minh rằng IN vuông góc HN

Câu 5. (0,5,0 điểm)

Cho a, b là các số thực dương khác nhau. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$

Từ đó chứng minh $A > 1$ với $A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}$

----- Hết -----

PHÒNG GD&ĐT TP BẮC GIANG

HƯỚNG DẪN CHẤM

TRƯỜNG THCS SONG MAI

ĐỀ KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI

NĂM HỌC 2023-2024

Môn: Toán - Lớp: 8

Dưới đây chỉ là sơ lược các bước giải và thang điểm. Bài giải của học sinh cần chặt chẽ, hợp logic toán học. Nếu học sinh làm bài theo cách khác hướng dẫn chấm mà đúng thì chấm và cho điểm tối đa của bài đó. Đối với bài hình học nếu học sinh vẽ sai hình hoặc không vẽ hình thì không được tính điểm.

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
1	a) $x^3 - 19x + 30 = x^3 - 4x - 15x - 30$	0,25
	$= x(x^2 - 4) - (15x - 30)$	
	$= x(x - 2)(x + 2) - 15(x - 2)$	0,25
	$= (x - 2)(x^2 - 2x - 15)$	

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	$= (x - 2)(x^2 + 3x - 5x - 15x)$	0,25
	$= (x - 2)(x + 3)(x - 5)$	0,25
	<p>b) Ta có $x = by + cz$ (1); $y = ax + cz$ (2); $z = ax + by$ (3)</p> <p>Cộng vế với vế của (1) và (2) ta có: $x + y = ax + by + 2cx = z + 2cz$</p> <p>Suy ra: $2cz = x + y - z \Rightarrow c = \frac{x + y - z}{2z} \Rightarrow 1 + c = \frac{x + y + z}{2z}$</p> $\Rightarrow \frac{1}{1+c} = \frac{2z}{x+y+z}$ <p>Tương tự: $1 + a = \frac{x + y + z}{2x} \Rightarrow \frac{1}{1+a} = \frac{2x}{x+y+z}$</p> $1 + b = \frac{x + y + z}{2y} \Rightarrow \frac{1}{1+b} = \frac{2y}{x+y+z}$ <p>Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{2x}{x+y+z} + \frac{2y}{x+y+z} + \frac{2z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

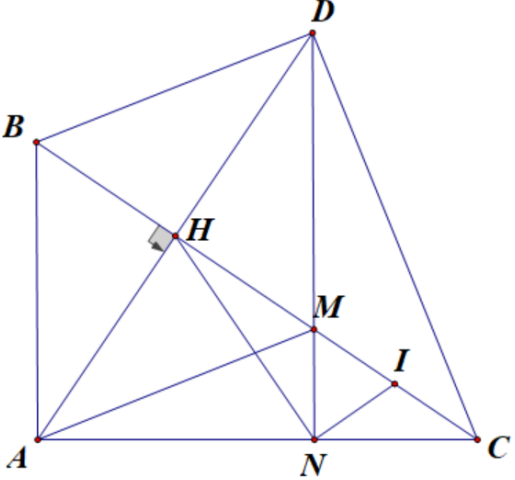
Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
		0,25
2	<p>a) Ta có: $2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) - 12 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow 2(6x+7)^2(3x+4)(x+1) = 12$</p> <p>$\Leftrightarrow (6x+7)^2(6x+8)(6x+6) = 72$</p> <p>Đặt $6x+7 = t$, đẳng thức trên trở thành $t^2(t+1)(t-1) = 72$</p> <p>$\Leftrightarrow t^2(t^2-1) = 72$</p> <p>$\Leftrightarrow t^4 - t^2 - 72 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (t^2+8)(t^2-9) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow t^2 = 9$ (Vì t^2+8 dương)</p> <p>$\Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -3$</p> <p>Nếu $t = 3$ suy ra $x = -\frac{2}{3}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p>

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm																				
	<p>Nếu $t = -3$, suy ra $x = -\frac{5}{3}$</p> <p>Vậy $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = -\frac{5}{3}$</p>	0.25																				
	<p>b) Ta có: $x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y + 3 = 0$.</p> <p>$\Leftrightarrow \dots\dots \Leftrightarrow (x + y)(x + 2y - 1) = -3$</p> <p>Vì x, y nguyên nên $x + y$ và $x + 2y - 1$ là các ước của -3.</p> <p>Ta có bảng sau:</p> <table><tr><td>$x + y$</td><td>1</td><td>-3</td><td>-1</td><td>3</td></tr><tr><td>$x + 2y - 1$</td><td>-3</td><td>1</td><td>3</td><td>-1</td></tr><tr><td>x</td><td>4</td><td>-8</td><td>-6</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>-3</td><td>5</td><td>5</td><td>-3</td></tr></table>	$x + y$	1	-3	-1	3	$x + 2y - 1$	-3	1	3	-1	x	4	-8	-6	6	y	-3	5	5	-3	0.25
$x + y$	1	-3	-1	3																		
$x + 2y - 1$	-3	1	3	-1																		
x	4	-8	-6	6																		
y	-3	5	5	-3																		

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(4; 3), (-8; 5), (-6; 5), (4; -3)$.	0.25
3	<p>a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4; g(x) = x^2 + x - 2$</p> <p>Ta có $g(x) = (x - 1)(x + 2)$</p> <p>Do $f(x)$ chia hết cho đa thức $g(x)$ nên $f(x) = q(x).g(x)$ với $q(x)$ là đa thức</p> <p>$f(x) = (x - 1)(x + 2).q(x)$</p> <p>Với $x = 1$ ta được $f(1) = 0$ hay $a + b + 6 = 0$</p> <p>Với $x = -2$ ta được $f(-2) = 0$ hay $-8a + 4b - 24 = 0 \Leftrightarrow -2a + b - 6 = 0$</p> <p>Khi đó ta có $\begin{cases} a + b = -6 \\ -2a + b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -2 \end{cases}$</p> <p>Vậy $a = -4, b = -2$.</p>	0,5
		0,25
	b)	

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	$A = 13x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 16x + 2019$ $= (2x + y - 1)^2 + (3x - 2)^2 + 2014 \geq 2014$ $\text{Min } A = 2014 \text{ khi } x = \frac{2}{3}, y = \frac{-1}{3}$	0,5
	<p>c) Ta có: $n^3 - 3n^2 - n + 3 = (n^3 - n) - (3n^2 - 3)$</p> $= n(n^2 - 1) - 3(n^2 - 1)$ $= n(n - 1)(n + 1) - 3(n - 1)(n + 1)$ $= (n - 1)(n + 1)(n - 3)$ <p>Vì n lẻ nên $n = 2k + 1 \ (k \in \mathbb{Z})$</p>	0,5
	<p>Do đó $(n - 1)(n + 1)(n - 3) = (2k + 1 - 1)(2k + 1 + 1)(2k + 1 - 3)$</p> $= 2k(2k + 2)(2k - 2)$ $= 8k(k + 1)(k - 1)$	0,5

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	<p>Vì $k(k+1)(k-1)$ là tích của ba số nguyên liên tiếp nên</p> <p>$k(k+1)(k-1)$ chia hết cho 2 và 3.</p> <p>Mà $\text{ƯCLN}(2,3)=1$ nên $k(k+1)(k-1)$ chia hết cho 6, suy ra</p> <p>$8k(k+1)(k-1)$ chia hết cho 48.</p> <p>Vậy $n^3 - 3n^2 - n + 3$ chia hết cho 48 với mọi số nguyên lẻ n.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p>

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
4		
	a) Chứng minh được $\triangle ABH = \triangle DMH$	0,5
	$\Rightarrow AB = MD$ mà $AB \parallel MD$	0,5
	<p>Nên $ABDM$ là hình bình hành lại có 2 đường chéo vuông góc</p> <p>Suy ra $ABDM$ là hình thoi.</p>	0,5
	b) Sử dụng quan hệ từ vuông góc đến song song chứng minh được	0,25
	$DN \perp AC$	0,25
	Chứng minh được M là trực tâm của $\triangle ADC$	0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	Suy ra AM vuông góc với CD	
	<p>c) Sử dụng kiến thức trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.</p> <p>Suy ra được $INC = ICN = MDH = HNM$</p> <p>Mà $MNI + INC = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow HNM + MNI = 90^\circ \Rightarrow IN \perp HN$</p>	0,25
		0,25
5	<p>*) Cho a, b là các số thực dương khác nhau. Chứng minh $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}$</p> <p>$a, b > 0, a \neq b \Rightarrow (a-b)^2 > 0 \Rightarrow (a+b)^2 > 4ab$</p> <p>$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} > \frac{4}{ab} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{ab}$</p> <p>*) Cho $A = \frac{1}{2019} + \frac{1}{2020} + \frac{1}{2021} + \dots + \frac{1}{6054} + \frac{1}{6055}$ Chứng minh rằng $A > 1$</p>	0,25

Câu	Hướng dẫn giải	Điểm
	<p style="text-align: center;">Áp dụng câu a ta có</p> $A = \frac{1}{2019} + \left(\frac{1}{2020} + \frac{1}{6055}\right) + \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{6054}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4037} + \frac{1}{4038}\right)$ $A > \frac{1}{2019} + \left(\frac{4}{2020+6055} + \frac{4}{2021+6054} + \dots + \frac{4}{4037+4038}\right)$ $A > \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \frac{1}{2019} + \dots + \frac{1}{2019} \text{ (có 2019 phân số)}$ $\Rightarrow A > 1$	0,25